Math E-Book
Release 1.0

คณิต มงคลพิทักษ์สุข

kanuay@chula.com

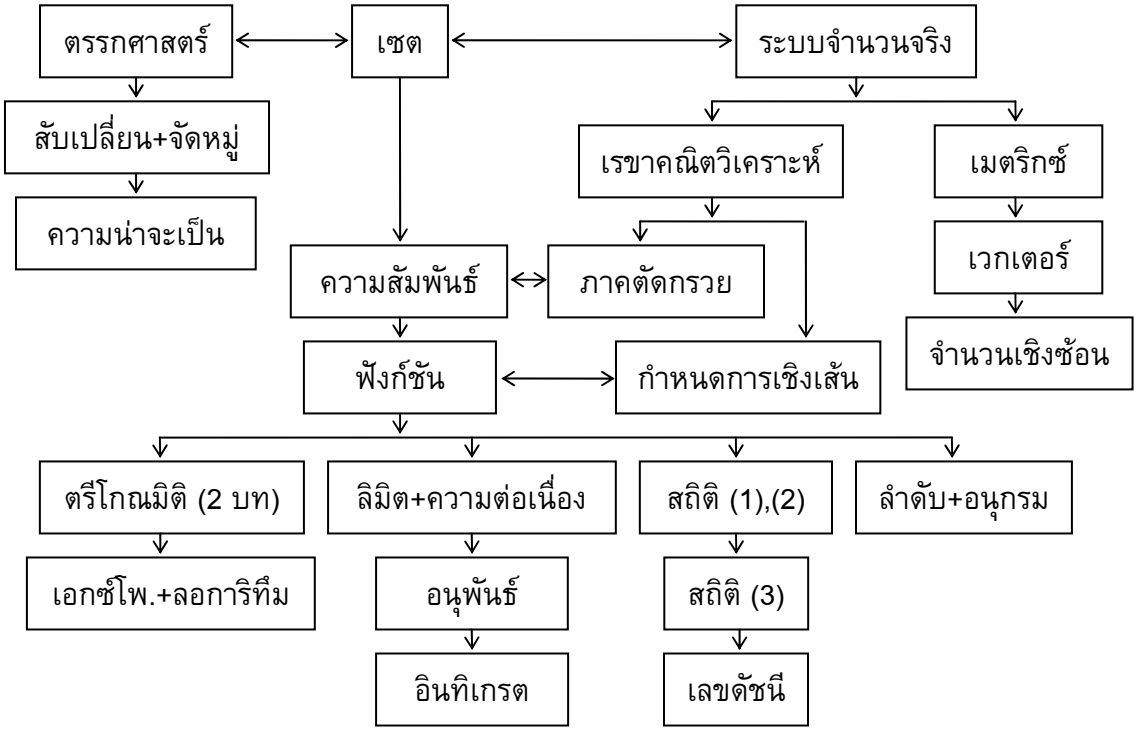
มีนาคม 2547

คำชี้แจง

• Math E-Book ฉบับนี้ประกอบด้วย เนื้อหาตามหลักสูตร ม.ปลาย ครบทุกหัวข้อ (ซึ่งพยายามเขียนให้กระชับที่สุด) และโจทย์แบบฝึกหัดที่เรียงลำดับจากง่ายไปยาก พร้อมทั้งเนื้อหาที่ควรทำความเข้าใจเพิ่มเติม นอกจากนี้ในตอนท้ายยังมีโจทย์ข้อสอบเอ็นทรานซ์วิชาคณิตศาสตร์ 1 ทุกฉบับ (ระบบใหม่ : มี.ค.41 ถึง ต.ค.46) ซึ่งทั้งหมดนี้ผู้เขียนจัดทำขึ้นก็เพื่อใช้ประกอบการสอนเป็นหลัก

• ในท้ายบทเรียนและท้ายข้อสอบมีคำเฉลยไว้ให้แล้วครบทุกข้อ แต่ไม่ได้มีเฉลยแบบละเอียดเนื่องด้วยข้อจำกัดในเรื่องเวลา แต่เชื่อว่าหากผู้อ่าน Math E-Book ฉบับนี้ได้ให้เวลาทำความเข้าใจเนื้อหาอย่างถี่ถ้วน และฝึกทำโจทย์แบบฝึกหัดไปทีละขั้นๆ พร้อมกับตรวจเฉลยทุกข้อ ก็จะติดตามบทเรียนไปจนจบได้อย่างลุล่วง แต่หากมีข้อสงสัยก็ควรถามจากผู้รู้ ไม่ควรปล่อยให้ติดค้างต่อไป :]

• เนื้อหาบางบทเรียนสามารถเริ่มทำความเข้าใจได้ทันที แต่เนื้อหาบางบทเรียนก็จำเป็นต้องใช้ความรู้จากบทเรียนอื่นประกอบ เพื่อป้องกันการสับสนผู้อ่านควรศึกษาเรียงตามหัวข้อดังนี้



• มีข้อสงสัย คำแนะนำ หรือต้องการแจ้งข้อบกพร่อง
กรุณาติดต่อผู้เขียนที่ kanuay@chula.com ... ขอบคุณล่วงหน้าครับ

คณิต มงคลพิทักษ์สุข

สารบัญ

บทเรียน	หน้า
เซต	5
ระบบจำนวนจริง	15
ตรรกศาสตร์	30
เรขาคณิตวิเคราะห์	40
ภาคตัดกรวย	48
ความสัมพันธ์	60
ฟังก์ชัน	69
กำหนดการเชิงเส้น	79
ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	86
ตรีโกณมิติและการประยุกต์	95
ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและลอการิทึม	104
เมตริกซ์	114
เวกเตอร์	131
จำนวนเชิงซ้อน	143
ลำดับและอนุกรม	152
ลิมิตและความต่อเนื่อง	162
อนุพันธ์ของฟังก์ชัน	167
การอินทิเกรต	178
วิธีเรียงสับเปลี่ยนและจัดหมู่	183
ความน่าจะเป็น	197
สถิติ (1)	201
สถิติ (2)	212
สถิติ (3)	223
เลขดัชนี	229

ข้อสอบเอ็นทรานซ์ **หน้า**

วิชาคณิตศาสตร์ 1

ตุลาคม 2541 236

มีนาคม 2542 242

ตุลาคม 2542 248

มีนาคม 2543 254

ตุลาคม 2543 260

มีนาคม 2544 266

ตุลาคม 2544 272

มีนาคม 2545 278

ตุลาคม 2545 284

มีนาคม 2546 290

ตุลาคม 2546 296

เตรียมสอบเอ็นทรานซ์ มีนาคม 2547 (1) 302

เตรียมสอบเอ็นทรานซ์ มีนาคม 2547 (2) 308

สถิติคะแนนสอบเอ็นทรานซ์ 2541 – 2546 314

เซต (Set)

• "กลุ่มของสิ่งต่างๆ" ในวิชาคณิตศาสตร์จะเรียกว่า *เซต* (Set) เช่น เซตของชื่อวันทั้งเจ็ด, เซตของจำนวนเต็มที่ยกกำลังสองแล้วมีค่าน้อยกว่า 7, เซตของตัวประกอบของ 360, เซตของจำนวนเฉพาะบวกที่น้อยกว่า 7, เซตของจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 3 ถึง 33 ฯลฯ สิ่งที่อยู่ภายในแต่ละเซต เรียกว่า *สมาชิก* (Element หรือ Member) โดยเซตสองเซตจะเท่ากัน ก็ต่อเมื่อเป็นเซตเดียวกัน (มีสมาชิกทุกตัวเหมือนกัน)

• นิยมตั้งชื่อเซตด้วยอักษรตัวใหญ่ เช่น A, B, C และเขียนสัญลักษณ์แทนเซตด้วยวงเล็บปีกกา ดังนี้ { } เช่น ให้ A แทนเซตของชื่อวันทั้งเจ็ด, B แทนเซตของจำนวนเต็มที่ยกกำลังสองแล้วมีค่าน้อยกว่า 7, C แทนเซตของตัวประกอบของ 360, D แทนเซตของจำนวนเฉพาะบวกที่น้อยกว่า 7, E แทนเซตของจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 3 ถึง 33 จะได้ว่า

$A = \{$ อาทิตย์, จันทร์, อังคาร, พุธ, พฤหัสบดี, ศุกร์, เสาร์ $\}$

การเขียนแจกแจงสมาชิกของเซต จะคั่นระหว่างสมาชิกแต่ละตัวด้วยจุลภาค (comma)

$B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ หรือ $B = \{0, 1, -1, 2, -2\}$

การเขียนแจกแจงสมาชิกของเซต สามารถสลับที่สมาชิกในเซตได้โดยความหมายไม่เปลี่ยน

$C = \{2, 3, 5\}$ $D = \{2, 3, 5\}$ จะกล่าวได้ว่า $C = D$

สมาชิกตัวที่ซ้ำกันนับเป็นตัวเดียวกัน และไม่ต้องเขียนซ้ำ ($360 = 2\times2\times2\times3\times3\times5$)

$E = \{4, 5, 6, 7, \ldots, 32\}$

หากมีสมาชิกเป็นจำนวนมาก อาจใช้เครื่องหมาย "..." เพื่อละสมาชิกบางตัวไว้ในฐานที่เข้าใจ

• เซตที่หาจำนวนสมาชิกได้ เรียกว่า *เซตจำกัด* (Finite Set) และสัญลักษณ์ที่ใช้แทน "จำนวนสมาชิกของ A" คือ $n(A)$ เช่นในตัวอย่างข้างต้น $n(A) = 7$, $n(B) = 5$, $n(C) = 3$, $n(E) = 29$ นอกจากนั้น เซตจำกัดที่ไม่มีสมาชิกอยู่เลย จะเรียกว่า *เซตว่าง* (Null Set หรือ Empty Set) ใช้สัญลักษณ์ { } หรือ $\varnothing$ นั่นคือ $n(\varnothing) = 0$

• เซตที่จำนวนสมาชิกมากจนหาค่าไม่ได้ เรียกว่า *เซตอนันต์* (Infinite Set) เช่น F แทนเซตของจำนวนเต็มที่น้อยกว่า 2, G แทนเซตของจำนวนใดๆ ที่อยู่ระหว่าง 0 กับ 1

$F = \{1, 0, -1, -2, -3, \ldots\}$, $n(F)$ หาค่าไม่ได้

G เขียนแบบแจกแจงสมาชิกไม่ได้ แต่เขียนแบบบอกเงื่อนไขได้

ในรูป { สมาชิก | เงื่อนไข } คือ $G = \{ x \mid 0 < x < 1 \}$

อ่านว่า *เซตของ* x (สมาชิก) *โดยที่* $0 < x < 1$ (เงื่อนไข)

• สัญลักษณ์ที่ใช้แทนคำว่า "เป็นสมาชิกของ" คือ $\in$ เช่น $2 \in B$, $3 \in C$, $0.5 \in G$

สัญลักษณ์ที่ใช้แทนคำว่า "ไม่เป็นสมาชิกของ" คือ $\notin$ เช่น $2.5 \notin B$, $4 \notin C$, $0 \notin G$

• ขอบเขตของสิ่งที่เราสนใจ เรียกว่า *เอกภพสัมพัทธ์* (Universe) หรือเซต $\mathcal{U}$
นั่นคือ สมาชิกของเซตทุกเซตจะต้องอยู่ใน $\mathcal{U}$ ทั้งหมด และจะไม่สนใจสิ่งที่อยู่ภายนอก $\mathcal{U}$
เช่น ถ้า $\mathcal{U} = \{-2, -1, 0, 0.5, 7\}$ และ $H = \{ x \mid x \geq 0 \}$ จะได้ว่า $H = \{0, 0.5, 7\}$
แต่ถ้าเปลี่ยนเป็น $\mathcal{U}$ = เซตของจำนวนเต็ม จะได้ว่า $H = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

หมายเหตุ โดยทั่วไปถ้าไม่ได้ระบุเอกภพสัมพัทธ์ ให้ถือว่า $\mathcal{U}$ เป็นเซตของจำนวนจริง $\mathbb{R}$
เช่น $H = \{ x \mid x \geq 0 \}$ มีความหมายเดียวกับ $H = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \}$

สับเซต และเพาเวอร์เซต

• *สับเซต* (Subset) คือเซตย่อย จะกล่าวว่า B เป็นสับเซตของ A ได้ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวของเซต B เป็นสมาชิกของเซต A ด้วย (และ B จะไม่เป็นสับเซตของ A หากว่ามีสมาชิกบางตัวของเซต B ไม่เป็นสมาชิกของเซต A) สัญลักษณ์ที่ใช้แทนประโยค "B เป็นสับเซตของ A" คือ $B \subset A$ และ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนประโยค "B ไม่เป็นสับเซตของ A" คือ $B \not\subset A$

• ตัวอย่างเช่น $A = \{m, p, r, w\}$ จะมีเซต B ที่ทำให้ $B \subset A$ ได้ถึง 16 แบบ ดังนี้

$\varnothing$

$\{m\}$ $\{p\}$ $\{r\}$ $\{w\}$

$\{m, p\}$ $\{m, r\}$ $\{m, w\}$ $\{p, r\}$ $\{p, w\}$ $\{r, w\}$

$\{m, p, r\}$ $\{m, p, w\}$ $\{m, r, w\}$ $\{p, r, w\}$

$\{m, p, r, w\}$

ข้อควรทราบ **1.** เซตว่างเป็นสับเซตของทุกเซต $\varnothing \subset A$

2. เซตทุกเซตเป็นสับเซตของตัวเอง $A \subset A$

3. เซตที่มีสมาชิก n ตัว จะมีสับเซตทั้งสิ้น 2^n แบบ

4. บางตำราใช้สัญลักษณ์ $\subset$ แทนการเป็น *สับเซตแท้* (Proper Subset) ซึ่งจะมีเพียง $2^n - 1$ แบบเท่านั้น (คือนับเฉพาะเซตที่เล็กกว่าเท่านั้น) และใช้สัญลักษณ์ $\subseteq$ แทนการเป็นสับเซตใดๆ (นั่นคือ $A \subseteq A$ แต่ $A \not\subset A$) ... แต่ในที่นี้จะใช้เครื่องหมาย $\subset$ เพียงแบบเดียวเท่านั้น

* หมายเหตุ มีของ n สิ่ง หยิบออกมาทีละ r สิ่ง ไม่ให้ซ้ำแบบกัน ได้ทั้งสิ้น $\frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$ แบบ
เช่น B มีสมาชิก 4 ตัว จะมีสับเซตที่หยิบสมาชิกออกมา 3 ตัว อยู่ $\frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4$ แบบ
กฎการนับนี้ จะได้ศึกษาอย่างละเอียดในบทเรียน "วิธีเรียงสับเปลี่ยนและจัดหมู่"

• *เพาเวอร์เซต* (Powerset) คือเซตที่บรรจุด้วยสับเซตทั้งหมดที่เป็นไปได้ เพาเวอร์เซตของ A จะใช้สัญลักษณ์ว่า $P(A)$ ดังนั้น ถ้า A มีสมาชิก n ตัวแล้ว $P(A)$ ย่อมมีสมาชิก 2^n ตัว
เช่นในตัวอย่างนี้ $P(A) = \{\varnothing, \{m\}, \{p\}, \{r\}, \{w\}, \{m, p\}, \{m, r\}, \dots, \{m, p, r, w\}\}$

โจทย์

(1) กำหนด A, B เป็นเซตที่มีลักษณะ $A \subset B$ และ $A \neq B$ ถ้า $x \in A$ และ $y \in B$ แล้ว ข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

(1.1) $\{x\} \subset B$

(1.2) $\{y\} \not\subset A$

(1.3) $\{A\} \subset \{B\}$

(1.4) $\{A\} \neq \{B\}$

(2) ให้ $A = \{\{\varnothing\}, a, b, \{a\}, \{a, b\}\}$ ข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

(2.1) $\{\varnothing\} \in A$

(2.2) $\{\varnothing\} \subset A$

(2.3) $\{\{a\}, b\} \subset A$

(2.4) $\{a, b\} \in A$ และ $\{a, b\} \not\subset A$

(3) ข้อความต่อไปนี้ถูกต้องหรือไม่

(3.1) ถ้า $A \subset B$ และ $B \subset C$ แล้ว $A \subset C$

(3.2) ถ้า $A \in B$ และ $B \in C$ แล้ว $A \in C$

(3.3) ถ้า $A \not\subset B$ และ $B \not\subset C$ แล้ว $A \not\subset C$

(4) ให้ A เป็นเซตใดๆ ข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

(4.1) $\{ x \mid x = A \} = \{A\}$

(4.2) $\{ x \mid x \in A \} = A$

(4.3) $\{ x \mid \{x\} \subset A \} = \{A\}$

(4.4) $\{ x \mid \{x\} \subset \varnothing \} = \varnothing$

(5) ข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

(5.1) ถ้า $n(A) = 5$ แล้ว สับเซตของ A มีทั้งหมด 32 แบบ

(5.2) ถ้า $n(A) = 5$ แล้ว สับเซตแท้ของ A มีทั้งหมด 32 แบบ

(5.3) ถ้า $n(A) = 5$ แล้ว เพาเวอร์เซตของ A มีทั้งหมด 32 แบบ

(5.4) ถ้า $n(A) = 5$ แล้ว สมาชิกของเพาเวอร์เซตของ A มีทั้งหมด 32 ตัว

(6) ถ้า A มีสับเซตแท้ 511 เซต แสดงว่า A มีสมาชิกกี่ตัว
และในจำนวน 511 เซตนั้น สับเซตที่มีสมาชิกเพียง 5 ตัวมีกี่เซต

(7) ข้อความต่อไปนี้ถูกต้องหรือไม่

(7.1) $\varnothing \in \varnothing$

(7.2) $\varnothing \subset \varnothing$

(7.3) $\varnothing \in \{\varnothing\}$

(7.4) $\varnothing \subset \{\varnothing\}$

(7.5) $\varnothing \in P(\varnothing)$

(7.6) $\varnothing \subset P(\varnothing)$

(7.7) $\{\varnothing\} \in P(\varnothing)$

(7.8) $\{\varnothing\} \subset P(\varnothing)$

(8) ถ้า $A = \{\varnothing, a, \{b\}, \{a, b\}\}$ แล้ว ข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

(8.1) $\varnothing \in P(A)$

(8.2) $\{\varnothing\} \in P(A)$

(8.3) $\varnothing \subset P(A)$

(8.4) $\{\varnothing\} \subset P(A)$

(8.5) $\{\varnothing, a, \{b\}\} \in P(A)$

(8.6) $a \in P(A)$

(8.7) $\{a\} \in P(A)$

(8.8) $\{b\} \in P(A)$

(8.9) $\{\{b\}\} \in P(A)$

(8.10) $\{\varnothing, a, \{b\}\} \subset P(A)$

(9) ถ้า $A = \{\varnothing, 1, 2, 3, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$ แล้ว ข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

(9.1) $\{\varnothing, \{1\}, \{1,2\}\} \in P(A)$ (9.3) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\} \in P(A)$

(9.2) $\{\varnothing, \{1\}, \{1,2\}\} \subset P(A)$ (9.4) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\} \subset P(A)$

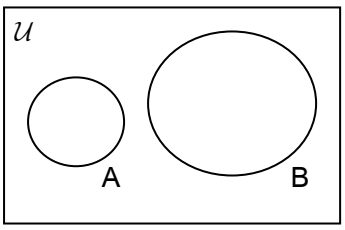
(10) [Ent'39] ให้ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ แล้วจงหา $n(X)$ และ $n(Y)$

เมื่อกำหนด $X = \{ A \in P(S) \mid 1 \in A \text{ และ } 7 \notin A \}$

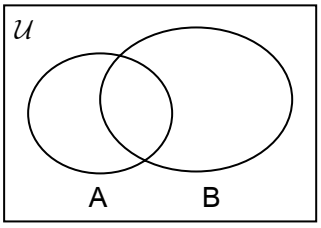
และ $Y = \{ A \in X \mid$ ผลบวกของสมาชิกภายใน A ไม่เกิน $6 \}$

แผนภาพของเวนน์-ออยเลอร์

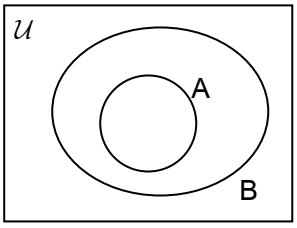
- การแสดงเซตด้วย *แผนภาพของเวนน์และออยเลอร์* (Venn-Euler Diagram) ช่วยให้เห็นลักษณะของเซตชัดเจนขึ้น การเขียนแผนภาพดังกล่าวนิยมให้เอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$ เป็นกรอบสี่เหลี่ยม ซึ่งภายในบรรจุรูปปิด (วงกลม วงรี ฯลฯ) ที่ใช้แทนขอบเขตของเซต A, B, C ต่างๆ โดยจะเขียนให้มีบริเวณที่เซตสองเซตซ้อนทับกัน หากว่าสองเซตนั้นมีสมาชิกร่วมกัน ดังภาพ



A และ B ไม่มีสมาชิกร่วมกัน



A และ B มีสมาชิกร่วมกัน



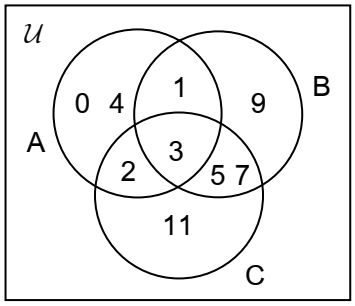
A เป็นสับเซตของ B

- สมมติว่า $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$C = \{2, 3, 5, 7, 11\}$

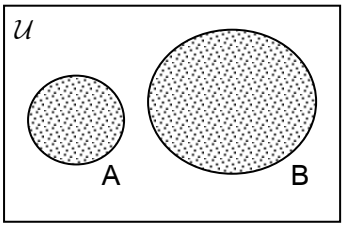
จะเขียนแผนภาพได้ดังนี้

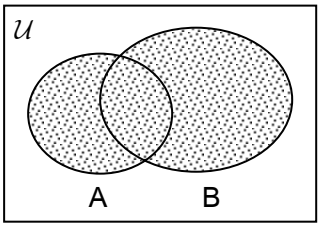


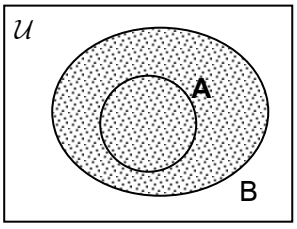
การดำเนินการเกี่ยวกับเซต

การดำเนินการเกี่ยวกับเซต เป็นการทำให้เกิดเซตใหม่ขึ้นจากเซตที่มีอยู่เดิม

1. ยูเนียน (Union : $\cup$) เซต $A \cup B$ คือเซตของสมาชิกที่อยู่ใน A <u>หรือ</u> B

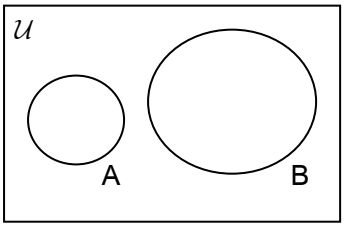




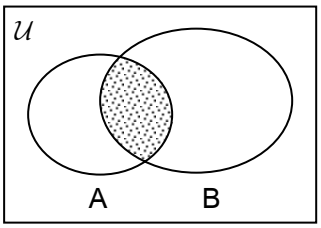


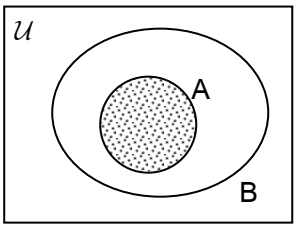
ยูเนียนของ A กับ B ได้เป็น B

2. อินเตอร์เซกชัน (Intersection : $\cap$) เซต $A \cap B$ คือเซตของสมาชิกที่อยู่ใน A และ B



อินเตอร์เซกชันของ A กับ B เป็นเซตว่าง



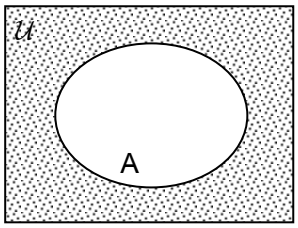


อินเตอร์เซกชันของ A กับ B เป็น A

3. คอมพลีเมนต์ (Complement : ')

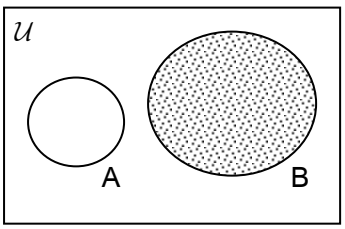
เซต A' คือเซตของสมาชิกที่ไม่ได้อยู่ใน A

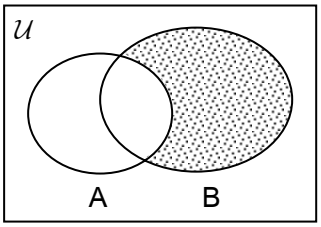
หมายเหตุ บางตำราใช้สัญลักษณ์ A^c แทน A'

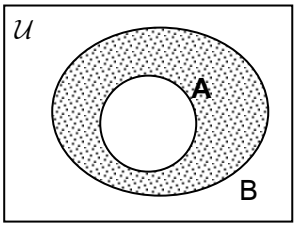


4. ผลต่าง (Difference หรือ Relative Complement : $-$)

$B - A$ คือเซตของสิ่งที่อยู่ใน B แต่ไม่อยู่ใน A และสรุปได้ว่า $\boxed{B - A = B \cap A'}$







ข้อสังเกต โดยทั่วไป $n(B - A) \neq n(B) - n(A)$ แต่ $\boxed{n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)}$

สมบัติที่เกี่ยวกับการดำเนินการของเซต

- การแจกแจง

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A - (B \cup C) = (A - B) \cup (A - C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A - (B \cap C) = (A - B) \cap (A - C)$$

- คอมพลีเมนต์ และเพาเวอร์เซต

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$
$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$
$$P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$$
$$P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$$

โจทย์

(11) กำหนดให้ $A \cup B = \{0,1,2,3,4,5\}$ $A \cap B = \{1,3,5\}$ $B \cap C = \{2,3,5\}$ $A \cup C = \{0,1,2,3,5\}$ $A \cap C = \{0,3,5\}$ แล้ว ข้อใดผิด

ก. $A \cap B' = \{0\}$ ข. $B \cap C' = \{1\}$ ค. $A \cap C' = \{1\}$ ง. $B \cap A' = \{2,4\}$

(12) ให้เขียนเซต $C' \cup B'$ แบบแจกแจงสมาชิก เมื่อกำหนดให้

$U = \{ x \in \mathbb{I} \mid 1 \leq x \leq 10 \}$ เมื่อ $\mathbb{I}$ = เซตของจำนวนเต็ม

$B = \{ x \mid x$ หาร 3 ลงตัว $\}$ และ $C = \{ x \mid x \leq 5 \}$

(13) [Ent'38] ถ้า $A = \{0,1\}$ และ $B = \{0,\{1\},\{0,1\}\}$ แล้ว

(13.1) ข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด $A \in P(B)$

(13.2) ข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด $\{1\} \in P(A) \cap P(B)$

(13.3) ค่าของ $n(P(A \cup B)) - n(P(A \cap B))$ เป็นเท่าใด

(14) ข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

(14.1) $\varnothing' = \mathcal{U}$

(14.2) $\mathcal{U}' = \varnothing$

(14.3) $A \subset (A \cup B)$

(14.4) $B \subset (A \cup B)$

(14.5) $(A \cap B) \subset A$

(14.6) $(A \cap B) \subset B$

(14.7) $A \cap A' = \varnothing$

(14.8) $A \cup A' = \mathcal{U}$

(14.9) $A - \mathcal{U} = \varnothing$ และ $\mathcal{U} - A = A'$

(14.10) $A - \varnothing = A$ และ $\varnothing - A = \varnothing$

(14.11) $A - A = \varnothing$

(14.12) $A - B = A \cap B'$

(15) ข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

(15.1) ถ้า $A \subset B$ แล้ว $P(A) \subset P(B)$

(15.2) ถ้า $A \cup B = \varnothing$ แล้ว $A = \varnothing$ และ $B = \varnothing$

(15.3) ถ้า $A \cap B = \varnothing$ แล้ว $A = \varnothing$ และ $B = \varnothing$

(15.4) ถ้า $A - B = \varnothing$ และ $B - C = B$ แล้ว $A' \cup C' = \mathcal{U}$

(15.5) ถ้า $A - B = \varnothing$ และ $B - C \neq \varnothing$ แล้ว $A - C \neq \varnothing$

(16) สำหรับเซต A, B ใดๆ ข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

(16.1) $A \cap B \neq A \cup B$

(16.2) $A - B \neq B - A$

(16.3) $A \cap B = A - B'$

(16.4) $(A \cup B)' = B' - A$

(16.5) ถ้า $x \notin A$ แล้ว $x \notin A \cup B$

(16.6) ถ้า $x \in A$ แล้ว $x \notin A' \cap B'$

(16.7) ถ้า $x \notin A$ แล้ว $x \in A' \cap B'$

(16.8) ถ้า $x \in A$ แล้ว $x \in (A' \cup B')'$

(17) เขียนเซตต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปที่สั้นที่สุด

(17.1) $A - (A \cap B)$

(17.2) $(A - B) \cup B$

(17.3) $(A - B) \cap B$

(17.4) $A \cap (A - B)$

(17.5) $A \cup (A - B)$

(17.6) $(A \cup B) - B$

(17.7) $(A \cap B) - B$

(17.8) $A - (A - B)$

(17.9) $(A - B) \cap (B - A')$

(18) ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือไม่

(18.1) ถ้า $A \cup C = B \cup C$ แล้ว $A = B$

(18.2) ถ้า $A \cap C = B \cap C$ แล้ว $A = B$

(18.3) ถ้า $A - C = B - C$ แล้ว $A = B$

(18.4) ถ้า $A' = B'$ แล้ว $A = B$

(19) ให้บอกเงื่อนไขที่ทำให้ $A - B = A$ อย่างน้อย 3 กรณี

(20) เขียนเซตต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปที่สั้นที่สุด

(20.1) $(A-B)\cup(B-A)\cup(A\cap B)$

(20.2) $[A\cap(A'\cup B)]\cup[B\cap(B'\cup A')]$

(20.3) $\big([(A-B)\cup(B-A)]-A'\big)\cup\big(A'-[(A-B)\cup(B-A)]\big)$

(20.4) $[(A\cup B)'\cap(B-C')]\cup\big([(D-E)\cap(C'-E')]\cup(A-E')\big)'$

(21) ข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

(21.1) $(A\cap B\cap C)\cup(A'\cap B\cap C)\cup(B'\cup C')=\mathcal{U}$

(21.2) $(A\cap B\cap C\cap D')\cup(A'\cap C)\cup(B'\cap C)\cup(C\cap D)=C$

(21.3) $P(A\cap B)\subset P(A\cup B)$

(21.4) $P(A-B)\cap P(B-A)=\{\varnothing\}$

(21.5) ถ้า $A\subset B$ แล้ว $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$

(22) ให้ $A=\{0,1,2,3\}$, $B=\{\{0\},1,2,\{3\}\}$ และ $C=\{0,\{1\},\{2\},3\}$
ข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

(22.1) $P(A)\cap P(B)\cap P(C')=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

(22.2) $P(A)\cap P(B')\cap P(C)=\{\varnothing,\{0\},\{3\},\{0,3\}\}$

(22.3) $P(A')\cap P(B)\cap P(C)=\{\varnothing,\{0\}\}$

(22.4) $P(A)\cap P(B')\cap P(C')=\{\varnothing\}$

(23) ถ้า $n(\mathcal{U})=35$, $n(A)=22$, $n(B)=18$
ให้หาว่า $n(A'\cap B')$ จะมีค่ามากที่สุดได้เท่าใด

(24) ถ้า $n(A)=a$, $n(B)=b$, $n(C)=c$, $n(D)=d$
$n(A\cap B)=b$, $n(B\cap C)=c$, $n(C\cap D)=d$ แล้ว
ให้หา $n(A\cap B\cap C\cap D)$ และ $n(A\cup B\cup C\cup D)$

(25) ให้ A,B,C เป็นเซตซึ่ง $P(C)=\{\varnothing,\{a\},\{c\},C\}$, $n(P(A))=8$,
$n(P(B))=16$, $C\subset A$, $C\subset B$, $\{b,d,e\}\subset A\cup B$ และ $b\in A\cap B'$ ข้อใดผิด

ก. $d\in(A\cup B')'$ ข. $e\in(C\cup B')'$

ค. $b\notin(A'\cup B')'$ ง. $\{b,e\}\subset(A'\cup B)'$

(26) เมื่อ $A=\{\varnothing,1,\{1\}\}$ และ $A\cap B'=\varnothing$ แล้ว ข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

(26.1) $n[P(A)\cap P(B)]=8$ (26.3) $P(A-B)=\{\varnothing\}$

(26.2) $\{1\}\in P(A\cap B)$ (26.4) $P(B-A)=\{\varnothing\}$

(27) [Ent'37] ถ้า $A=\{\varnothing,\{\varnothing\},0,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$ แล้ว
จงหาจำนวนสมาชิกของเซต $[P(A)-A]\cup[A-P(A)]$

(28) มีเซต A ที่ตรงตามเงื่อนไขต่อไปนี้กี่แบบ

(28.1) $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$ และ $B=\{1,3,5\}$

(28.2) $A\cup B=\{1,2,3,\ldots,15\}$ และ $B=\{2,4,6,8,10\}$

(29) กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ และ $B = \{1, 2, 3\}$ แล้ว
จะมีเซต X ตามเงื่อนไขต่อไปนี้ได้กี่แบบ

(29.1) $B \subset X \subset A$

(29.2) $X \subset A$ และ $B \cap X \neq \varnothing$

(30) ถ้า $B \subset A$ โดย $n(A) = 10$, $n(B) = 4$ ให้หาค่า $n(C)$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

(30.1) $C = \{ S \mid B \subset S \subset A \}$

(30.2) $C = \{ S \subset A \mid S \cap B \neq \varnothing \}$

(31) กำหนด $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ $B = \{0, 1, 2\}$ $C = \{1, 2, 3\}$ $D = \{0, 2, 3\}$
ให้หาจำนวนเซต X ซึ่ง $X \subset A$ และตรงตามเงื่อนไขต่อไปนี้

(31.1) $B \cap C' \subset X$ (31.3) $B \cap D \subset X$

(31.2) $B \cap C' \not\subset X$ (31.4) $B \cap D \not\subset X$

(32) ถ้า $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 8\}$
$A = \mathcal{U} - \{1\}$ $B = \{2, 4, 6\}$ และ $C = \{1, 7\}$
มีเซต D ที่เป็นไปได้กี่แบบที่ตรงตามเงื่อนไข $(B' - C) \subset D \subset A$

(33) กำหนดให้ $\mathcal{U} = \{ x \in \mathbb{I} \mid -2 \leq x \leq 6 \}$ เมื่อ $\mathbb{I}$ = เซตของจำนวนเต็ม
$A = \{ k^2 \mid k \in \mathcal{U} \}$ และ $B = \{ \sqrt{k} \mid k \in \mathcal{U} \}$
จำนวนสมาชิกของเซต $C = \{ x \mid A \cap B \subset x$ และ $x \subset A \cup B \}$ เป็นเท่าใด

(34) ให้ $A = \{a, b, c, d, f\}$ และ $B = \{a, c, d, e\}$
เซต X ซึ่ง $X \subset A \cup B$ และ $A \cap B \cap X \neq \varnothing$ มีกี่เซต

(35) ให้ $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ และ $S_k = \{ B \subset A \mid n(B) = k \}$
ให้หาค่า $n(S)$ เมื่อ $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5$

(36) กำหนด $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, \ldots, 100\}$ $A = \{ x \mid x$ หารด้วย 2 ลงตัว $\}$
$B = \{ x \mid x$ หารด้วย 3 ลงตัว $\}$ $D = \{ x \mid x$ หารด้วย 5 ลงตัว $\}$
ให้หาค่าของ $n(A' \cap B' \cap C')$

(37) กำหนดเซต A, B เป็นสับเซตของ $\mathcal{U}$ หาก $n(\mathcal{U}) = 100$, $n(A') = 40$,
$n(B) = 55$, $n(A \cap B') = 32$ แล้วค่าของ $n(A' \cap B')$ เป็นเท่าใด

<u>โจทย์ปัญหา</u>

- โจทย์ปัญหาที่เป็นเหตุการณ์ จะใช้แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ ช่วยในการคำนวณส่วนประกอบต่างๆ และอาจใช้สูตรในการหาจำนวนสมาชิกในเซตเพิ่มเติมดังนี้

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

<u>โจทย์</u>

(38) นักเรียน 80 คน เป็นนักกีฬา 35 คน เป็นนักดนตรี 27 คน และไม่ได้เป็นทั้งนักกีฬาและนักดนตรี 32 คน ถามว่ามีนักเรียนที่ไม่ได้เป็นนักกีฬา หรือ ไม่ได้เป็นนักดนตรี อยู่กี่คน

(39) [Ent'33] จากการสำรวจนักเรียนห้องหนึ่ง พบว่ามี 20 คนที่เรียนฝรั่งเศสหรือคณิตศาสตร์ (โดยที่หากเรียนฝรั่งเศสแล้วต้องไม่เรียนคณิตศาสตร์) มี 17 คนที่ไม่เรียนคณิตศาสตร์ และมี 15 คนที่ไม่เรียนฝรั่งเศส แล้วมีกี่คนที่ไม่เรียนทั้งสองวิชานี้เลย

(40) [Ent'34] จากการสอบถามผู้ดื่มกาแฟ 20 คน พบว่าจำนวนผู้ใส่ครีม น้อยกว่าสองเท่าของผู้ใส่น้ำตาลอยู่ 7 คน และจำนวนผู้ที่ใส่ทั้งครีมและน้ำตาล เท่ากับจำนวนผู้ที่ไม่ใส่ทั้งครีมและน้ำตาล ดังนั้นมีผู้ที่ใส่ครีมทั้งหมดกี่คน

(41) พนักงานบริษัท 34 คน ถูกสำรวจเกี่ยวกับการสวมนาฬิกา แว่นตา และแหวน ปรากฏว่าสวมแว่นอย่างเดียว 5 คน จำนวนคนสวมนาฬิกามากกว่าจำนวนคนสวมแว่นตาอยู่ 1 คน จำนวนคนไม่สวมนาฬิกาเป็น 3 เท่าของจำนวนคนสวมแหวน นอกจากนั้น คนสวมแหวนทุกคนสวมแว่น แต่คนสวมนาฬิกาไม่มีคนใดสวมแว่น จะมีคนสวมนาฬิกากี่คน

(42) [Ent'26] นักเรียนคนหนึ่งไปพักผ่อนที่พัทยา ตลอดช่วงเวลานั้นเขาสังเกตได้ว่ามีฝนตก 7 วันในช่วงเช้าหรือเย็น โดยถ้าวันใดฝนตกช่วงเช้าแล้วจะไม่ตกในช่วงเย็น, มี 6 วันที่ฝนไม่ตกในช่วงเช้า และมี 5 วันที่ฝนไม่ตกในช่วงเย็น ถามว่านักเรียนคนนี้ไปพักผ่อนที่พัทยากี่วัน

(43) จากการสำรวจสายตาและสุขภาพฟันของนักเรียน 160 คน ซึ่งมีนักเรียนชายอยู่ 100 คน (นักเรียนชายสายตาไม่ดี 30 คน และฟันผุ 35 คน) พบว่ามีนักเรียนที่สายตาดีและฟันไม่ผุอยู่ 80 คน (เป็นชาย 55 คน) และมีนักเรียนที่สายตาไม่ดีทั้งหมด 50 คน ฟันผุทั้งหมด 60 คน ถามว่ามีนักเรียนที่สายตาดี หรือ ฟันไม่ผุ รวมทั้งหมดกี่คน

(44) ในจำนวนนักเรียน 35 คนซึ่งเป็นหญิง 11 คน ถ้าพบว่าชอบเล่นบาสเกตบอลกับฟุตบอลอย่างน้อยคนละอย่าง โดยมีนักเรียนชาย 16 คนชอบบาสเกตบอล นักเรียนหญิง 7 คนชอบฟุตบอล นักเรียนชอบบาสเกตบอลทั้งหมด 23 คน ฟุตบอล 21 คน ถามว่านักเรียนชายที่ชอบทั้งสองอย่างมีกี่คน

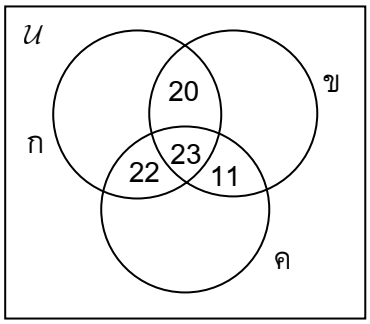
(45) โรงเรียนแห่งหนึ่งมีนักเรียนชาย 600 คน หญิง 500 คน ในจำนวนนี้มีนักเรียนที่มาจากต่างจังหวัดรวม 300 คน เป็นผู้ชาย 200 คน และมีนักกีฬารวม 50 คน เป็นผู้ชาย 30 คน โดยมีนักกีฬาที่มาจากต่างจังหวัด 25 คน เป็นชาย 15 คน ถามว่านักเรียนชายที่ไม่ได้มาจากต่างจังหวัดและไม่ได้เป็นนักกีฬาด้วย มีกี่คน

(46) เซตของจำนวนเต็มเซตหนึ่ง หากนำ 3 หรือ 4 ไปหารจะปรากฏว่า 4 หารลงตัวอย่างเดียว 6 จำนวน, 3 หารลงตัวทั้งหมด 8 จำนวน ซึ่งเป็นจำนวนคู่ 3 จำนวน, ทั้ง 3 และ 4 หารลงตัว มี 2 จำนวน, และ 4 หารไม่ลงตัว 18 จำนวน ซึ่งเป็นจำนวนคู่ 4 จำนวน ถามว่าจำนวนสมาชิกของเซตนี้เป็นเท่าใด, จำนวนคู่ในเซตนี้มีกี่จำนวน, และมีจำนวนที่ 3 หรือ 4 หารไม่ลงตัวกี่จำนวน

(47) [Ent'31] จากการสำรวจความนิยมของผู้ไปเที่ยวสวนสัตว์ 100 คน พบว่า 50 คนชอบช้าง, 35 คนชอบลิง, 25 คนชอบหมี, 32 คนชอบแต่ช้าง, 20 คนชอบหมีแต่ไม่ชอบลิง, 10 คนชอบช้างและลิงแต่ไม่ชอบหมี, ให้หาจำนวนคนที่ไม่ชอบสัตว์ทั้งสามชนิดนี้เลย

(48) [Ent'38] จากการสำรวจผู้ฟังเพลง 180 คน พบว่ามีผู้ชอบเพลงไทยสากล 95 คน เพลงไทยเดิม 92 คน และลูกทุ่ง 125 คน โดยแบ่งเป็น ผู้ชอบเพลงไทยสากลและไทยเดิม 52 คน เพลงไทยสากลและลูกทุ่ง 43 คน เพลงไทยเดิมและลูกทุ่ง 57 คน และทุกคนจะชอบฟังเพลงอย่างน้อยหนึ่งในสามประเภท จงหาจำนวนผู้ที่ชอบเพลงไทยสากลเพียงอย่างเดียว

(49) [Ent'39] ในการสำรวจความนิยมของคน 100 คนที่มีต่อนาย ก, ข, ค โดยที่ทุกคนต้องแสดงความนิยมให้อย่างน้อย 1 คน ปรากฏว่านาย ก ได้รับคะแนนนิยมมากกว่านาย ข อยู่ 6 คะแนน และเขียนแผนภาพได้ดังรูป ต่อไปนี้ข้อใดผิด



ก. นาย ข ได้คะแนนนิยมน้อยที่สุด

ข. ผลรวมของคะแนนทั้งสามคน เป็น 199

ค. ผู้ที่ลงคะแนนให้ นาย ก เท่านั้น มี 10 คน

ง. ผลรวมของคะแนนที่ลงให้คนใดคนหนึ่งเพียงคนเดียว เท่ากับ 24

(50) ในบรรดานักกีฬา 100 คนซึ่งเป็นชาย 60 คน พบว่ามีนักบาสเกตบอล 35 คน เป็นชาย 20 คน, มีนักเทนนิส 28 คน เป็นชาย 15 คน, มีนักวอลเลย์บอล 40 คน เป็นชาย 22 คน, เป็นทั้งนักบาสเกตบอลและเทนนิส 14 คน เป็นชาย 6 คน, เป็นทั้งนักเทนนิสและวอลเลย์บอล 16 คน เป็นชาย 10 คน, เป็นทั้งนักบาสเกตบอลและวอลเลย์บอล 20 คน เป็นชาย 11 คน, และมีนักกีฬาที่ไม่ได้เล่นกีฬาสามประเภทนี้เลย 12 คน เป็นชาย 8 คน ให้หาว่านักกีฬาที่เล่นครบทั้งสามประเภทมีผู้ชายมากกว่าผู้หญิงกี่คน

<u>เฉลย</u>

(1) ข้อ (1.1) และ (1.4) ถูก (2) ข้อ (2.1) และ (2.3) ถูก (3) ข้อ (3.1) ถูก (4) ข้อ (4.3) ผิด (5) ข้อ (5.1) และ (5.4) ถูก (6) 9 ตัว, 45 เซต (7) ข้อ (7.1) และ (7.7) ผิด (8) ข้อ (8.6), (8.8), (8.10) ผิด (9) ข้อ (9.3) ผิด (10) $32,\ 6$ (11) ข. (12) $\{1,2,4,5,6,7,8,9,10\}$ (13) ผิด, ผิด, $14-2$ (14) ถูกทุกข้อ (15) ข้อ (15.3) และ (15.5) ผิด (16) ข้อ (16.3), (16.4), (16.6) ถูก (17.1) $A-B$ (17.2) $A\cup B$ (17.3) $\varnothing$ (17.4) $A-B$ (17.5) A (17.6) $A-B$ (17.7) $\varnothing$ (17.8) $\varnothing$ (17.9) $\varnothing$ (18) ข้อ (18.4) ถูก (19) $A=\varnothing$ หรือ $B=\varnothing$ หรือ $A\cap B=\varnothing$ (20.1) $A\cup B$ (20.2) B (20.3) B' (20.4) $(A\cap E)'$ (21) ถูกทุกข้อ (22) ข้อ (22.3) ผิด (23) 13 (24) $d,\ a$ (25) ง. (26) ข้อ (26.4) ผิด (27) $61+3$ (28.1) 8 (28.2) 32 (29.1) 16 (29.2) $(8-1)\times 16$ (30.1) 64 (30.2) $(16-1)\times 64$ (31.1) 16 (31.2) 16 (31.3) 8 (31.4) 24 (32) 16 (33) 4 (34) 56 (35) 31 (36) 26 (37) 13 (38) 66 (39) 6 (40) 11 (41) 13 (42) 9 (43) 130 (44) 6 (45) 385 (46) 26, 12, 24 (47) 13 (48) 20 (49) ค. (50) 22-13

ระบบจำนวนจริง (Real Number System)

• จำนวนที่มนุษย์คิดขึ้นใช้ครั้งแรกเป็นจำนวนที่ใช้นับสิ่งของต่างๆ เรียกว่า *จำนวนธรรมชาติ* (Natural Number) หรือ *จำนวนนับ* (Counting Number) ได้แก่ $1, 2, 3, 4, \ldots$ ซึ่งสัญลักษณ์แทนเซตของจำนวนนับคือ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

• หากนำจำนวนนับเหล่านี้มาบวกหรือคูณกัน ผลลัพธ์ย่อมเป็นจำนวนนับเสมอ เรียกว่า "เซตของจำนวนนับมี *สมบัติปิด* (Closure Property) สำหรับการบวกและการคูณ" (คำว่า สมบัติปิด หมายความว่า เมื่อนำสมาชิกใดๆ ในเซตมาดำเนินการแล้ว ผลที่ได้ยังคงเป็นสมาชิกของเซตนั้นอยู่) แต่หากนำจำนวนนับบางจำนวนมาลบหรือหารกันจะมีปัญหาขัดข้องเนื่องจากผลที่ได้ไม่เป็นจำนวนนับ ด้วยเหตุนี้จำนวนลบ จำนวนศูนย์ รวมทั้งจำนวน *เศษส่วน* (Fraction) จึงถูกคิดขึ้นมาใช้

• จำนวนนับ จำนวนศูนย์ และจำนวนเต็มลบ เรียกรวมกันว่า *จำนวนเต็ม* (Integer)

$$\mathbb{I} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

จำนวนเต็มและจำนวนเศษส่วน (ที่เกิดจากการหารจำนวนเต็ม) เรียกรวมกันว่า *จำนวนตรรกยะ* (Rational Number)

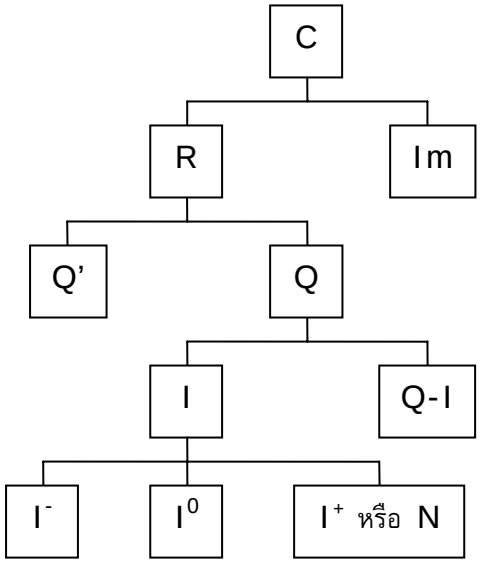
$$\mathbb{Q} = \{\, a/b \mid a, b \in \mathbb{I} \text{ และ } b \neq 0 \,\}$$

• <u>ข้อสังเกต</u> **1.** $\mathbb{N} \subset \mathbb{I}$ และ $\mathbb{I} \subset \mathbb{Q}$

2. จำนวนตรรกยะที่เป็นเศษส่วนของจำนวนเต็ม จะเขียนเป็นทศนิยมซ้ำได้เสมอ และจำนวนที่เขียนเป็นทศนิยมไม่ซ้ำ จะเรียกว่า *จำนวนอตรรกยะ* (Irrational Number) $\mathbb{Q}'$ เช่น $\sqrt{2} \approx 1.4142$, $\sqrt{3} \approx 1.7321$, $\pi \approx 3.1416$

3. $\mathbb{N}$ มีสมบัติปิดสำหรับการบวกและการคูณ
$\mathbb{I}$ และ $\mathbb{Q}$ มีสมบัติปิดสำหรับการบวก, ลบ, และคูณ
แต่ $\mathbb{Q}'$ ไม่มีสมบัติปิดเลย

• จำนวนทั้งหมดที่กล่าวมานี้ เรียกรวมกันว่า *จำนวนจริง* (Real Number : $\mathbb{R}$) ซึ่งมีแผนผังความสัมพันธ์ดังที่แสดงไว้ นอกจากนี้ยังมีจำนวนอีกหนึ่งประเภทที่ไม่ใช่จำนวนจริง (เนื่องจากไม่สามารถจัดลำดับค่ามากน้อยได้) เช่น $\sqrt{-2}$ (จะศึกษาในหัวข้อจำนวนเชิงซ้อน) รวมกันแล้วเรียกว่า *จำนวนเชิงซ้อน* (Complex Number : $\mathbb{C}$)



<u>สมบัติของการเท่ากัน</u>

[1] สมบัติการสะท้อน (Reflexive Property) $\boxed{a = a}$

[2] สมบัติการสมมาตร (Symmetric Property) $\boxed{a = b \leftrightarrow b = a}$

[3] สมบัติการถ่ายทอด (Transitive Property) $\boxed{a = b \wedge b = c \rightarrow a = c}$

[4] สมบัติการบวกและคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน $\boxed{a = b \rightarrow a + c = b + c}$

$\boxed{a = b \rightarrow ac = bc}$

<u>สมบัติเกี่ยวกับการบวกและการคูณ</u>

[1] "เอกลักษณ์ (Identity)" คือจำนวนที่ไปดำเนินการกับจำนวนจริง a ใดก็ตามแล้วได้ผลลัพธ์เป็นจำนวน a เดิม ... ดังนั้น เอกลักษณ์การบวกในระบบจำนวนจริง คือ 0 และเอกลักษณ์การคูณในระบบจำนวนจริง คือ 1

[2] "อินเวอร์ส (Inverse) ของ a" คือจำนวนที่ไปดำเนินการกับจำนวนจริง a แล้วได้ผลลัพธ์เป็นเอกลักษณ์ ... ดังนั้น เอกลักษณ์การบวกของจำนวนจริง a คือ $-a$ และเอกลักษณ์การคูณของจำนวนจริง a คือ $1/a$ หรือ *เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์* a^{-1}

[3] สมบัติปิด (Closure Property) $\boxed{a, b \in \mathbb{R} \rightarrow a + b \in \mathbb{R}}$

$\boxed{a, b \in \mathbb{R} \rightarrow a \cdot b \in \mathbb{R}}$

[4] สมบัติการสลับที่ (Commutative Property) $\boxed{a + b = b + a}$

$\boxed{ab = ba}$

[5] สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม (Associative Property) $\boxed{a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c}$

$\boxed{a(bc) = (ab)c = abc}$

[6] สมบัติการแจกแจง (Distributive Property) $\boxed{a(b + c) = ab + ac}$

$\boxed{(a + b)c = ac + bc}$

[7] สมบัติสำหรับเซตของจำนวนจริงบวก ($\mathbb{R}^+$) เพิ่มเติมได้แก่ สมบัติปิดของการบวก สมบัติปิดของการคูณ และสมบัติที่ว่า "ถ้าจำนวนจริง $a \neq 0$ แล้ว $a \in \mathbb{R}^+$ หรือ $-a \in \mathbb{R}^+$ เสมอ"

<u>ทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่ควรทราบ</u> (พิสูจน์ได้จากสมบัติข้างต้น)

[1] กฎการตัดออกสำหรับการบวกและการคูณ $\boxed{a + c = b + c \rightarrow a = b}$

$\boxed{a \cdot c = b \cdot c \rightarrow a = b}$ เมื่อ $c \neq 0$

[2] การคูณด้วยศูนย์ และจำนวนลบ $\boxed{0a = a0 = 0}$ $\boxed{(-1)a = -a}$

$\boxed{(-a)b = a(-b) = -ab}$

$\boxed{(-a)(-b) = ab}$ $\boxed{-(-a) = a}$

* [3] ผลคูณเท่ากับศูนย์ $\boxed{ab = 0 \rightarrow a = 0 \text{ หรือ } b = 0}$

[4] บทนิยามของการลบและการหาร $\boxed{a - b = a + (-b)}$

$\boxed{a \div b = ab^{-1}}$ เมื่อ $b \neq 0$ (ไม่นิยาม 0^{-1})

[5] การแจกแจงสำหรับการลบ $\boxed{a(b - c) = ab - ac}$

[6] อินเวอร์สการคูณไม่เป็นศูนย์เสมอ $\boxed{a^{-1} \neq 0}$ เมื่อ $a \neq 0$

[7] การคูณทั้งเศษและส่วน $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}}$

[8] การบวกและการคูณเศษส่วน $\boxed{\frac{a}{b} + \frac{d}{c} = \frac{ac + bd}{bc}}$ $\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}}$

[9] อินเวอร์สการคูณของเศษส่วน $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}}$

[10] เศษส่วนซ้อน $\boxed{\frac{a/b}{c} = \frac{a}{bc}}$ $\boxed{\frac{a}{b/c} = \frac{ac}{b}}$ $\boxed{\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}}$

หมายเหตุ **1.** ข้อ [7] ถึง [10] ตัวส่วนต้องไม่เท่ากับศูนย์

2. อาจนิยามการหารด้วยการคูณ คือ $a \div b = c \leftrightarrow a = bc$ ก็ได้
แต่ต้องกำกับว่าเป็นจริงเมื่อ $b \neq 0$ เท่านั้น (การหารด้วย 0 ในที่นี้จะไม่นิยาม)

โจทย์

(1) ข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

(1.1) $0.343443444\ldots$ เป็นจำนวนตรรกยะ

(1.2) $0.112112112\ldots$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

(1.3) ถ้า a^2 เป็นจำนวนคู่ แล้ว a ต้องเป็นจำนวนคู่

(1.4) ถ้า a^2 เป็นจำนวนคี่ แล้ว a ต้องเป็นจำนวนคี่

(2) ถ้า $a, b, c \in \mathbb{R}$ แล้ว ข้อความในแต่ละข้อต่อไปนี้ถูกหรือผิด

(2.1) ถ้า $ab = a$ แล้ว $b = 1$

(2.2) ถ้า $ab = 0$ แล้ว $a = 0$ และ $b = 0$

(2.3) เมื่อ $b \neq 0$ ถ้า $\frac{a}{b} = \frac{c}{b}$ แล้ว $a = c$

(2.4) เมื่อ $b, c \neq 0$ ถ้า $\frac{a}{b} = \frac{a}{c}$ แล้ว $b = c$

(3) เซตในข้อใดมีสมบัติปิดของการบวก และการคูณ

ก. เซตของจำนวนเต็มลบทั้งหมด ข. เซตของจำนวนเฉพาะบวกที่ไม่ใช่ 2

ค. เซตของจำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม ง. เซตของจำนวนเต็มที่หารด้วย 4 ลงตัว

(4) ข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

(4.1) เซตของจำนวนจริง มีสมบัติปิดของการลบ

(4.2) เซตของจำนวนจริง มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการลบ

(4.3) เซตของจำนวนจริงที่ไม่ใช่ 0 มีสมบัติปิดของการหาร

(4.4) เซตของจำนวนจริงที่ไม่ใช่ 0 มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการหาร

(5) เมื่อกำหนดเซต $A = \{ x \in \mathbb{N} \mid \sqrt{x} \in \mathbb{Q} \}$ และ $B = \mathbb{N} - A$ แล้ว ข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

(5.1) A มีสมบัติปิดการคูณ แต่ B ไม่มีสมบัติปิดการคูณ

(5.2) A ไม่มีสมบัติปิดการบวก และ B ไม่มีสมบัติปิดการบวก

(6) เซต A ในข้อใดทำให้ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

"ถ้า $x \in A$ แล้ว จะมี $y \in A$ ซึ่ง $xy = 1$ และ $xy \in A$"

ก. เซตของจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ 0 ข. เซตของจำนวนจริง

ค. เซตของจำนวนอตรรกยะ ง. เซตของจำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่ 0

(7) ให้หาอินเวอร์สการคูณของ $\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$ และเอกลักษณ์การคูณของ $\sqrt{6}+\sqrt{5}$

(8) กำหนดตารางการดำเนินทวิภาคดังขวามือ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

ก. $(a*b)*a = c$ ข. $(b*c)*b = a$

ค. $(a*b)*(c*b) = b$ ง. $(c*a)*(b*a) = b$

(9) การดำเนินการ $*$ สำหรับจำนวนจริง ในข้อใดไม่มีสมบัติการสลับที่

ก. $x*y = 3xy + (x+y)$ ข. $x*y = 2(x+y) - 3xy$

ค. $x*y = \frac{3}{xy} - \frac{1}{x+y}$ ง. $x*y = 2xy + \frac{1}{x-y}$

(10) กำหนด $a*b = 3ab + (a+b)$ แล้ว $x*(y*z) = (z*y)*x$ หรือไม่

(11) ถ้า A เป็นเซตของจำนวนนับคี่ และกำหนดตัวดำเนินการ $\oplus$ กับ $\otimes$ บนเซต A ดังนี้ $a \oplus b = \frac{a+b}{2}$ และ $a \otimes b = \frac{ab}{2}$ แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูกหรือผิดบ้าง

(11.1) เซต A มีสมบัติปิด และมีสมบัติการสลับที่ ภายใต้การดำเนินการ $\oplus$

(11.2) เซต A ไม่มีสมบัติปิด แต่มีสมบัติการสลับที่ ภายใต้การดำเนินการ $\otimes$

<u>ทฤษฎีบทเศษเหลือ</u> (Remainder Theorem)

• พหุนามตัวแปรเดียว ที่มี x เป็นตัวแปร จะอยู่ในรูป $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ นิยมใช้สัญลักษณ์ว่า $p(x)$ นอกจากนั้น สัญลักษณ์ $p(c)$ หมายถึงการแทนค่า x ด้วย c เช่น $p(x) = 4x^3 - x^2 - 2x + 6$ จะได้ว่า $p(-1) = 4(-1)^3 - (-1)^2 - 2(-1) + 6 = 3$

• การแก้สมการพหุนามตัวแปรเดียว $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ จะต้องแยกตัวประกอบให้สมการอยู่ในรูปผลคูณเท่ากับศูนย์ โดยมีเทคนิคต่างๆ ที่ศึกษาผ่านมา ได้แก่ กำลังสองสมบูรณ์ ผลต่างของกำลังสอง ผลบวกและผลต่างของกำลังสาม เป็นต้น แต่สำหรับสมการที่มีดีกรีมากกว่าสองทั่วไป ทฤษฎีบทเศษเหลือจะช่วยให้การแยกตัวประกอบสะดวกขึ้น

• *ทฤษฎีบทเศษเหลือ* กล่าวว่า ถ้าหาร $p(x)$ ด้วย $(x-c)$ แล้ว จะเหลือเศษเท่ากับ $p(c)$ (ใช้ได้ในกรณีที่ดีกรี n เป็นจำนวนเต็มบวก และสัมประสิทธิ์ทุกตัวเป็นจำนวนจริงเท่านั้น)

หากการหารนี้เหลือเศษ 0 พอดี (หารลงตัว) จะกล่าวว่า $(x-c)$ เป็นตัวประกอบของ $p(x)$ นั่นคือ $\boxed{\text{พหุนาม } p(x) \text{ จะมี } (x-c) \text{ เป็นตัวประกอบหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ } p(c)=0}$ เรียกทฤษฎีนี้ว่า *ทฤษฎีบทตัวประกอบ* (Factor Theorem)

• เรานำทฤษฎีบททั้งสองมาช่วยในการแยกตัวประกอบของ $p(x)$ ได้ โดยการสุ่มหาค่า c ที่ทำให้ $p(c)=0$ พอดี แล้วนำ $(x-c)$ ที่เป็นตัวประกอบไปหารออกจาก $p(x)$ จนหมด แต่ยังมีอีกทฤษฎีที่ทำให้เลือกค่า c ได้รวดเร็ว นั่นคือ *ทฤษฎีบทตัวประกอบจำนวนตรรกยะ* ซึ่งกล่าวว่า $\boxed{\text{ถ้า } (x-(k/m)) \text{ เป็นตัวประกอบของ } p(x) \text{ แล้ว } k \text{ เป็นตัวประกอบของ } a_0 \text{ และ } m \text{ เป็นตัวประกอบของ } a_n}$ (k/m เป็นเศษส่วนอย่างต่ำเท่านั้น)

• สรุปวิธีการหาตัวประกอบ $(x-c)$ ของ $p(x)$ เมื่อ c เป็นจำนวนตรรกยะ คือนำค่า k มาจากตัวประกอบของ a_0 และนำค่า m มาจากตัวประกอบของ a_n ... ค่า c ที่เป็นไปได้จะอยู่ในบรรดา k/m เหล่านี้เท่านั้น (อย่าลืมคิดทั้งจำนวนบวกและจำนวนลบ)

<u>โจทย์</u>

(12) ถ้าหาร $4x^3-21x^2+26x-17$ ด้วย $x-4$ แล้วเหลือเศษ a
และหาร $3x^3+13x^2+11x+5$ ด้วย $x+3$ แล้วเหลือเศษ b แล้วให้หาค่าของ $b-a$

(13) ถ้า $x-1$ หาร x^2+2a และ $x+2$ หาร $x+a$ แล้วเหลือเศษเท่ากัน ค่า a เป็นเท่าใด

(14) ถ้าหาร $x^4-x^3+3x^2-x-1$ และ $2x^3+x^2+75x+a$ ด้วย $x-5$ แล้วเหลือเศษเท่ากัน ค่า a เป็นเท่าใด

(15) ถ้า $x-2$ เป็นตัวประกอบร่วมของ $x^3-ax^2+\frac{a}{4}x+2b$ กับ $\frac{1}{a}x^2+x-b$ แล้ว ค่า $a+b$ เป็นเท่าใด

(16) ถ้า x^2-2x-3 เป็นตัวประกอบของ $x^4+ax^3+bx^2+3x+4$
และ x^2+x-2 เป็นตัวประกอบของ x^3+10x^2+cx+d แล้ว $a+b+c+d$ มีค่าเท่าใด

(17) ให้หา หรม. ของพหุนาม x^3-7x+6, $3x^3-7x^2+4$ และ x^4-3x^3+6x-4

(18) ให้หา ครน. ของพหุนาม x^3-2x^2-5x+6 และ $x^3+x^2-10x+8$

(19) แยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้ $3x^6-2x^5-64x^4+96x^3-27x^2+98x+40$

(20) ให้หาเซตคำตอบของสมการ $x^2+a^2b^2+2abx-b^2=0$

(20.1) เมื่อ a เป็นเอกลักษณ์การบวกในระบบจำนวนจริง

(20.2) เมื่อ b เป็นเอกลักษณ์การบวกในระบบจำนวนจริง

(20.3) เมื่อ a เป็นเอกลักษณ์การคูณในระบบจำนวนจริง

(20.4) เมื่อ b เป็นเอกลักษณ์การคูณในระบบจำนวนจริง

สมบัติของการไม่เท่ากัน

[1] บทนิยามของการมากกว่าและน้อยกว่า $a < b \leftrightarrow b - a \in \mathbb{R}^+$

$a > b \leftrightarrow a - b \in \mathbb{R}^+$

[2] สมบัติการถ่ายทอด (Transitive Property) $a > b \wedge b > c \rightarrow a > c$

[3] สมบัติการบวกและคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน $a > b \rightarrow a + c > b + c$

$a > b \rightarrow ac > bc, \quad c > 0$

$a > b \rightarrow ac < bc, \quad c < 0$

[4] กฎการตัดออกสำหรับการบวกและการคูณ $a + c > b + c \rightarrow a > b$

$ac > bc \rightarrow a > b, \quad c > 0$

$ac > bc \rightarrow a < b, \quad c < 0$

[5] สมบัติไตรวิภาค (Trichotomy Property)

ถ้า $a, b \in \mathbb{R}$ แล้ว $a = b$ หรือ $a < b$ หรือ $a > b$ อย่างใดอย่างหนึ่งเสมอ

[6] บทนิยามของการไม่มากกว่าและไม่น้อยกว่า

$a \leq b \leftrightarrow a$ ไม่มากกว่า b (น้อยกว่าหรือเท่ากับ)

$a \geq b \leftrightarrow a$ ไม่น้อยกว่า b (มากกว่าหรือเท่ากับ)

[7] การเปรียบเทียบสองด้าน

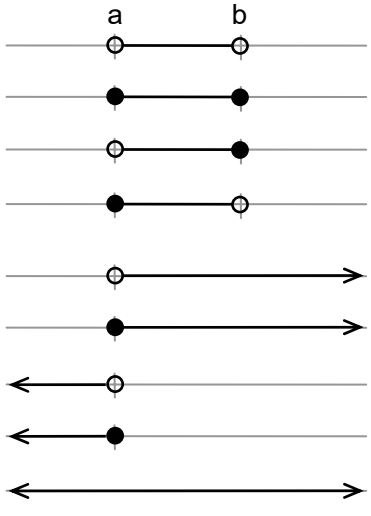
$a < b < c \leftrightarrow a < b$ และ $b < c$ $\quad$ $a \leq b \leq c \leftrightarrow a \leq b$ และ $b \leq c$

$a < b \leq c \leftrightarrow a < b$ และ $b \leq c$ $\quad$ $a \leq b < c \leftrightarrow a \leq b$ และ $b < c$

ช่วง และการแก้อสมการ

• *ช่วง* (Interval) คือเซตที่บอกสมาชิกด้วยขอบเขต

นิยมแสดงเป็นกราฟบน *เส้นจำนวน* (Number Line)



• ช่วงเปิด (a, b) หมายถึง $\{ x \mid a < x < b \}$

ช่วงปิด $[a, b]$ หมายถึง $\{ x \mid a \leq x \leq b \}$

ช่วงครึ่งเปิด $(a, b]$ หมายถึง $\{ x \mid a < x \leq b \}$

และช่วงครึ่งเปิด $[a, b)$ หมายถึง $\{ x \mid a \leq x < b \}$

• ช่วง (a, ∞) หมายถึง $\{ x \mid x > a \}$

ช่วง $[a, \infty)$ หมายถึง $\{ x \mid x \geq a \}$

ช่วง $(-\infty, a)$ หมายถึง $\{ x \mid x < a \}$

ช่วง $(-\infty, a]$ หมายถึง $\{ x \mid x \leq a \}$

และช่วง $(-\infty, \infty)$ หมายถึงเซตของจำนวนจริง $\mathbb{R}$

• *สมการ* (Equality) คือประโยคที่มีตัวแปรและกล่าวถึงการเท่ากัน การแก้สมการ คือการหาค่าของตัวแปรที่ทำให้ประโยคนั้นเป็นจริง อาจกล่าวว่าเป็นการหา “เซตคำตอบของสมการ” หรือการหา “รากของสมการ” ก็ได้ ส่วน *อสมการ* (Inequality) คือประโยคที่มีตัวแปรและกล่าวถึงการไม่เท่ากัน (ได้แก่ $>\ \geq\ <\ \leq$ หรือ $\neq$) การแก้อสมการ ก็คือการหาค่าของตัวแปรที่ทำให้ประโยคนั้นเป็นจริง ซึ่งอาจกล่าวว่าเป็นการหา “เซตคำตอบของอสมการ” ก็ได้เช่นกัน

• การแก้อสมการนั้นมีข้อควรระวัง ดังนี้

1. การบวกหรือลบทั้งสองข้องของอสมการ และการตัดออกสำหรับการบวก ทำได้เสมอ

2. การคูณหรือหารทั้งสองข้างของอสมการ ต้องระวังเรื่องการเปลี่ยนเครื่องหมาย

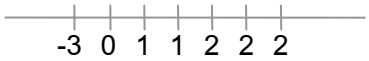
3. การกลับเศษเป็นส่วน การยกกำลังสองทั้งสองข้าง การคูณไขว้ เหล่านี้ต้องระวังเครื่องหมาย

• <u>*เทคนิคการหาช่วงคำตอบของอสมการพหุนาม*</u>

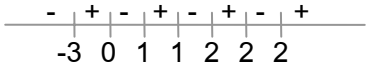
1. เมื่อแยกตัวประกอบเรียบร้อยแล้ว อสมการโดยทั่วไป (สมมติว่าเครื่องหมายเป็น $\geq$)

จะอยู่ในรูป $\dfrac{(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)\ldots}{(x-d_1)(x-d_2)\ldots} \geq 0$ เช่น $\dfrac{(x+3)(x-1)^2}{x(x-2)^3} \geq 0$

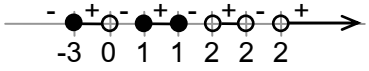
2. เขียนเส้นจำนวนและระบุตำแหน่งของ $c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, \ldots$ ให้ครบทุกตัว (เรียงตามลำดับน้อยไปมาก) และหากมีตัวประกอบใดอยู่หลายครั้ง ก็เขียนจุดเป็นจำนวนเท่านั้นครั้งด้วย เช่นในภาพ



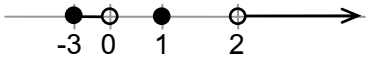
3. ใส่เครื่องหมาย +, -, +, - สลับกันไปในช่วงย่อยๆ บนเส้นจำนวน โดยเริ่มจากช่วงขวามือที่สุดเป็น + เสมอ



4. หากในอสมการเป็นเครื่องหมาย “มากกว่าศูนย์” ช่วงคำตอบจะเป็นช่วงเปิด ในช่วง +
หากเป็นเครื่องหมาย “น้อยกว่าศูนย์” ช่วงคำตอบจะเป็นช่วงเปิด ในช่วง –
โดยที่ถ้ามีเครื่องหมาย “เท่ากับศูนย์” อยู่ด้วย ช่วงคำตอบจะเปลี่ยนเป็นช่วงปิด
ทั้งนี้ต้องระวังเรื่องเศษส่วน ที่ตัวส่วนต้องไม่เป็นศูนย์ ($x \neq d_1, d_2, \ldots$)



5. จัดรูปคำตอบให้กระชับ (ยุบรวมจุดที่เป็นจุดเดียวกัน)
เช่น ในตัวอย่างนี้ตอบว่า $x \in [-3, 0) \cup \{1\} \cup (2, \infty)$



<u>*ข้อสังเกต*</u> หากมีจุดซ้ำกันเกิน 2 จุด (ยกกำลังมากกว่า 2) ถ้าเป็นกำลังคู่ให้เขียนจุดเพียง 2 จุด แต่ถ้าเป็นกำลังคี่ให้เขียนจุดเพียงจุดเดียว เนื่องจากในตอนท้าย ช่วงที่ได้ก็จะยุบรวมกันเสมอ

<u>สมบัติความบริบูรณ์</u> (The Axiom of Completeness)

• สมบัติความบริบูรณ์ เป็นสมบัติข้อสุดท้ายของระบบจำนวนจริง มีชื่ออีกอย่างหนึ่งว่า *สัจพจน์การมีค่าขอบเขตบนน้อยสุด* (Least Upper Bound Axiom)

• นิยาม *ค่าขอบเขตบน* คือค่าจำนวนจริงซึ่งไม่น้อยกว่าสมาชิกใดๆ ในเซตที่กำหนดให้ เช่น เซต $S = \{0, -1, -2, -3, -4, \dots\}$ มีค่าขอบเขตบนเป็น 0 หรือ 0.5 หรือ 1.8 หรืออื่นๆ เพราะค่าเหล่านี้ไม่น้อยกว่าสมาชิกใดใน S แต่ *ค่าขอบเขตบนน้อยสุด* ได้แก่ 0 เท่านั้น

• ค่าขอบเขตบนน้อยสุดของช่วง (a,b) และ $(a,b]$ และ $[a,b]$ คือค่า b
ค่าขอบเขตบนน้อยสุดของช่วง $(-\infty,b)$ และ $(-\infty,b]$ คือค่า b
ค่าขอบเขตบนน้อยสุดของช่วง (a,∞) และ $[a,\infty)$ และ $(-\infty,\infty)$ หาไม่ได้

• สมบัติข้อสุดท้ายของระบบจำนวนจริง กล่าวว่า "สับเซตใดๆ ของ $\mathbb{R}$ ถ้ามีขอบเขตบนแล้ว ค่าขอบเขตบนน้อยสุดจะยังอยู่ใน $\mathbb{R}$" ซึ่งสมบัติข้อนี้ในระบบจำนวนอื่นบางระบบ เช่น $\mathbb{Q}$ ไม่มี

โจทย์

(21) ข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

(21.1) ถ้า $(a-b)(b-c)(c-d) > 0$ แล้ว $a > b > c > d$

(21.2) ถ้า $a < b$ และ $n \in \mathbb{N}$ แล้ว $a^n < b^n$

(21.3) ถ้า $a > 0$ และ $b > 0$ แล้ว $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$

(21.4) ถ้า $a > 0$, $b > 0$ และ $a \neq b$ แล้ว $\frac{b}{a^2} + \frac{a}{b^2} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

(22) ถ้า $a < b < c$ แล้ว ข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

(22.1) $a < \frac{a+b}{2} < b$

(22.2) $a < \frac{a+b+c}{3} < c$

(22.3) $a^3 < b^3 < c^3$

(22.4) $ab < bc$

(23) ถ้า $-7 < x < 5$ และ $3 < y < 6$ แล้ว ค่าต่อไปนี้อยู่ในช่วงใด

(23.1) $x^2 - y$

(23.2) xy^2

(24) ถ้า $-6 < x < -2$ และ $2 < y < 3$ แล้ว ค่าต่อไปนี้อยู่ในช่วงใด

(24.1) xy

(24.2) $x - y$

(24.3) x/y

(25) ต้องการสร้างรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วให้มีเส้นรอบรูป 20 ซม. และความสูงไม่เกิน 5 ซม. ความยาวฐานควรเป็นเช่นไร

(26) ถ้า A และ B เป็นเซตคำตอบของอสมการ $4 \le 3x - 2 < 13$ และ $11 - x < 4x + 1 \le 2x + 7$ ตามลำดับแล้ว ในเซต $A \cap B'$ จะมีจำนวนเต็มเป็นเท่าใดบ้าง

(27) ถ้า m และ n คือจำนวนเต็มที่มากที่สุดและน้อยที่สุด ที่เป็นคำตอบของอสมการ $x^2 + 6x + 7 \le 0$ แล้ว $m - n$ เป็นเท่าใด

(28) ข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

ก. ผลบวกของค่าสัมบูรณ์ของคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มของ $20 - 3x - 2x^2 \ge 0$ คือ 13

ข. ค่าสัมบูรณ์ของผลบวกของคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มของ $3x^2 + 7x - 30 < 0$ คือ 7

(29) ถ้า m คือผลบวกจำนวนเต็ม ที่เป็นคำตอบของ $21+5x-6x^2 \geq 0$
และ n คือผลบวกจำนวนเต็ม ที่ไม่เป็นคำตอบของ $3x^2-1 > 1+x-3x^2$ แล้วให้หา $m+n$

(30) กำหนด a และ b เป็นจำนวนเต็มที่มากที่สุดและน้อยที่สุด ซึ่งไม่เป็นคำตอบของอสมการ $2x^2+4x-5>0$ ตามลำดับ แล้วข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

(30.1) $\{ab\} \subset \{a,b\}$ (30.2) $\{a+b\} \subset \{a,b\}$

(31) ถ้าพหุนาม x^3+a^2x-a-2 หารด้วย $x-1$ แล้วเหลือเศษมากกว่า 5 ค่า a เป็นเท่าใดได้บ้าง

(32) จงหา

(32.1) เซตคำตอบของอสมการ $\dfrac{x(x-1)(x-2)}{(x+1)(x-2)} < 0$

(32.2) เซต $(A' \cap B')'$ เมื่อ A เป็นเซตคำตอบของ $(x+2)(x-3)(x-1)^4 < 0$ และ B เป็นเซตคำตอบของ $(x+4)(x-3)(x+2)^3 \geq 0$

(32.3) ผลบวกค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มใน $\{ x \mid \dfrac{(x+4)(x+1)(x-2)^3}{x(x-5)^2} \geq 0 \}'$

(33) ให้หาเซตคำตอบของ $x^3-x^2-4x+4 \geq 0$

(34) ถ้า A เป็นเซตคำตอบของ $x^3+2x^2 \leq 5x+6$ และ $B=(-5,\infty)$ แล้ว ผลบวกของจำนวนเต็มใน $A \cap B$ เป็นเท่าใด

(35) ให้หาเซตคำตอบของอสมการต่อไปนี้

(35.1) $\dfrac{1}{x-1} < \dfrac{2}{3x-1}$

(35.2) [Ent'29] $\dfrac{4}{x-2} \geq \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$

(36) ถ้า A เป็นเซตคำตอบของ $\dfrac{2x-5}{x+2} \geq 0$ และ B เป็นเซตคำตอบของ $\dfrac{2x-1}{x+5} < 1$ แล้ว ให้หาผลบวกของจำนวนเต็มที่มากที่สุดกับจำนวนเต็มที่น้อยที่สุด ในเซต $B \cap A'$

(37) [Ent'38] ให้ S เป็นเซตคำตอบของ $\dfrac{x-1}{x+2} > 2$ และ a เป็นขอบเขตบนน้อยสุดของ S แล้ว ค่าของ a^2+1 เป็นเท่าใด

(38) ให้หาขอบเขตบนน้อยสุดของแต่ละเซตที่กำหนดให้

(38.1) $\{ x \mid x^2 < 7 \}$ (38.3) $(-2,6] \cup [3,8)$

(38.2) $\{1,5,7,9\} \cup [6,\infty)$ (38.4) $\{ x = 2n \mid n \in \mathbb{I} \}$

(39) ถ้า a เป็นขอบเขตบนน้อยสุดของ $A = \{ x \mid x = \dfrac{n}{n+1}, n \in \mathbb{I}^+ \}$

และ b เป็นขอบเขตล่างมากสุดของ $B = \{ x \mid x = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{I}^- \}$ แล้ว ให้หาค่า $a+b$

(40) ให้หาผลบวกของค่าขอบเขตบนน้อยสุด และค่าขอบเขตล่างมากสุด ของเซตคำตอบของอสมการ $\sqrt{2x^2-5x+2} < \sqrt{5}$

<u>ค่าสัมบูรณ์</u> (Absolute Value หรือ Modulus)

• "*ค่าสัมบูรณ์* ของจำนวนจริง a" ใช้สัญลักษณ์ว่า $|a|$

ค่าสัมบูรณ์มีความหมายเชิงเรขาคณิต คือ $|a|$ เท่ากับระยะห่างระหว่างจุดที่แทน a กับจุด 0 และ $|a-b|$ เท่ากับระยะห่างระหว่างจุดที่แทน a กับจุดที่แทน b

ดังนั้น นิยามของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริงเป็นดังนี้ $\boxed{|a| = \begin{cases} a & , a \geq 0 \\ -a & , a < 0 \end{cases}}$

• นิยามเหล่านี้ ทำให้สรุปทฤษฎีได้หลายอย่าง เช่น

[1] ค่าสัมบูรณ์ต้องไม่น้อยกว่าศูนย์ $\boxed{|a| \geq 0 \text{ เสมอ}}$

[2] ค่าสัมบูรณ์ไม่คำนึงถึงเครื่องหมายลบ $\boxed{|a| = |-a|}$ $\boxed{|a-b| = |b-a|}$

[3] ค่าสัมบูรณ์กระจายได้ สำหรับการคูณ $\boxed{|ab| = |a||b|}$ $\boxed{|a^n| = |a|^n}$

[4] ค่าสัมบูรณ์กระจายได้ สำหรับการหาร $\boxed{\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}}$ โดย $b \neq 0$

[5] ยกกำลังด้วยเลขคู่ไม่ต้องใส่ค่าสัมบูรณ์ $\boxed{|a^2| = |a|^2 = a^2}$

[6] ค่าสัมบูรณ์กระจาย<u>ไม่ได้</u> สำหรับการบวกลบ $\boxed{|a+b| \leq |a| + |b|}$ $\boxed{|a-b| \geq ||a| - |b||}$

* [7] รากที่ n ของกำลัง n $\boxed{\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & , \ n = \text{even} \\ a & , \ n = \text{odd} \end{cases}}$

• ทฤษฎีที่ช่วยแก้สมการและอสมการ ที่มีค่าสัมบูรณ์

* [1] สมการ $|x| = b$ และสมการ $|x| = |b|$

มีความหมายเดียวกับสมการ $x^2 = b^2$ (ยกกำลังสองทั้งสองข้างได้)

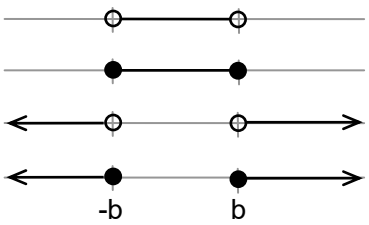
และยังสรุปได้ว่า "$x = b$ หรือ $x = -b$" ด้วย (วิธีนี้สะดวกกว่าการยกกำลังสอง)

* [2] อสมการ $|x| < b$ ความหมายเดียวกับ $-b < x < b$

อสมการ $|x| \leq b$ ความหมายเดียวกับ $-b \leq x \leq b$

อสมการ $|x| > b$ ความหมายเดียวกับ "$x < -b$ หรือ $x > b$"

อสมการ $|x| \geq b$ ความหมายเดียวกับ "$x \leq -b$ หรือ $x \geq b$"

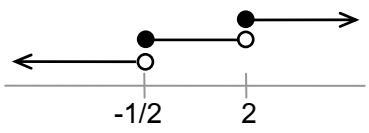


• *<u>เทคนิคการหาคำตอบของสมการและอสมการ ที่มีค่าสัมบูรณ์หลายพจน์</u>*

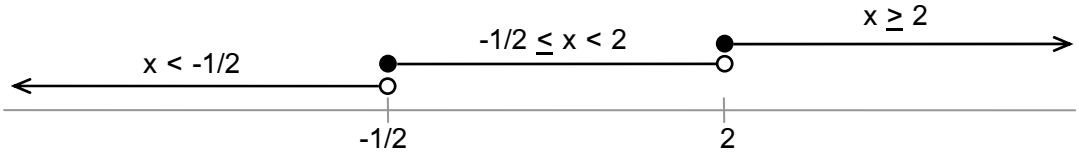
1. กำหนดจุดที่ทำให้ค่าสัมบูรณ์แต่ละพจน์เป็นศูนย์ ลงบนเส้นจำนวนให้ครบทุกจุดเรียงตามค่าน้อยไปมาก เช่นสมการ $|2x+1| - |x-2| = x+3$ ... มีค่าสัมบูรณ์อยู่ 2 พจน์ ก็กำหนดจุดบนเส้นจำนวน 2 จุด

เส้นจำนวนที่ได้จะถูกแบ่งเป็นช่วงย่อยๆ ซึ่งใช้เป็นเงื่อนไขของค่า x เช่นในตัวอย่างนี้จะมีช่วง $x < 1/2$, $1/2 \leq x < 2$, และ $x \geq 2$

(สังเกต : ค่าเท่ากับ จะอยู่รวมกับค่ามากกว่า, ตามนิยาม)

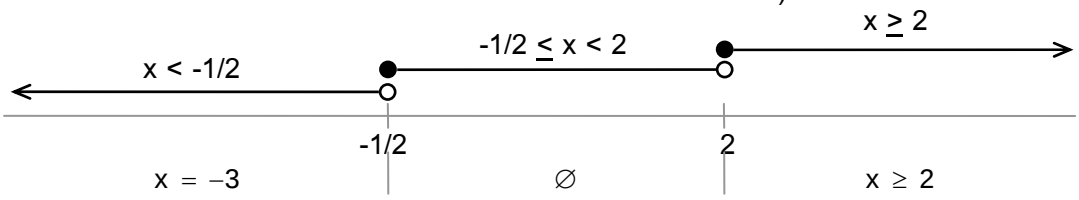


2. ในแต่ละช่วงย่อย สมการจะถอดเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ทิ้งได้ โดยให้ดูว่าถ้าช่วงนั้นยังน้อยกว่าจุดที่ทำให้พจน์นั้นเป็นศูนย์ ก็จะต้องถอดแล้วติดลบ แต่ถ้ามากกว่าจุดที่ทำให้เป็นศูนย์แล้วก็ถอดได้เลยไม่ต้องเปลี่ยนเครื่องหมายใดๆ ... ดังตัวอย่างนี้มี 3 ช่วง จะได้สมการ 3 แบบคือ



$(-2x-1)-(-x+2)=x+3$	$(2x+1)-(-x+2)=x+3$	$(2x+1)-(x-2)=x+3$
$-x-3=x+3$	$3x-1=x+3$	$x+3=x+3$
$x=-3$	$x=2$	$0=0$

3. นำคำตอบที่ได้ของแต่ละช่วง ไปตรวจสอบกับเงื่อนไข (อินเตอร์เซคกับเงื่อนไข) แล้วจึงรวมผลที่ได้เข้าด้วยกันเพื่อเป็นคำตอบที่แท้จริงของสมการ (ยูเนียนกันได้ทันที)
(สังเกต : หากแก้สมการแล้วได้ผลเป็น $0=0$ หรือประโยคอื่นๆ ที่เป็นจริงเสมอ เช่น $3\geq 0$ แสดงว่าช่วงย่อยนั้นเป็นคำตอบได้ทั้งหมด แต่ถ้าแก้สมการแล้วได้ผลเป็นประโยคที่เป็นเท็จ เช่น $1=0$ หรือ $3\leq 0$ แสดงว่าช่วงย่อยนั้นไม่มีค่าใดเป็นคำตอบเลย)



ตัวอย่างนี้คำตอบที่ได้คือ $x\in\{-3\}\cup[2,\infty)$

<u>โจทย์</u>

(41) ข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

(41.1) ถ้า $n\in\mathbb{I}^+$ และ $n>1$ จะได้ $\sqrt[n]{a^n}=|a|$

(41.2) ถ้า $a,b>0$ แล้ว $|a-b|=|a|-|b|$

(42) ให้หาค่าของจำนวนจริง m ที่น้อยที่สุดที่ทำให้

(42.1) $|4x+0.5|<m$ เมื่อ $-3<2x-1<0.5$

(42.2) $\left|\frac{x-2}{x}+5\right|<m$ เมื่อ $x\in(2,6)$

(42.3) $|x^2-25|<m$ เมื่อ $|x+5|<6$

(43) ถ้า $|x-1|<5$ และ $|y-2|<4$ แล้ว $|x+y|$ มีค่าอยู่ในช่วงใด

(44) ให้หาคำตอบของสมการต่อไปนี้

(44.1) $x^2-6|x|+8=0$

(44.2) $|x-1|+|x+1|=2$

(44.3) [Ent'30] $|x-4|+|x-3|=1$

(45) ถ้า A เป็นเซตคำตอบของสมการ $|2+3x| = 2+3|x|$
และ B เป็นเซตคำตอบของสมการ $|2+3x| = 2+3x$ แล้วให้หาเซต $A \cap B'$

(46) ให้หาผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการ $|8(x+2)^2| - |14(x+2)| + 3 = 0$

(47) ถ้า $A = \{ x \in \mathbb{I} \mid |x^2+3x+3| = |2x+3| \}$ และ $B = \{ x \in \mathbb{I} \mid \left|\frac{5-3x}{x+2}\right| = 2 \}$
แล้ว ให้หาค่า a^2+b^2 เมื่อ a, b เป็นค่าขอบเขตบนน้อยสุด และค่าขอบเขตล่างมากสุด ของ $A \cup B$

(48) ให้หาคำตอบทั้งหมดของสมการ $(\sqrt{|x|})^{x^2} = x^3$

(49) ให้หาคำตอบของอสมการต่อไปนี้

(49.1) $|2x-1| < 3x+2$

(49.2) $3 < |x-2| < 6$

(49.3) $x + \frac{1}{|x|} > 0$ และ $x^2 - x - 2 > 0$

(49.4) $\frac{3}{|x-1|-2} \le x$

(49.5) $\frac{|x|}{|x|-1} \le 2$

(50) ถ้า A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\left|\frac{x+2}{2}\right| + x \le 4$
และ B เป็นเซตคำตอบของอสมการ $x < |x-7|$ แล้วให้หาเซต $(A \cap B)'$

(51) ถ้า $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{|4x+5|}{2} \le 5 \}$ แล้วข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

(51.1) ถ้า $a, b \in A$ แล้ว $(a+b)/2 \in A$

(51.2) ถ้า a, b เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุด และขอบเขตล่างค่ามากสุดของ A แล้ว $a+b \in A$

(52) ถ้า $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x^2-2| < 14 \}$ และ $B = \{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{x} - 1 > 0 \}$
แล้ว มีจำนวนเต็มใน $A \cap B'$ กี่จำนวน

(53) ให้หาค่า a, b, c ชุดที่เป็นจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่ทำให้

(53.1) $-4 < x < 1$ เป็นคำตอบของอสมการ $|ax+b| < c$

(53.2) $x < -10$ หรือ $x > 8$ เป็นคำตอบของอสมการ $|ax+b| > c$

(54) ให้หาคำตอบของอสมการต่อไปนี้

(54.1) $|3x+2| < |4x+1|$

(54.2) $\left|\frac{x-2}{x+1}\right| < 2$

(54.3) $|x-7| < 5 < |5x-25|$

(54.4) $|x-1|+|x-3|<|x-5|$

(54.5) $\left|\frac{x^2-5x-4}{x^2+x-2}\right| \geq 1$

* (55) ให้หาคำตอบของอสมการ $||x|-3|<|x-2|$

(56) ให้หาค่า x ที่ทำให้

(56.1) $(1-|x|)(1+x)$ เป็นจำนวนจริงบวก

(56.2) $(1-|x|)(1+x)$ เป็นจำนวนจริงลบ

<u>สมบัติของจำนวนเต็มกับการหาร</u>

[1] บทนิยามของการหารจำนวนเต็มลงตัว

สัญลักษณ์ที่ใช้แทนประโยค "m หารด้วย n ลงตัว" คือ $n|m$

เรียก m ว่า *ตัวตั้ง* (Dividend) และเรียก n ว่า *ตัวหาร* (Divisor)

สำหรับจำนวนเต็ม m,n โดยที่ $n\neq 0$ จะได้ว่า $n|m$ ก็ต่อเมื่อ $m=nq$ และ $q\in\mathbb{I}$

[1.1] สมบัติการถ่ายทอด ถ้า $a|b$ และ $b|c$ แล้ว $a|c$

[1.2] ตัวหารที่ลงตัวย่อมน้อยกว่า ถ้า $a|b$ แล้ว $a\leq b$ เสมอ

[1.3] การหารผลรวมเชิงเส้นลงตัว ถ้า $a|b$ และ $a|c$ แล้ว $a|(bx+cy)$

"*ผลรวมเชิงเส้น* (Linear Combination) ของ b กับ c" คือจำนวนในรูป $bx+cy$ ซึ่ง $x,y\in\mathbb{I}$

[2] บทนิยามของการหารจำนวนเต็มใดๆ

สำหรับจำนวนเต็ม m,n โดยที่ $n\neq 0$ จะได้ว่า $m=nq+r$ และ $q\in\mathbb{I},\ 0\leq r\leq|n|$

มีจำนวนเต็ม q,r ชุดเดียวเท่านั้น เรียก q ว่า *ผลหาร* (Quotient) และ *เศษ* (Remainder) r

[3] บทนิยามของ *จำนวนเฉพาะ* (Prime Numbers)

"จำนวนเฉพาะ p คือจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ $0,1,-1$ และมีจำนวนเต็มที่ไปหาร p ลงตัวเพียงแค่ $1,-1,p,-p$ เท่านั้น" เช่น $\pm2,\pm3,\pm5,\pm7,\pm11,\ldots\ldots$ จำนวนเต็มอื่นๆ ที่ไม่ใช่จำนวนเฉพาะและไม่ใช่ $0,1,-1$ จัดเป็น *จำนวนประกอบ* (Composite Numbers)

[3.1] หลักการมีตัวประกอบชุดเดียว

"ทุกจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 จะเขียนในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะบวก ได้แบบเดียว"

[3.2] จำนวนเฉพาะกับการหารลงตัว ถ้า $p|mn$ แล้ว $p|m$ หรือ $p|n$

[4] บทนิยามของ *จำนวนคู่* (Even Numbers) และ *จำนวนคี่* (Odd Numbers)

"จำนวนคู่ คือจำนวนที่เขียนได้ในรูป $2n$ เมื่อ $n\in\mathbb{I}$"

"จำนวนคี่ คือจำนวนที่เขียนได้ในรูป $2n+1$ เมื่อ $n\in\mathbb{I}$"

[5] บทนิยามของ ตัวหารร่วมมาก (ห.ร.ม.) และตัวคูณร่วมน้อย (ค.ร.น.)

"d เป็น ห.ร.ม. ของ a กับ b ก็เมื่อ $d \mid a$ และ $d \mid b$ และถ้ามี $n \mid a$ และ $n \mid b$ แล้ว $n \mid d$"

สัญลักษณ์ที่ใช้แทน ห.ร.ม. ของ a กับ b ที่เป็นบวก คือ (a,b)

"c เป็น ค.ร.น. ของ a กับ b ก็เมื่อ $a \mid c$ และ $b \mid c$ และถ้ามี $a \mid n$ และ $b \mid n$ แล้ว $c \mid n$"

สัญลักษณ์ที่ใช้แทน ค.ร.น. ของ a กับ b ที่เป็นบวก คือ $[a,b]$

[5.1] ห.ร.ม. คูณกับ ค.ร.น. $\boxed{(a,b)\times[a,b] = a\times b \text{ เสมอ}}$

[5.2] ห.ร.ม. ของผลหาร $\boxed{\text{ถ้า } d=(a,b) \text{ แล้ว } (a/d, b/d) = 1}$

[5.3] ขั้นตอนวิธีการหา ห.ร.ม. ของยุคลิด

การหา ห.ร.ม. ของ a กับ b จะเริ่มโดยเขียน a กับ b ในรูปการหาร แล้วนำเศษที่ได้ไปหารต่อๆ ไป คือ $a = bq_1 + r_1$ ... $b = r_1q_2 + r_2$ ... $r_1 = r_2q_3 + r_3$ ... $r_2 = r_3q_4 + r_4$ ... ทำไปเรื่อยๆ จนกว่าจะหารลงตัว (เศษเป็น 0) จะได้ว่า ห.ร.ม. เท่ากับ เศษตัวสุดท้าย (r_k)

เช่น ต้องการหาค่า ห.ร.ม. ของ 65 กับ 12 จะมีขั้นตอนการหาดังนี้

$(65) = (12)5 + (5)$ $(12) = (5)2 + (2)$ $(5) = (2)2 + (1)$ $(2) = (1)2$

ดังนั้น ห.ร.ม. คือ 1 (เพราะ 1 คือเศษตัวสุดท้าย ที่ทำให้การหารนั้นลงตัว)

<u>หมายเหตุ</u> ถ้า $(m,n) = 1$ จะเรียก m และ n เป็น *จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์* (Relative Primes)

<u>โจทย์</u>

(57) เศษของการหาร $(19)^3(288)^2$ ด้วย 5 เป็นเท่าใด

(58) ให้หา ห.ร.ม. ของ 252 กับ 34 และเขียนในรูปผลรวมเชิงเส้น $d = 252x + 34y$ เมื่อ x, y เป็นจำนวนเต็ม

(59) ให้หา ห.ร.ม. ของ -504 กับ -38 และเขียนในรูปผลรวมเชิงเส้นด้วย

(60) ถ้า ห.ร.ม. และ ค.ร.น. ของ x กับ 128 เป็น 16 และ 384 แล้วค่า x เป็นเท่าใด

(61) ให้ x, y เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $x < y$ ถ้า $(x,y) = 9$, $[x,y] = 28215$ และจำนวนเฉพาะที่หาร x ลงตัวมี 3 จำนวน แล้ว x, y มีค่าเท่าใด

(62) [Ent'38] ให้ x, y เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $80 < x < 200$ และ $x = pq$ เมื่อ p, q เป็นจำนวนเฉพาะซึ่งไม่เท่ากัน ถ้า x, y เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ และมี ค.ร.น. เป็น 15015 แล้วค่า y เป็นเท่าใดได้บ้าง

<u>เฉลย</u>

(1) ผิดทุกข้อ (2) ข้อ (2.3) ถูก นอกนั้นผิด (3) ง. (4) ข้อ (4.1) และ (4.3) ถูก (5) ถูกทุกข้อ (6) ง. (7) $\sqrt{6}+\sqrt{5}$ และ 1 (8) ค. (9) ง. (10) เท่ากัน (11.1) ผิด (11.2) ถูก (12) 1 (13) -3 (14) -81 (15) $4+3$ (16) $-155/9$ (17) $(x-1)(x-2)$ (18) $(x-1)(x-2)(x-3)(x+2)(x+4)$ (19) $(x-2)(x-4)(x+5)(3x+1)(x^2+1)$

(20.1) $\{b,-b\}$ (20.2) $\{0\}$ (20.3) $\{0,-2b\}$ (20.4) $\{-a-1,-a+1\}$ (21) ข้อ (21.1) และ (21.2) ผิด (22) ข้อ (22.4) ผิด นอกนั้นถูก (23.1) $(-41,22)$ (23.2) $(-252,180)$ (24.1) $(-18,-4)$ (24.2) $(-9,-4)$ (24.3) $(-3,-2/3)$ (25) อยู่ในช่วง $[7.5,20)$ ซม. (26) $2,4$ (27) 2 (28) ถูกทุกข้อ (29) $(-1+0+1+2)+(0)$ (30) ถูกทุกข้อ (31) $a \in (-\infty,-2) \cup (3,\infty)$ (32.1) $(-\infty,-1) \cup (0,1)$ (32.2) $[-4,\infty) - \{1\}$ (32.3) $|1|+|-2|+|-3|+|5|+|0| = 11$ (33) $[-2,1] \cup [2,\infty)$ (34) -5 (35.1) $(-\infty,-1) \cup (1/3,1)$ (35.2) $(2,8]$ (36) 0 (37) 5 (38.1) $\sqrt{7}$ (38.2) ไม่มี (38.3) 8 (38.4) ไม่มี (39) 0 (40) $5/2$ (41) ผิดทุกข้อ (42.1) $7/2$ (42.2) 7 (42.3) 96 (43) $[0,12)$ (44.1) $2,-2,4,-4$ (44.2) $[-1,1]$ (44.3) $[3,4]$ (45) $\varnothing$ (46) -8 (47) 90 (48) $1,\sqrt{6}$ (49.1) $(-1/5,\infty)$ (49.2) $(-4,-1) \cup (5,8)$ (49.3) $(-1,2) - \{0\}$ (49.4) $[-1,\infty) - \{3\}$ (49.5) $(-\infty,-2] \cup (-1,1) \cup [2,\infty)$ (50) $(2,\infty)$ (51) ถูกทุกข้อ (52) 7 (53.1) $2,3,5$ (53.2) $1,1,9$ (54.1) $(-\infty,-3/7) \cup (1,\infty)$ (54.2) $(-\infty,-4) \cup (0,\infty)$ (54.3) $(2,4) \cup (6,12)$ (54.4) $(-1,3)$ (54.5) $(-\infty,-1] \cup [-1/3,3] - \{1,2\}$ (55) $(-\infty,-1/2) \cup (5/2,\infty)$ (56.1) $(-\infty,-1) \cup (-1,1)$ (56.2) $(1,\infty)$ (57) 1 (58) $2 = (252)(5) + (34)(-37)$ (59) $2 = (-504)(-4) + (-38)(53)$ (60) 48 (61) $495, 513$ (62) $105, 165$

ตรรกศาสตร์ (Logic)

• ตรรกศาสตร์เป็นวิชาเกี่ยวกับการใช้เหตุผลเพื่อวิเคราะห์ค่าความจริง ความเข้าใจในตรรกศาสตร์เบื้องต้นจะช่วยให้ศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ได้อย่างมีเหตุผล

ประพจน์, การเชื่อมประพจน์, และค่าความจริงของประพจน์

• ประโยคทุกประโยคที่มี *ค่าความจริง* (Truth Value) เป็นจริงหรือเป็นเท็จอย่างใดอย่างหนึ่ง เราจะเรียกว่า *ประพจน์* (Proposition หรือ Statement) ดังนั้นประพจน์อาจเป็นประโยคบอกเล่าประโยคปฏิเสธ เช่น “เมื่อวานฝนตกที่บางกะปิ”, “1 มากกว่า 2”, “เก่งไม่ใช่คนร้าย” เหล่านี้ถือเป็นประพจน์ เพราะสามารถให้ค่าความจริงกำกับว่าเป็นจริงหรือเป็นเท็จได้ แต่ประโยคคำถาม ประโยคคำสั่ง ขอร้อง ประโยคแสดงความปรารถนา ประโยคอุทาน เหล่านี้ไม่ใช่ประพจน์เพราะไม่สามารถให้ค่าความจริงได้ เช่น “กรุณางดใช้เสียง”, “ใครเป็นคนทำแก้วแตก”, “อยากไปเที่ยวหัวหินจังเลย” หรือ “โอ้โห วิเศษไปเลยจอร์จ”

• สัญลักษณ์ที่ใช้แทนประพจน์ต่างๆ เป็นตัวอักษรเล็ก เช่น p, q, r โดยแต่ละประพจน์จะมีค่าความจริงที่เป็นไปได้ 2 แบบเท่านั้น คือเป็น *จริง* (True; T) หรือเป็น *เท็จ* (False; F)

• ในชีวิตประจำวันรวมทั้งในวิชาคณิตศาสตร์ เรามักพบการเชื่อมประโยค (ประพจน์) ด้วยตัวเชื่อม (Connectives)... *และ* (and), *หรือ* (or), *ถ้า-แล้ว* (if-then), *ก็ต่อเมื่อ* (if and only if) และยังพบการเติมคำว่า *ไม่* (not) ด้วย... ซึ่งการเชื่อมแต่ละแบบ ส่งผลต่อค่าความจริงดังตาราง

หมายเหตุ **1.** เครื่องหมาย $\sim$ เรียกว่า *นิเสธ* (Negation) ใช้เพื่อกลับค่าความจริงให้เป็นตรงข้าม

2. ตารางที่แสดงค่าที่เป็นไปได้ครบทุกแบบดังนี้ เรียกว่า *ตารางค่าความจริง* (Truth Table) เช่น ถ้ามี 1 ประพจน์จะเป็นไปได้ 2 แบบ, ถ้ามี 2 ประพจน์ เป็นไปได้ 4 แบบ, หรือ 2^n นั่นเอง

p	q	p และ q $(p \wedge q)$	p หรือ q $(p \vee q)$	ถ้า p แล้ว q $(p \to q)$	p ก็ต่อเมื่อ q $(p \leftrightarrow q)$	ไม่ p $(\sim p)$
T	T	$\boxed{T}$	T	T	T	F
T	F	F	T	$\boxed{F}$	F	F
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	$\boxed{F}$	T	T	T

ข้อสังเกต **1.** การเชื่อมด้วย *และ* มีกรณีเดียวที่เป็นจริง คือ $T \wedge T$ การเชื่อมด้วย *หรือ* มีกรณีเดียวที่เป็นเท็จ คือ $F \vee F$ การเชื่อมด้วย *ถ้า-แล้ว* มีกรณีเดียวที่เป็นเท็จ คือ $T \to F$ ส่วนการเชื่อมด้วย *ก็ต่อเมื่อ* ถ้าค่าความจริงเหมือนกันจะให้ผลเป็นจริง ต่างกันจะให้ผลเป็นเท็จ

2. ตัวเชื่อมทั้งสี่นี้ มีเพียง *ถ้า-แล้ว* ที่ไม่สามารถสลับที่ประพจน์ได้

• หากรูปแบบของประพจน์ใดให้ค่าความจริงเป็นจริงเสมอทุกๆ กรณี (สร้างตารางค่าความจริงแล้วพบว่าเป็นจริงทุกแบบ) เราเรียกรูปแบบนั้นว่าเป็น *สัจนิรันดร์* (Tautology)

• การตรวจสอบรูปแบบประพจน์ว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ นอกจากจะใช้วิธีเขียนตารางค่าความจริงให้ครบทุกกรณีแล้ว ยังสามารถใช้ "วิธีพยายามทำให้เป็นเท็จ" ได้ด้วย คือหากพยายามทำให้รูปแบบนั้นเป็นเท็จไม่ได้เลย รูปแบบนั้นก็จะเป็นสัจนิรันดร์ แต่ถ้าทำเป็นเท็จได้แม้เพียงกรณีเดียว รูปแบบนั้นย่อมไม่ใช่สัจนิรันดร์

• ส่วนรูปแบบประพจน์ 2 รูปแบบใดๆ ที่ให้ค่าความจริงตรงกันทุกๆ กรณี จะกล่าวว่ารูปแบบทั้งสอง *สมมูลกัน* (Equivalent) (แปลว่า สามารถใช้แทนกันได้) สัญลักษณ์ที่ใช้แสดงการสมมูลกัน คือ $\equiv$ (ขีดสามขีด)

ข้อสังเกต ถ้า $\square \equiv \triangle$ แล้ว จะได้ว่า $\square \rightarrow \triangle$ เป็นสัจนิรันดร์ และ $\square \leftrightarrow \triangle$ ก็เป็นสัจนิรันดร์

รูปแบบประพจน์ที่สมมูลกัน (ที่ควรทราบ) ได้แก่

• การแจกแจง

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

• การเปลี่ยนตัวเชื่อม

$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

• การเติมนิเสธ

$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

$\sim (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

$\sim (p \leftrightarrow q) \equiv \sim p \leftrightarrow q \equiv p \leftrightarrow \sim q$

ข้อสังเกต ตัวเชื่อม *และ* มีสมบัติคล้ายอินเตอร์เซคชันของเซต ตัวเชื่อม *หรือ* มีสมบัติคล้ายยูเนียนของเซต และนอกจากนั้น *นิเสธ* ก็มีสมบัติคล้ายคอมพลีเมนต์ของเซต

โจทย์

(1) ให้เติมค่าความจริงหรือประพจน์ที่เหมาะสม ลงในช่องว่าง เมื่อ p เป็นประพจน์ใดๆ

$T \wedge p \equiv$	$T \vee p \equiv$	$T \rightarrow p \equiv$	$T \leftrightarrow p \equiv$
$F \wedge p \equiv$	$F \vee p \equiv$	$F \rightarrow p \equiv$	$F \leftrightarrow p \equiv$
$p \wedge p \equiv$	$p \vee p \equiv$	$p \rightarrow T \equiv$	$p \leftrightarrow p \equiv$
$p \wedge \sim p \equiv$	$p \vee \sim p \equiv$	$p \rightarrow F \equiv$	$p \leftrightarrow \sim p \equiv$
		$p \rightarrow p \equiv$	
		$p \rightarrow \sim p \equiv$	

(2) กำหนดให้ p, r เป็นจริง และ q เป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของ

(2.1) $[(p \wedge s) \vee (p \wedge r)] \rightarrow (p \vee s)$

(2.2) $[(q \rightarrow s) \vee r] \vee [(q \leftrightarrow s) \wedge r]$

(2.3) $[(r \leftrightarrow q) \vee (p \rightarrow q)] \rightarrow (p \wedge \sim q)$

(2.4) $[(p \leftrightarrow q) \vee (q \rightarrow r)] \vee \sim s$

(2.5) $[(q \rightarrow p) \wedge r] \leftrightarrow \sim(\sim r)$

(2.6) $[(p \wedge q) \rightarrow \sim r] \rightarrow [(\sim p \vee q) \leftrightarrow r]$

(2.7) $[(p \wedge \sim q) \vee \sim r] \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (\sim q \rightarrow r)]$

(2.8) $[(p \wedge q) \wedge \sim r] \wedge [(r \vee \sim s) \wedge (\sim p \vee \sim q)]$

(2.9) $[p \rightarrow (q \wedge r)] \wedge [(q \rightarrow p) \vee r]$

(2.10) $[q \rightarrow (p \vee r)] \rightarrow [p \rightarrow (q \wedge \sim r)]$

(2.11) $[(\sim p \rightarrow \sim q) \wedge (\sim r \rightarrow \sim s)] \vee [(\sim p \rightarrow r) \wedge (s \rightarrow \sim q)]$

(3) จงหาค่าความจริงของรูปแบบประพจน์ต่อไปนี้

(3.1) $(p \vee \sim q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ เมื่อ q เป็นจริง

(3.2) $(p \vee \sim q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ เมื่อ p เป็นเท็จ

(3.3) $(\sim r \wedge p) \vee (\sim (r \vee s) \wedge (r \vee \sim q))$ เมื่อ p, q เป็นจริง และ r, s เป็นเท็จ

(3.4) $(p \rightarrow q) \wedge (s \rightarrow p) \wedge (s \rightarrow q)$ เมื่อ p, r, $r \rightarrow q$ เป็นจริง

(3.5) $(\sim q \wedge (p \vee r)) \rightarrow (\sim r)$ เมื่อ $p \rightarrow q$ เป็นเท็จ, $q \vee r$ เป็นจริง

(3.6) $n \rightarrow [(m \vee q) \rightarrow \sim s]$ เมื่อ $q \rightarrow n$ เป็นเท็จ

(3.7) $(p \vee r) \wedge q$ เมื่อ $p \rightarrow q$ เป็นเท็จ, $q \vee r$ เป็นจริง

(3.8) $(q \vee p) \rightarrow (r \wedge s)$ เมื่อ $(p \rightarrow q) \wedge (r \vee s)$ เป็นจริง, $q \vee s$ เป็นเท็จ

(3.9) $r \rightarrow s$ เมื่อ $(p \vee r) \rightarrow (q \vee s)$ เป็นเท็จ, $p \rightarrow q$ เป็นจริง

(3.10) $(p \vee r) \rightarrow \sim q$ เมื่อ $(p \wedge \sim r) \rightarrow (p \rightarrow q)$ เป็นเท็จ

(3.11) p, q, r เมื่อ $(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow r)$ เป็นเท็จ

(3.12) r เมื่อ $p \wedge (p \leftrightarrow \sim r) \wedge (q \rightarrow r)$ เป็นจริง

(3.13) $((p \wedge \sim q) \rightarrow \sim p) \rightarrow (p \rightarrow q)$

(3.14) $\left[[p \vee \sim (r \wedge s)] \wedge \sim p\right] \rightarrow (\sim r \vee \sim s)$

(4) กำหนดให้ $[(p \rightarrow q) \wedge (p \vee r)] \rightarrow (s \rightarrow r)$ เป็นเท็จ ข้อใดถูกหรือผิดบ้าง

ก. $[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \vee (r \leftrightarrow s)$ เป็นเท็จ

ข. $[(\sim p \wedge q) \rightarrow (\sim q \wedge r)] \rightarrow (\sim r \wedge s)$ เป็นจริง

(5) ถ้า $[(p \leftrightarrow q) \rightarrow (r \vee \sim s)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงพิจารณาว่ารูปแบบประพจน์ในข้อใดมีค่าความจริงเหมือนกับ $[(\sim p \wedge r) \rightarrow (q \vee \sim s)]$ บ้าง

ก. $\sim (p \wedge s) \rightarrow \sim r$ ข. $r \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$ ค. $(s \rightarrow r) \vee (p \rightarrow q)$

(6) ถ้า p สมมูลกับ q และ r ไม่สมมูลกับ s พิจารณาข้อความใดถูกหรือผิดบ้าง

ก. $[(p \leftrightarrow \sim q) \vee (r \leftrightarrow \sim s)] \leftrightarrow [(\sim p \wedge q) \vee (\sim r \vee \sim s)]$ เป็นเท็จ

ข. $[(p \vee r) \wedge (q \vee s)] \rightarrow [(p \vee \sim q) \leftrightarrow (r \rightarrow \sim s)]$ เป็นจริง

(7) จงหานิเสธของ

ก. $(p \rightarrow \sim q) \wedge (\sim r \rightarrow s)$ ข. $(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim r$

(8) กำหนดประพจน์ “ถ้าเดชาขยันและทำการบ้านสม่ำเสมอแล้วเขาจะสอบผ่าน” เป็นเท็จ แล้วข้อใดเป็นจริง

ก. เดชาขยันแต่ไม่ทำการบ้านสม่ำเสมอ

ข. เดชาไม่ขยันแต่ทำการบ้านสม่ำเสมอ

ค. ถ้าเดชาสอบไม่ผ่านแสดงว่าเขาไม่ทำการบ้านสม่ำเสมอ

ง. เดชาขยันก็ต่อเมื่อเขาสอบไม่ผ่าน

(9) ข้อใดไม่สมมูลกัน

ก. $p \vee q$ กับ $\sim(\sim p \wedge \sim q)$ ข. $\sim(p \wedge \sim q)$ กับ $\sim q \rightarrow \sim p$

ค. $\sim p \rightarrow (q \rightarrow p)$ กับ $\sim q \rightarrow p$ ง. $\sim p \leftrightarrow q$ กับ $(\sim p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \sim p)$

(10) รูปแบบประพจน์ต่อไปนี้สมมูลกับข้อใด

(10.1) $p \leftrightarrow q$

ก. $(p \rightarrow q) \wedge (q \wedge \sim p)$ ข. $(\sim q \rightarrow \sim p) \wedge (\sim q \vee p)$

ค. $(p \wedge \sim q) \wedge (q \rightarrow p)$ ง. $(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \rightarrow \sim q)$

(10.2) $\left[[((q \wedge \sim t) \wedge p) \vee ((q \wedge \sim t) \wedge \sim p)] \vee \sim q\right] \rightarrow r$

ก. $q \wedge \sim t \wedge p$ ข. $(t \wedge q) \vee p$

ค. $t \wedge q \wedge r$ ง. $(t \wedge q) \vee r$

จ. $(t \wedge r) \vee p$

(10.3) $[(q \vee r) \wedge (p \wedge s) \wedge (q \vee \sim r)] \vee [(q \vee \sim r) \wedge (p \wedge \sim s) \wedge (q \vee r)]$

ก. $p \wedge q$ ข. $p \vee q$

ค. $p \rightarrow q$ ง. $p \leftrightarrow q$

(11) ข้อความใดสมมูลกับ “ถ้า $a < 0$ และ $b < 0$ แล้ว $ab > 0$”

ก. ถ้า $a \geq 0$ หรือ $b \geq 0$ แล้ว $ab \leq 0$

ข. ถ้า $a \geq 0$ และ $b \geq 0$ แล้ว $ab \geq 0$

ค. ถ้า $ab \leq 0$ แล้ว $a \geq 0$ หรือ $b \geq 0$

ง. ถ้า $ab \geq 0$ แล้ว $a \leq 0$ และ $b \leq 0$

(12) ข้อความในข้อใดสมมูลกันบ้าง

ก. ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม แล้ว a เป็นจำนวนคู่ หรือ a เป็นจำนวนคี่

ข. ถ้า a ไม่เป็นจำนวนคู่ และ a ไม่เป็นจำนวนคี่ แล้ว a ไม่เป็นจำนวนเต็ม

ค. a ไม่เป็นจำนวนเต็ม หรือ a เป็นจำนวนคู่ หรือ a เป็นจำนวนคี่

(13) ข้อใดถูกหรือผิดบ้าง

ก. $\sim(p \wedge \sim r) \vee \sim q$ สมมูลกับ $q \rightarrow (r \vee \sim p)$

ข. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ สมมูลกับ $q \rightarrow (p \rightarrow r)$

ค. $(p \wedge q) \rightarrow r$ สมมูลกับ $(p \rightarrow \sim q) \vee (p \rightarrow r)$

(14) ประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

(14.1) $(p \wedge q) \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow r]$

(14.2) $(p \vee q) \rightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r]$

(14.3) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

(14.4) $[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r]$

(14.5) $[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow r]$

(14.6) $[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s) \wedge (p \wedge q)] \rightarrow (r \vee s)$

(14.7) $\big[[(p \wedge q) \rightarrow r] \wedge (p \rightarrow q)\big] \rightarrow (p \rightarrow r)$

(15) ประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

(15.1) $\sim (p \rightarrow \sim q) \leftrightarrow (p \wedge q)$

(15.2) $[(\sim p \wedge q) \vee p] \leftrightarrow (p \wedge q)$

(15.3) $[(p \vee q) \wedge \sim p] \leftrightarrow (\sim p \wedge q)$

(15.4) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(q \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q)]$

(15.5) $[(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)] \leftrightarrow [(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow (\sim p \vee \sim q)]$

(15.6) $[p \rightarrow (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)]$

(15.7) $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow r]$

(15.8) $[p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)] \leftrightarrow [(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r]$

(16) ประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

(16.1) $[(p \vee r) \rightarrow (q \vee r)] \vee (p \vee q)$

(16.2) $[(\sim p \wedge q) \rightarrow \sim p] \vee (p \rightarrow q)$

(17) ประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

(17.1) นิเสธของ $(p \wedge \sim p) \rightarrow (q \wedge \sim q)$

(17.2) นิเสธของ $[p \wedge (q \vee \sim q)] \leftrightarrow [\sim p \vee (q \wedge \sim q)]$

(17.3) นิเสธของ $\sim (p \leftrightarrow q) \wedge (\sim p \leftrightarrow \sim q)$

(18) เมื่อ p, q, r เป็นประพจน์ใดๆ ถามว่าประพจน์ในข้อใดเป็นจริงบ้าง

ก. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

ข. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$

ค. $\sim ((p \vee q) \vee r) \rightarrow (\sim (p \wedge q) \wedge \sim r)$

ง. $((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$

จ. $((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))$

(19) ตัวเชื่อมในกรอบสี่เหลี่ยม ที่ทำให้ $[(p \rightarrow \sim q) \wedge (p \rightarrow \sim r)] \boxed{} [p \rightarrow \sim (q \vee r)]$ เป็นสัจนิรันดร์ คืออะไร

(20) กำหนดค่าความจริงของตัวเชื่อม $*$ ดังตาราง

p	q	$p * q$
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

(20.1) $(p * p) * (q * q)$ สมมูลกับข้อใด

ก. $p \wedge q$ ข. $p \vee q$

ค. $p \rightarrow q$ ง. $p \leftrightarrow q$

(20.2) $p * q$ สมมูลกับข้อใด

ก. $\sim(\sim p \rightarrow q)$ ข. $\sim p \rightarrow q$

ค. $\sim(q \rightarrow \sim p)$ ง. $q \rightarrow \sim p$

(21) กำหนดให้ $p * q \equiv \sim(p \vee q)$ ถามว่าอัตราส่วนจำนวนกรณีที่ $p * (q * r)$ เป็นจริง ต่อจำนวนกรณีที่เป็นเท็จ เป็นเท่าใด

ประโยคเปิด, ตัวบ่งปริมาณ, และค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ

- ประโยค “x มากกว่า 2” (หรือ “เขาไม่ใช่คนร้าย”) ไม่ใช่ประพจน์ เนื่องจากยังไม่ทราบแน่ชัดว่ามีค่าความจริงเป็นจริงหรือเป็นเท็จ ค่าความจริงขึ้นอยู่กับว่า x เป็นจำนวนใด (หรือ “เขา” เป็นใคร) เช่น ถ้า x เป็น 3 ประโยคนี้จะเป็นจริง แต่ถ้า x เป็น 2 ประโยคนี้จะเป็นเท็จ เราเรียก “ประโยคที่ยังคงติดค่าตัวแปร และเมื่อแทนค่าตัวแปรแล้วจึงกลายเป็นประพจน์” ว่า *ประโยคเปิด* (Open Sentence)
- สัญลักษณ์ที่ใช้แทนประโยคเปิดใดๆ (ที่ติดค่าตัวแปร x) ได้แก่ $P(x), Q(x), R(x)$ ฯลฯ ซึ่งประโยคเปิดเหล่านี้สามารถใช้ตัวเชื่อมได้เช่นเดียวกับประพจน์ p, q, r ทั่วๆ ไป

- *ตัวบ่งปริมาณ* (Quantifier) คือข้อความที่ใช้บ่งบอกความมากน้อยของค่าตัวแปร x มี 2 แบบได้แก่ *สำหรับ x ทุกตัว* (For All x; $\forall x$) และ *สำหรับ x บางตัว* (For Some x; $\exists x$) ซึ่งตัวบ่งปริมาณทั้งสองนี้เมื่อใช้ร่วมกับเอกภพสัมพัทธ์แล้ว จะทำให้ประโยคเปิดกลายเป็นประพจน์ (คือมีค่าเป็นจริงหรือเป็นเท็จ) ได้ เช่น

ให้ $P(x)$ แทนประโยคเปิด “x มากกว่า 2”

จะได้ว่า $\forall x\,[P(x)]$ แทนประโยค “สำหรับ x ทุกตัว... x มากกว่า 2”

และ $\exists x\,[P(x)]$ แทนประโยค “สำหรับ x บางตัว... x มากกว่า 2”

ซึ่งถ้า $U = \{1,2,3\}$ ก็จะพบว่า $\forall x\,[P(x)]$ เป็นเท็จ, $\exists x\,[P(x)]$ เป็นจริง

แต่ถ้า $U = \{3,4\}$ แล้วจะพบว่า $\forall x\,[P(x)]$ เป็นจริง, $\exists x\,[P(x)]$ เป็นจริง

หมายเหตุ **1.** หากไม่มีการระบุเอกภพสัมพัทธ์ ให้ถือว่าเอกภพสัมพัทธ์คือเซตจำนวนจริง $\mathbb{R}$

2. สามารถแจกแจงตัวบ่งปริมาณได้เพียงสองรูปแบบนี้เท่านั้น

$$\forall x\,[P(x) \wedge Q(x)] \equiv \forall x\,[P(x)] \wedge \forall x\,[Q(x)]$$

$$\exists x\,[P(x) \vee Q(x)] \equiv \exists x\,[P(x)] \vee \exists x\,[Q(x)]$$

• ประโยคเปิดที่มีสองตัวแปร เมื่อใช้ตัวบ่งปริมาณก็จะมีสองตัวเช่นกัน และการอ่านต้องคำนึงถึงลำดับก่อนหลัง ดังตัวอย่างนี้

ให้ $P(x)$ แทน “x มากกว่า 2” และ $Q(x,y)$ แทน “x+y เป็นจำนวนเฉพาะ”

จะได้ว่า $\forall x \exists y\,[P(x) \wedge Q(x,y)]$ แทนประโยค “สำหรับ x ทุกตัว จะมี y บางตัวที่ทำให้... x มากกว่า 2 และ x+y เป็นจำนวนเฉพาะ”

ส่วน $\exists y \forall x\,[P(x) \wedge Q(x,y)]$ นั้น แทนประโยค “สำหรับ y บางตัว จะมี x ทุกตัวที่ทำให้... x มากกว่า 2 และ x+y เป็นจำนวนเฉพาะ”

ซึ่งสองประโยคนี้คนละความหมายกัน ไม่สามารถใช้แทนกันได้

• การหานิเสธของประโยคเปิดที่มีตัวบ่งปริมาณ นอกจากจะใส่นิเสธที่ประโยคเปิด (ภายในเครื่องหมายวงเล็บปีกกา) แล้ว ยังต้องเปลี่ยนตัวบ่งปริมาณ จาก $\forall$ เป็น $\exists$ และจาก $\exists$ เป็น $\forall$ ด้วย เช่น นิเสธของ $\forall x \exists y\,[P(x) \to Q(x,y)]$ คือ $\exists x \forall y\,[P(x) \wedge {\sim} Q(x,y)]$

<u>โจทย์</u>

(22) ให้ $U = \{-2,-1,0,1,2\}$ ข้อใดเป็นจริง

ก. $\forall x\,[x$ เป็นจำนวนเต็ม และ $x^2 > 0]$

ข. $\exists x\,[x^3 > x^2$ และ $x < x^2]$

ค. $\forall x\,[$ ถ้า x เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว x เป็นจำนวนเฉพาะ$]$

ง. $\exists x\,[x$ เป็นจำนวนเฉพาะ และ x เป็นจำนวนคี่$]$

(23) กำหนด $P(x)$ แทน “x เป็นจำนวนอตรรกยะ”, $Q(x)$ แทน “x เป็นจำนวนตรรกยะ” ข้อใดมีค่าความจริงเป็นเท็จ

ก. $\forall x\,[P(x) \to Q(\sqrt{2})]$ ข. $\exists x\,[Q(x) \to P(0.5)]$

ค. $\forall x\,[P(x) \vee {\sim} Q(\pi)]$ ง. $\exists x\,[Q(x) \wedge {\sim} P(22/7)]$

(24) กำหนดประโยคเปิด $P(x)$, $Q(x)$ ดังนี้ $P(x) = x > x^2$, $Q(x) = x$ เป็นจำนวนเฉพาะ หรือ ตัวหารร่วมที่มากที่สุดของ 3 กับ x เป็น 1 ข้อความใดถูกหรือผิดบ้าง

ก. $\forall x\,[P(x)]$ เป็นจริง เมื่อ U เป็นช่วงเปิด $(0,1)$

ข. $\forall x\,[Q(x)]$ เป็นเท็จ เมื่อ $U = \{2,3,-5,8\}$

(25) จงหาค่าความจริงของ $\exists x\,(x^3+5x-1 < 4) \wedge \forall x\,(|x^2-1| < 0 \to x \geq -2)$

(26) ให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนนับ $\mathbb{N}$ ถามว่าประพจน์ต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นอย่างไร $[\exists x\,(x^2-1$ เป็นจำนวนนับ$) \wedge \forall x\,(x+1 \geq 0)] \to \forall x\left(\frac{2}{x} < 0\right)$

(27) จงหาค่าความจริงของประโยคต่อไปนี้ หากกำหนดเอกภพสัมพัทธ์เป็น $U = \{-1,0,1\}$

(27.1) $\exists x\,(x^2 \neq 1) \to \forall x\,(x^2 \neq 1)$

(27.2) $\exists x\,(x+1 > 0) \wedge \exists x\,(x^2 \neq 1)$

(27.3) $\exists x\,(x+1 > 0 \wedge x^2 \neq 1)$

(27.4) $\forall x\,(x^2 > 0) \vee \forall x\,(x = 0)$

(27.5) $\forall x\,(x^2 > 0 \ \vee \ x = 0)$

(28) จงหาค่าความจริงของประโยคต่อไปนี้ หากกำหนดเอกภพสัมพัทธ์เป็น $U = \{-1, 0, 1\}$

(28.1) $\exists x \exists y\,(x^2 + y \geq 2)$

(28.2) $\exists x \forall y\,(x^2 + y \geq 2)$

(28.3) $\forall x \exists y\,(x^2 + y \geq 2)$

(28.4) $\forall x \forall y\,(x^2 + y \geq 2)$

(29) จงหาค่าความจริงของประโยคต่อไปนี้ หากกำหนดเอกภพสัมพัทธ์เป็น $U = \{-1, 0, 1\}$

(29.1) $\forall x \forall y\,(x^2 - y = y^2 - x)$

(29.2) $\forall x \exists y\,(x^2 - y = y^2 - x)$

(29.3) $\exists x \forall y\,(x^2 - y = y^2 - x)$

(29.4) $\exists x \exists y\,(x^2 - y = y^2 - x)$

(29.5) $\exists x \forall y\,(x^2 - y \neq y^2 - x)$

(30) จงหาค่าความจริงของ

(30.1) $\exists x \forall y\,(x - y \neq y - x)$ เมื่อ $U = \{-2, 0, 2\}$

(30.2) $\forall x \exists y\,(x + y = 0)$ เมื่อ $U = \{-2, 2\}$

(31) ประพจน์ $\forall x \exists y\,(xy = 1) \leftrightarrow \exists x \forall y\,(xy = y)$ เป็นจริง เมื่อเอกภพสัมพัทธ์เป็นเท่าใด

ก. จำนวนเต็ม ข. จำนวนเต็มบวก ค. จำนวนจริง ง. จำนวนจริงบวก

(32) ให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตจำนวนจริงบวก $\mathbb{R}^+$ ข้อใดมีค่าความจริงเป็นจริง

ก. $\forall x \forall y\,[x + y \geq xy]$ ข. $\exists x \exists y\,[x + y \leq 0]$

ค. $\exists x \forall y\,[x \leq y]$ ง. $\forall x \exists y\,[y > x]$

(33) จงหานิเสธของ

(33.1) $\forall x\,[P(x) \rightarrow \sim Q(x)]$

(33.2) $\forall x\,[P(x) \rightarrow (Q(x) \rightarrow R(x))]$

(33.3) $\sim\big[\forall x\,[P(x)] \rightarrow \exists x\,[Q(x)]\big]$

(33.4) $\exists x \exists y\,[(x + y = 5) \rightarrow (x - y = 1)]$

(33.5) $\exists x \exists y\,[x > 0 \ \wedge \ y \neq 0 \ \wedge \ xy < 0]$

(33.6) $\exists x \forall y\,(xy > 0 \ \rightarrow \ x < 0 \ \vee \ y < 0)$

(33.7) $\exists x \exists y\,[(P(y) \wedge \sim R(x)) \rightarrow (\sim Q(x) \vee \sim P(y))]$

(33.8) $\forall x \exists y \forall z$ $(x + y > z$ และ $xy \leq z)$

(34) ข้อความใดถูกหรือผิดบ้าง

ก. นิเสธของ $\forall x\,[x + 5 = 0] \wedge \exists y\,[\frac{22}{y} < \pi]$ คือ $\exists x\,[x + 5 \neq 0] \vee \forall y\,[\frac{22}{y} \geq \pi]$

ข. นิเสธของ $\exists x\,[x < 6] \rightarrow \forall x\,[x \geq 8]$ คือ $\forall x\,[x \geq 6] \wedge \exists x\,[x < 8]$

การอ้างเหตุผล

• *การอ้างเหตุผล* คือการกล่าวว่าถ้ามีเหตุเป็นข้อความ $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ ชุดหนึ่ง แล้วสามารถสรุปผลเป็นข้อความ q อันหนึ่งได้ การอ้างเหตุผลมีทั้งแบบที่ *สมเหตุสมผล* (valid) และ *ไม่สมเหตุสมผล* (invalid) ซึ่งเราสามารถตรวจสอบความสมเหตุสมผลได้โดยหลายวิธี คือ

1. *ตรวจสอบสัจนิรันดร์*

การอ้างเหตุผลจะสมเหตุสมผล ก็เมื่อ $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์ (หรือกล่าวว่าไม่สมเหตุสมผลเพียงกรณีเดียวเท่านั้น คือเหตุเป็นจริงทั้งหมด แต่ผลเป็นเท็จ)

2. *เทียบกับรูปแบบที่พบบ่อย*

การอ้างเหตุผลทุกรูปแบบต่อไปนี้ สมเหตุสมผล

(1) เหตุ $p \rightarrow q$, p ผล q

(2) เหตุ $p \rightarrow q$, $\sim q$ ผล $\sim p$

(3) เหตุ $p \rightarrow q$, $q \rightarrow r$ ผล $p \rightarrow r$

(4) เหตุ $p \rightarrow q$, $r \rightarrow s$, $p \vee r$ ผล $q \vee s$

(5) เหตุ $p \vee q$, $\sim p$ ผล q

(6) เหตุ $p \rightarrow q$, $\sim q \rightarrow \sim p$ ผล $\sim p \vee q$

(7) เหตุ $p \wedge q$ ผล p

(8) เหตุ p ผล $p \vee q$

โจทย์

(35) การอ้างเหตุผลดังต่อไปนี้ สมเหตุสมผลหรือไม่

(35.1) เหตุ 1. $p \rightarrow q$
2. $q \rightarrow s$
3. $\sim s$
ผล $\sim p$

(35.2) เหตุ $p \rightarrow (r \vee s)$
ผล $\sim p \vee (r \vee s)$

(36) การอ้างเหตุผลดังต่อไปนี้ สมเหตุสมผลหรือไม่

(36.1) เหตุ 1. ถ้า x เป็นจำนวนคู่แล้ว $2 \mid x$
2. ถ้า x เป็นจำนวนคู่และ $2 \mid x$ แล้ว x เป็นจำนวนเต็ม
3. ไม่จริงที่ว่า "x เป็นจำนวนเฉพาะและ x เป็นจำนวนเต็ม"
4. x เป็นจำนวนคู่
ผล x เป็นจำนวนเฉพาะ

(36.2) เหตุ 1. ถ้า a เป็นจำนวนตรรกยะแล้ว a ไม่เป็นจำนวนอตรรกยะ
2. $a^2 = 2$ หรือ $a^2 = -1$
3. ถ้า $a^2 = 2$ แล้ว a เป็นจำนวนอตรรกยะ
4. $a^2 \neq -1$
ผล a เป็นจำนวนตรรกยะ

(37) จงเติมข้อความที่ทำให้การอ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผล

(37.1) เหตุ 1. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
2. $\sim s \vee p$
3. q
ผล $\square$

(37.2) เหตุ 1. $\sim p \rightarrow q$
2. $q \rightarrow \sim r$
3. $\square$
ผล p

(38) จงเติมข้อความที่ทำให้การอ้างเหตุผลนี้ สมเหตุสมผล

เหตุ 1. ถ้าฉันขยัน ฉันจะไม่ตกคณิตศาสตร์
2. ฉันตกคณิตศาสตร์
ผล $\square$

(39) กำหนดเหตุให้ดังนี้ ให้หาว่าผลในข้อใดทำให้การอ้างเหตุผลสมเหตุสมผล

เหตุ 1. ถ้าฉันขยันแล้วฉันจะสอบได้
2. ถ้าฉันไม่ขยันแล้วพ่อแม่จะเสียใจ
3. ถ้าฉันเรียนในมหาวิทยาลัยแล้วพ่อแม่จะไม่เสียใจ
4. ฉันสอบไม่ได้

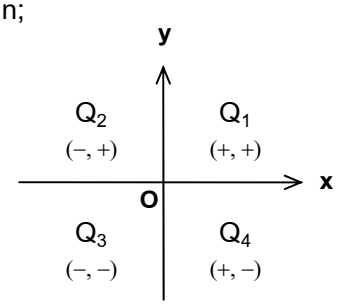
ผล ก. ฉันไม่ได้เรียนในมหาวิทยาลัย หรือฉันขยัน
ข. ฉันเรียนในมหาวิทยาลัย และฉันขยัน
ค. พ่อแม่ฉันไม่เสียใจ และฉันไม่ได้เรียนในมหาวิทยาลัย
ง. ฉันขยัน แต่ฉันสอบไม่ได้

เฉลย (1) p | F | p | F -- T | p | p | T -- p | T | T | ~p | T | ~p -- p | ~p | T | F (2) ข้อ (2.6 ถึง 2.10) เป็นเท็จ นอกนั้นจริง (3) ข้อ (3.5, 3.7, 3.9, 3.12) เป็นเท็จ ข้อ (3.11) T, T, F นอกนั้นจริง (4) ก. ถูก ข. ถูก (5) ทุกข้อ (6) ก. ผิด ข. ถูก (7) ก. $(p \wedge q) \vee (\sim r \wedge \sim s)$ ข. $p \wedge \sim q \wedge r$ (8) ง. (9) ค. (10.1) ข. (10.2) ง. (10.3) ก. (11) ค. (12) สมมูลกันทุกข้อ (13) ถูกทุกข้อ (14 ถึง 17) เป็นทุกข้อ ยกเว้น (14.1, 14.2, 15.2, 17.1) (18) ข. และ ค. เป็นจริง (19) $\rightarrow$ หรือ $\leftrightarrow$ (20.1) ก. (20.2) ก. (21) 3:5 (22) ข. (23) ก., ข. (24) ก. ถูก ข. ผิด (25) จริง (26) เท็จ (27) ข้อ (27.1, 27.4) เป็นเท็จ นอกนั้นเป็นจริง (28) ข้อ (28.1) เป็นจริง นอกนั้นเป็นเท็จ (29) ข้อ (29.2, 29.4) เป็นจริง นอกนั้นเป็นเท็จ (30.1) เท็จ (30.2) จริง (31) ง. (32) ง. (33.1) $\exists x\,[P(x) \wedge Q(x)]$ (33.2) $\exists x\,[P(x) \wedge Q(x) \wedge \sim R(x))]$ (33.3) $\forall x\,[P(x)] \rightarrow \exists x\,[Q(x)]$ (33.4) $\forall x \forall y\,[(x + y = 5) \wedge (x - y \neq 1)]$ (33.5) $\forall x \forall y\,[xy < 0 \rightarrow (x \leq 0 \vee y = 0)]$ (33.6) $\forall x \exists y\,(xy < 0 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0)$ (33.7) $\forall x \forall y\,[P(y) \wedge \sim R(x) \wedge Q(x)]$ (33.8) $\exists x \forall y \exists z$ $(x + y \leq z$ หรือ $xy > z)$ (34) ก. ถูก ข. ผิด (35) สมเหตุสมผลทั้งสองข้อ (36) ไม่สมเหตุสมผลทั้งสองข้อ (37.1) $s \rightarrow r$ (37.2) r (38) ฉันไม่ขยัน (39) ก.

เรขาคณิตวิเคราะห์ (Analytic Geometry)

• เรขาคณิตวิเคราะห์ เป็นการคำนวณเกี่ยวกับรูปเรขาคณิต เช่น การหาระยะห่างระหว่างจุดสองจุด, ระหว่างเส้นตรงคู่ขนานสองเส้น, การหาพื้นที่รูปหลายเหลี่ยม, หรือการหาความชันของเส้นตรง เป็นต้น

• ใน *ระนาบ* (Plane) หนึ่งๆ เราจะอ้างถึงตำแหน่งหรือจุดใดๆ ได้ด้วยค่า *พิกัด* (Coordinate) โดยระบบที่นิยมใช้มากที่สุดคือระบบ *พิกัดฉาก* (Cartesian Coordinate) ประกอบด้วยแกนอ้างอิง 2 แกนที่ตั้งฉากกัน ณ จุดที่สมมติให้เป็น *จุดกำเนิด* (Origin; หรือจุด O) เรียกชื่อแกนนอนและแกนตั้ง ว่าแกน x และแกน y ตามลำดับ



• แกนทั้งสองนี้ตัดกัน แบ่งพื้นที่ในระนาบ xy ออกเป็น 4 ส่วน เรียกแต่ละส่วนว่า *จตุภาค* (Quadrant; Q) ได้แก่ จตุภาคที่ 1, 2, 3, และ 4 ดังภาพ

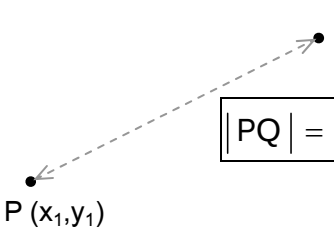
• การอ้างถึงพิกัดในระบบพิกัดฉาก นิยมเขียนในรูป *คู่อันดับ* (Ordered Pair) ที่สมาชิกตัวแรกแทนระยะทางในแนว +x และตัวหลังแทนระยะทางในแนว +y เช่น คู่อันดับ $(2, 4)$

<u>การคำนวณเกี่ยวกับจุด</u>

• การเขียนชื่อจุดนิยมใช้ตัวอักษรใหญ่ เช่น จุด P, จุด Q และอาจเขียนกำกับด้วยคู่อันดับในพิกัดฉาก เป็น $P(x, y)$ ใดๆ เช่น $Q\ (2, 4)$ ใช้แทนจุดที่ชื่อ Q และมีพิกัดเป็น $(2, 4)$

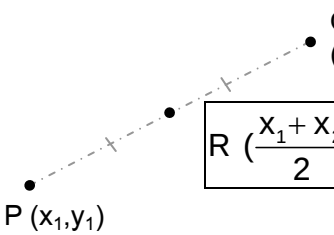
• <u>(1) ระยะห่างระหว่างจุดสองจุด</u>

สัญลักษณ์ที่ใช้แทนระยะห่าง ระหว่างจุด P กับ Q คือ $|PQ|$



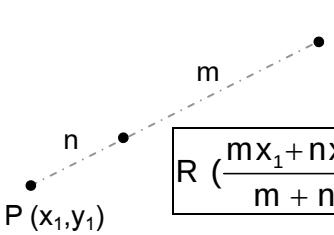
$$\boxed{|PQ| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$ (พิสูจน์ได้จาก *ทฤษฎีบทปีทาโกรัส*) (Pythagorean Theorem)

• <u>(2) จุดกึ่งกลางระหว่างสองจุด</u>



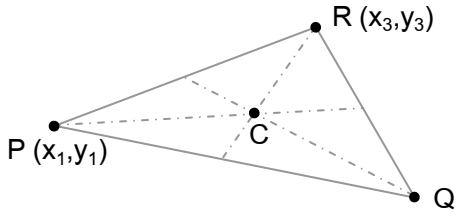
$$\boxed{R\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)}$$

<u>จุดที่แบ่งระยะทางเป็นอัตราส่วน $m:n$</u>



$$\boxed{R\left(\frac{mx_1+nx_2}{m+n}, \frac{my_1+ny_2}{m+n}\right)}$$

• <u>(3) จุดตัดของเส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยม</u> (เรียกว่าจุด Centriod)



$$C\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

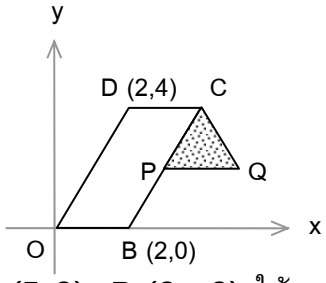
<u>ทฤษฎีบท</u> **1.** เส้นมัธยฐาน คือเส้นตรงที่เชื่อมจุดยอดจุดหนึ่ง กับจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้าม
2. จุดตัดของเส้นมัธยฐาน จะแบ่งเส้นมัธยฐานแต่ละเส้นออกเป็นอัตราส่วน $2:1$ เสมอ

<u>โจทย์</u>

(1) กำหนดจุด $P_1\ (1,7)$ และ $P_2\ (-5,2)$ ให้หาค่า $|P_1P_2|$

(2) ถ้า P, Q เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $A\ (2,7)$, $B\ (6,-3)$, $C\ (-2,5)$, และ $D\ (8,1)$ ให้หาความยาวของ $\overline{PQ}$

(3) กำหนดสี่เหลี่ยมด้านขนาน OBCD ดังภาพ, P เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{BC}$, และ $|PC| = |PQ|$ จงหาขนาดพื้นที่สามเหลี่ยม PQC



(4) กำหนดสามเหลี่ยม ABC มีจุดยอดมุมอยู่ที่ $A\ (5,-3)$, $B\ (-6,1)$, $C\ (1,8)$ แล้วสามเหลี่ยมรูปนี้เป็นสามเหลี่ยมชนิดใด

(5) สามเหลี่ยม ABC มีจุดกึ่งกลางด้านทั้งสามเป็น $P\ (-2,1)$, $Q\ (5,2)$, $R\ (2,-3)$ ให้หาความยาวเส้นรอบรูปสามเหลี่ยม ABC นี้

(6) กำหนดสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $A\ (2,8)$, $B\ (6,12)$, $C\ (-2,-4)$ ถ้าจุด P และ Q อยู่บนด้าน $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$ ตามลำดับ โดยมีอัตราส่วน $|AP| : |PB| = 1:3$, $|BQ| : |BC| = 3:4$ ให้หา $|PQ|$

(7) ข้อใดถูกหรือผิดบ้าง เมื่อกำหนด

ก. จุด $A\ (10,5)$, $B\ (3,2)$, $C\ (6,-5)$ เป็นจุดมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ข. จุด $D\ (1,2)$, $E\ (-3,10)$, $F\ (4,-4)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

ค. จุด $A\ (-2,3)$, $B\ (-6,1)$, $C\ (-10,-1)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

(8) จงหาจุด P บนแกน x ซึ่งอยู่ห่างจากจุด $P_1\ (1,-2)$ และ $P_2\ (3,5)$ เป็นระยะเท่ากัน

(9) ให้หาจุดศูนย์กลางของวงกลม ซึ่งผ่านจุด $(1,7)$, $(8,6)$, $(7,-1)$

(10) ให้หาผลบวกของความยาวเส้นมัธยฐาน ของสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดอยู่ที่ $A\ (2,-1)$, $B\ (4,3)$, และ $C\ (-2,5)$

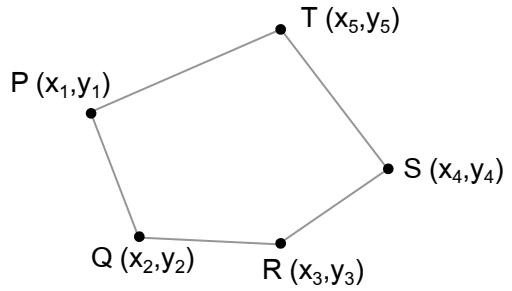
(11) ถ้า (m,n) เป็นจุดตัดของเส้นมัธยฐาน ของสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(4,5)$, $(-4,7)$, และ $(4,1)$ แล้วจงหาค่า $m-n$

(12) สามเหลี่ยม ABC มีจุดยอดเป็น $B\ (6,7)$, $C\ (-4,-3)$ ถ้าจุด $P\ (4/3,1)$ เป็นจุดตัดของเส้นมัธยฐานแล้ว เส้นมัธยฐานที่ลากจาก A มีความยาวเท่าใด

• (4) พื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม

คำนวณได้จาก ... นำคู่อันดับของจุดยอดมาตั้งเรียงกัน เรียงทวนเข็มนาฬิกาให้ครบทุกจุด (โดยวนกลับมาที่จุดแรกอีกครั้งด้วย) จากนั้น คูณลงเครื่องหมายเดิม คูณขึ้นเปลี่ยนเครื่องหมาย (วิธีการเดียวกับการหา det) นำค่าที่ได้รวมกันแล้วหารสอง จะเป็นพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมนั้น

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$



$$= \frac{1}{2}\left(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_5 + x_5y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_4y_3 - x_5y_4 - x_1y_5\right)$$

โจทย์

(13) P เป็นจุดกึ่งกลางระหว่าง $(13,2)$ และ $(-13,-2)$, Q เป็นจุดกึ่งกลางระหว่าง $(6,10)$ และ $(0,14)$, R เป็นจุดกึ่งกลางระหว่าง $(8,4)$ และ $(16,-4)$ ให้หาพื้นที่และตำแหน่งจุดตัดของเส้นมัธยฐาน ของรูปสามเหลี่ยม PQR

(14) จงหาผลต่างของพื้นที่สามเหลี่ยม ABC และ PQR เมื่อกำหนดตำแหน่งจุดยอดให้ ดังนี้ $A(1,3)$, $B(-2,0)$, $C(3,-5)$, $P(0,0)$, $Q(8,18)$, และ $R(12,27)$

(15) กำหนดจุด $P(3,-2)$, $Q(-2,3)$, $R(0,4)$ แล้วข้อใดถูกหรือผิดบ้าง

ก. ความยาวเส้นรอบรูปสามเหลี่ยม PQR เป็น $9\sqrt{5}$ หน่วย

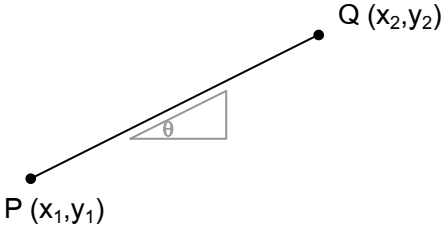
ข. พื้นที่รูปสามเหลี่ยม PQR เป็น 15 ตารางหน่วย

(16) ให้หาพื้นที่รูปห้าเหลี่ยมซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $A(1,4)$, $B(-3,-2)$, $C(-1,-3)$, $D(-4,5)$, และ $E(-2,7)$

การคำนวณเกี่ยวกับเส้นตรง

• เราสามารถสร้างเส้นตรงที่ผ่านจุดสองจุดที่กำหนดให้ เช่น จุด P กับ Q ใดๆ ได้เสมอ และเขียนแทน “ส่วนของเส้นตรง” ที่เชื่อมระหว่างจุด P กับ Q ด้วยสัญลักษณ์ $\overline{PQ}$ นอกจากนั้นนิยมตั้งชื่อ “เส้นตรง” ด้วยอักษร L เช่น เส้นตรง L_1, เส้นตรง L_2

• (1) *ความชัน* (Slope; m) ของเส้นตรง ที่ทราบจุดผ่านสองจุด



$$\boxed{m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

ทฤษฎีบท เส้นตรงสองเส้น *ขนานกัน* (Parallel; $\parallel$) ก็ต่อเมื่อ มีความชันเท่ากัน และเส้นตรงสองเส้น *ตั้งฉากกัน* (Perpendicular; $\perp$) ก็ต่อเมื่อ ความชันคูณกันเป็น -1

โจทย์

(17) ถ้า $A(1,2)$, $B(2,k)$, $C(3,4)$ อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ให้หาค่า k

(18) จุด $(1,y)$ อยู่บน $\overline{PR}$ ซึ่งมีพีกัด $P(-2,6)$ และ $R(4,-2)$ ให้หาค่า y

(19) $\overline{AB}$ ตัดแกน x และ y โดยมีระยะตัดแกน x ทางบวก 4 หน่วย และแกน y ทางบวก 3 หน่วย จุดตัดสองจุดนี้แบ่ง $\overline{AB}$ ออกเป็น 3 ส่วนเท่าๆ กันพอดี จงหาพิกัดของ A กับ B

(20) หากกำหนดพิกัด $A(4,5)$, $B(1,2)$, $C(2,8)$, $D(-2,4)$ แล้ว $\overline{AB}$ ขนานกับ $\overline{CD}$ หรือไม่

(21) จงหาจุด D ที่ทำให้ $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน เมื่อ $A(-4,1)$, $B(-5,-4)$, $C(1,-2)$

(22) ถ้าเส้นตรงที่ผ่านจุด $(k,7)$, $(-3,-2)$ ตั้งฉากกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3,2)$, $(1,-4)$ แล้ว ค่า k เป็นเท่าใด

(23) ถ้าเส้นตรงที่ผ่านจุด $A(1,5)$ และ $B(3,6)$ ตั้งฉากกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $C(m,4)$ และ $D(-1,-m)$ แล้ว จงหาค่า m

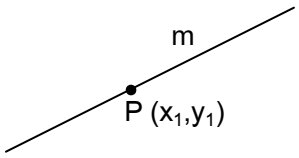
(24) วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ $C(5,6)$ มีเส้นตรง L มาสัมผัสที่จุด $(-3,1)$ ให้หาความชันของเส้นตรง L

(25) จงหาความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม ที่ล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ซึ่งมีพิกัดเป็น $A(1,7)$, $B(8,6)$, $C(7,-1)$

(26) ให้หาคำตอบของข้อ (7) โดยใช้ความรู้เรื่อง ความชันของเส้นตรง

- (2) สมการของเส้นตรง

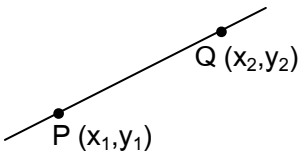
(2.1) เมื่อทราบจุดผ่านจุดหนึ่ง (x_1, y_1) และค่าความชัน m



เราใช้ความสัมพันธ์ของความชัน คือ $\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$

หรือจัดรูปได้ว่า $\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$

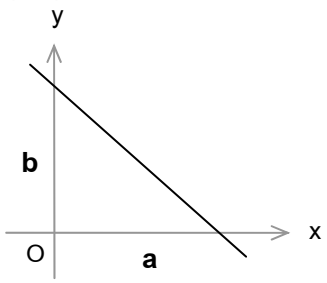
(2.2) เมื่อทราบจุดผ่านสองจุด (x_1, y_1), (x_2, y_2)



ให้คำนวณค่าความชันจากสองจุดนี้ก่อน แล้วจึงทำตามข้อ (2.1) โดยเลือกใช้จุดใดก็ได้จุดเดียว

สมการที่ได้จะเป็น $\boxed{y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)}$

(2.3) เมื่อทราบ *ระยะตัดแกน* (Intercept) ทั้งสองแกน



สามารถใช้สมการเส้นตรงในรูป Intercept Form ได้แก่ $\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$

เมื่อ a, b คือ ระยะตัดแกน x และ y ตามลำดับ โดย a, b อาจเป็นค่าบวก หรือลบก็ได้

• <u>ข้อสังเกต</u> **1.** สมการเส้นตรงมีรูปทั่วไป (Common Form) เป็น $\boxed{A\mathbf{x} + B\mathbf{y} + C = 0}$

2. สมการเส้นตรงที่นิยมใช้ประโยชน์มีอยู่ 3 รูปแบบ ได้แก่

Slope-Intercept Form	$\boxed{\mathbf{y} = m\mathbf{x} + c}$	เมื่อ c คือระยะตัดแกน y
Slope-Point Form	$\mathbf{y} - y_1 = m\,(\mathbf{x} - x_1)$	
Intercept-Intercept Form	$\frac{\mathbf{x}}{a} + \frac{\mathbf{y}}{b} = 1$	

3. เมื่อนำรูปทั่วไป มาจัดข้างตัวแปรใหม่ จะได้ $\mathbf{y} = -\frac{A}{B}\mathbf{x} - \frac{C}{B}$ ทำให้ทราบว่า

ค่าความชัน $m = -\frac{A}{B}$ และระยะตัดแกนวาย $c = -\frac{C}{B}$

<u>โจทย์</u>

(27) จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3,0)$ และ $(0,2)$

(28) เส้นตรง L ผ่านจุด $(-2,-5)$ และ $(1,3)$ ถามว่ารูปสามเหลี่ยมที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรงเส้นนี้ กับแกน x และแกน y มีพื้นที่เท่าใด

(29) จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(6,8)$ และจุดตัดแกน x ของ $3x+4y=12$

(30) รูปสี่เหลี่ยม ABCD มีจุดมุมอยู่ที่ $A\,(1,2)$, $B\,(-2,-1)$, $C\,(-3,-6)$, $D\,(2,-5)$ ถ้า P เป็นจุดตัดของเส้นทแยงมุม แล้ว P จะอยู่ห่างจากจุดกำเนิดกี่หน่วย

(31) จงหาสมการเส้นตรงที่ขนานกับ $2x+3y+10=0$ และผ่านจุดที่ $x+y=1$ ตัดกับ $2x+y=5$

(32) เส้นตรงสองเส้นตั้งฉากกันที่จุดตัดแกน x พอดี หากเส้นหนึ่งมีสมการเป็น $3x-4y+5=0$ แล้ว ให้หาว่าอีกเส้นหนึ่งตัดแกน y ที่จุดใด

(33) หากเส้นตรง L ตั้งฉากกับ $2x+3y+5=0$ และผ่านจุด $(1,5)$ ถามว่าเส้นตรง L ตัดแกน x ที่จุดใด

(34) ให้ M เป็นเส้นตรง $3x-3y+5=7$ และ N เป็นเส้นตรง $2x-5y+7=4$ จงหาสมการเส้นตรง L ที่ขนานกับ M และมีระยะตัดแกน y เท่ากับ N

(35) เส้นตรง L_1 ผ่านจุด $(2,2)$ และ $(-2,0)$, เส้นตรง L_2 ตั้งฉากกับ L_1 ที่จุด $(-2,0)$ และเส้นตรง L_3 มีส่วนตัดแกน x เป็น $4/3$ แกน y เป็น -4 จงหาพื้นที่สามเหลี่ยมที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรงสามเส้นนี้

(36) กำหนด L_1 มีสมการเป็น $2x-3y+6=0$, L_2 ผ่านจุด $(-2,3)$ และขนานกับ L_1 หาก L_3 ผ่านจุด $(2/3,-1)$ และตั้งฉากกับ L_1 แล้ว ถามว่า L_2 กับ L_3 ตัดกันที่จุดใด ในควอดรันต์ใด

(37) สมมติว่า $A\,(3,k)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 1 และเป็นจุดบนวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด และรัศมี 4 หน่วย ถ้าเส้นตรง L สัมผัสวงกลมนี้ที่จุด A แล้ว ให้หาระยะตัดแกน x ของเส้นตรง L

(38) เส้นตรง L เป็นเส้นสัมผัสวงกลมซึ่งมีศูนย์กลางที่ $A(-1,2)$ โดยสัมผัสกันที่จุด $B(2,-1)$ และทำให้เกิดสามเหลี่ยม PQR ที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรงเส้นนี้, แกน x, และแกน y พิจารณาข้อความ ข้อใดถูกหรือผิดบ้าง

ก. ความยาวรอบรูปสามเหลี่ยม PQR คือ $6+3\sqrt{2}$ หน่วย

ข. พื้นที่สามเหลี่ยม PQR มีขนาด 4.5 ตารางหน่วย

(39) หากสามเหลี่ยม ABC มีจุดยอดที่ $A(-2,5)$, $B(4,8)$, $C(2,-3)$ จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดกึ่งกลางด้านทั้งสองซึ่งสั้นกว่าด้านที่สาม และหาระยะตัดแกน x และ y ของเส้นตรงนี้

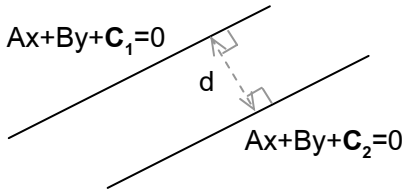
(40) ถ้าระยะที่เส้นตรงเส้นหนึ่งตัดแกน x เป็นสองเท่าของระยะตัดแกน y และเส้นตรงนี้ผ่านจุด $(1,3)$ แล้ว ให้หาเส้นตรงนี้

(41) เส้นตรงที่ผ่านจุด $(-2,4)$ และมีผลบวกของ X-intercept กับ Y-intercept เป็น 9 จะมีความชันเท่าใด และตัดแกน x ที่ใด

(42) เส้นตรง L มีความชันเป็น 0.5 และผ่านจุด $(-3,0)$ ตัดแกน y ที่จุด A หากลาก $\overline{AB}$ ตั้งฉากกับ L โดยจุด B นั้นทำให้มีเส้นตรงขนานแกน y ผ่านจุด B ตัดแกน x ที่ $C(-3,0)$ ได้ ถามว่า $|BC|$ มีค่าเท่าใด

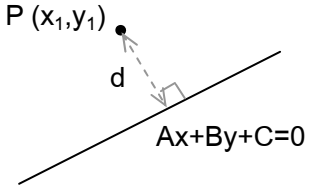
(43) สามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ซึ่งมีมุม B เป็นมุมฉาก มีจุด A อยู่ที่ $(-3,5)$, จุด C อยู่ที่ $(4,-4)$, และมีความชันของ $\overline{AB}$ เป็น $3/2$ นั้น มีขนาดกี่ตารางหน่วย

- <u>(3) ระยะห่างระหว่างเส้นตรงคู่ขนานสองเส้น</u>



$$d=\frac{|C_2-C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

- <u>(4) ระยะห่างระหว่างจุดกับเส้นตรง</u>



$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

<u>โจทย์</u>

(44) เส้นตรง $2x-3y=6$ และ $4x-6y=25$ อยู่ห่างกันกี่หน่วย

(45) จงหาค่า C ที่ทำให้เส้นตรง $Ax+2y+C=0$ อยู่ห่างจาก $3x-4y-5=0$ หนึ่งหน่วย

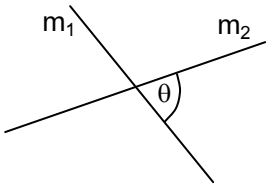
(46) เส้นตรง L_1 ขนานกับ L_2 โดยอยู่ห่างกัน 4 หน่วย หากเส้นตรง L ซึ่งมีสมการเป็น $12x-5y-15=0$ นั้นขนานกับ L_1 และอยู่ห่างจาก L_1, L_2 เป็นระยะเท่าๆ กัน จงหาผลบวกของส่วนตัดแกน x ของเส้นตรง L_1 และ L_2

(47) กำหนดจุดยอดของสามเหลี่ยมเป็น $A\ (-2,1)$, $B\ (5,4)$, $C\ (2,-3)$ ให้หาส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยม ที่ลากจากจุด A มายังด้าน $\overline{BC}$

(48) เส้นตรง L มีสมการเป็น $5x-12y+3=k$ และ L อยู่ห่างจากจุด $P\ (-3,2)$ อยู่ 4 หน่วย ให้หาผลบวกของค่า k ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

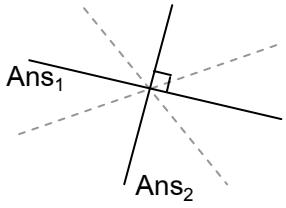
(49) ให้หาว่าจุดใดบนเส้นตรง $2x-4y=15$ อยู่ห่างจาก $3x+4y=10$ เป็นระยะ 3 หน่วย

- <u>(5) ขนาดของมุมที่เกิดจากเส้นตรงสองเส้นตัดกัน</u>



$$\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$

- <u>หมายเหตุ</u> การหาเส้นตรงที่แบ่งครึ่งมุม θ นี้พอดี จะใช้ความสัมพันธ์ที่ว่า “ระยะทางจากจุดบนเส้นตรงนี้ ไปยังเส้นตรงที่กำหนดให้ทั้งสองเส้น จะเท่ากันเสมอ”



นั่นคือ $$\frac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{|A_2x+B_2y+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

ซึ่งคำตอบที่ได้จะมีสองคำตอบ (เป็นเส้นตรงที่แบ่งครึ่งมุมแหลมและมุมป้าน) ที่ตั้งฉากกันเสมอ ดังภาพ

<u>โจทย์</u>

(50) จงหาขนาดมุมแหลมที่เกิดจากการตัดกันของ $5x-y=0$ และ $2x-3y+1=0$

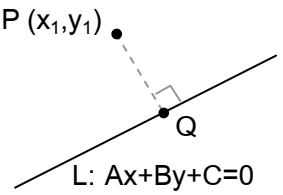
(51) กำหนดเส้นตรง L_1 ผ่านจุด $(\sqrt{3},2)$, $(0,1)$ และเส้นตรง L_2 ผ่านจุด $(2,3)$, $(1,4)$ ให้หาขนาดของมุมแหลมระหว่าง L_1 กับ L_2

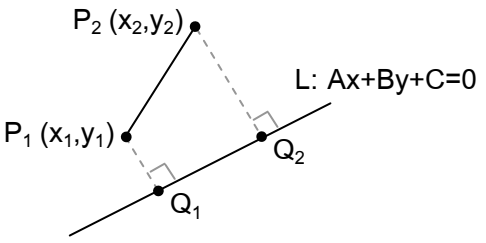
(52) เส้นตรง L_1 ผ่านจุด $(2,\sqrt{3})$, $(1,0)$ และเส้นตรง L_2 ผ่านจุดกำเนิด O และตัดกับ L_1 ที่จุด C ถ้ามุมระหว่าง L_1 กับ L_2 เป็น $30°$ ให้หาความยาวของ $\overline{CO}$

(53) จงหาสมการเส้นตรงที่แบ่งครึ่งมุมที่เกิดจากการตัดกันของ $3x+4y+1=0$ และ $4x-3y-6=0$

- <u>(6) *ภาพฉาย* (Projection) บนเส้นตรง</u>

ภาพฉายของจุด P บนเส้นตรง L คือจุด Q ภาพฉายของ $\overline{P_1P_2}$ บนเส้นตรง L คือ $\overline{Q_1Q_2}$





• การคำนวณหาตำแหน่งภาพฉาย สามารถคำนวณได้หลายวิธี เช่น คำนวณจากความชัน เป็นวิธีที่สะดวกที่สุด (โดยสร้างสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด P และตั้งฉากกับเส้นตรง L แล้วจึงแก้ระบบสมการหาจุดตัดของเส้นตรงสองเส้น) หรือคำนวณจากระยะทาง (โดยสร้างสมการเพื่อหาจุดที่ห่างจากจุด P เป็นระยะเท่าที่กำหนด ซึ่งจะได้เป็นสมการวงกลม แล้วจึงแก้ระบบสมการหาจุดตัดของวงกลมกับเส้นตรง)

• <u>ข้อสังเกต</u> ภาพฉายของจุด $P(x_1, y_1)$ ใดๆ บนเส้นตรงที่มีสมการ "$y = x$" (เส้นตรงทำมุม $45°$ กับแกน x) ได้แก่ จุด $Q(\frac{x_1+y_1}{2}, \frac{x_1+y_1}{2})$

<u>โจทย์</u>

(54) ถ้า A เป็นภาพฉายของจุด $(-2,1)$ บนแกน x และ B เป็นภาพฉายของ $(-5,6)$ บนแกน y ให้หาสมการเส้นตรง AB

(55) กำหนด $A(1,0)$, $B(-5,8)$, P เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$ และ Q เป็นภาพฉายของ B บนเส้นตรง $x = 1$ จงหาสมการเส้นตรง PQ และเส้นตรงที่ตั้งฉากกับ PQ

(56) จงหาโพรเจคชันของจุด $(-2,1)$ บนเส้นตรง $x - y = 0$

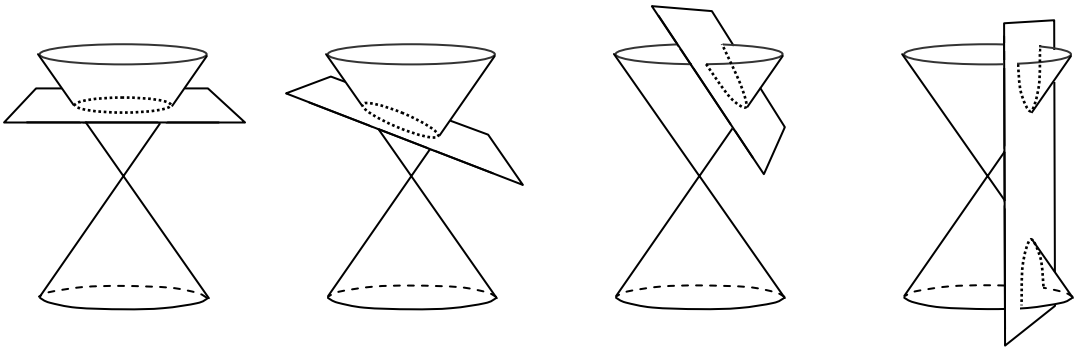
(57) จงหาโพรเจคชันของจุด $(0,7)$ บนเส้นตรง $4x-5y=6$

<u>เฉลย</u>

(1) $\sqrt{61}$ (2) $\sqrt{2}$ (3) $\sqrt{5}$ (4) หน้าจั่ว (5) $2\times(9\sqrt{2}+\sqrt{34})$ (6) $3\sqrt{10}$ (7) ถูกทุกข้อ (8) $(29/4, 0)$ (9) $(4,3)$ (10) $\sqrt{41}+\sqrt{26}+\sqrt{17}$ (11) -3 (12) $\sqrt{10}$ (13) 18, $(5,4)$ (14) 15 (15) ผิดทั้งสองข้อ (16) 31 (17) 3 (18) 2 (19) $(-4,6),(8,-3)$ (20) ขนาน (21) $(2,3)$ (22) -30 (23) -2 (24) $-8/5$ (25) 10 (26) ... (27) $2x+3y=6$ (28) $1/48$ (29) $y=(2/3)x+4$ (30) $\sqrt{5}$ (31) $2x+3y+1=0$ (32) $(0,-20/9)$ (33) $(-7/3,0)$ (34) $y=x+3/5$ (35) 10 (36) $(-2,3)$, Q_2 (37) $16/3$ (38) ถูกทั้งสองข้อ (39) $y=(11/2)x+1$, $a=-2/11$, $b=1$ (40) $x+2y-7=0$ (41) $-1/2$, $(6,0)$ หรือ 4, $(-3,0)$ (42) 7.5 (43) 19.5 (44) $\sqrt{13}/2$ (45) 0, 5 (46) $-11/12+41/12=2.5$ (47) $40/\sqrt{58}$ (48) $-88+16=-72$ (49) $(2,-11/4)$, $(8,1/4)$ (50) $45°$ (51) $75°$ (52) $\sqrt{3}$ (53) $x-7y-7=0$ หรือ $7x+y-5=0$ (54) $y=3x+6$ (55) $4x-3y+20=0$, $3x+4y+C=0$ (56) $(-1/2,-1/2)$ (57) $(24/41, 257/41)$

ภาคตัดกรวย (Conic Section)

• ความสัมพันธ์ที่พบบ่อย นอกจากจะมีกราฟเป็นเส้นตรงแล้ว ยังมีกราฟเส้นโค้ง ได้แก่ วงกลม พาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลาด้วย กราฟทั้งสี่รูปนี้เรียกรวมกันว่า *ภาคตัดกรวย* (Conic Section) เนื่องจากเป็นกราฟที่ได้จากการตัดกรวยกลมตรง ด้วยระนาบในมุมต่างๆ ดังภาพ

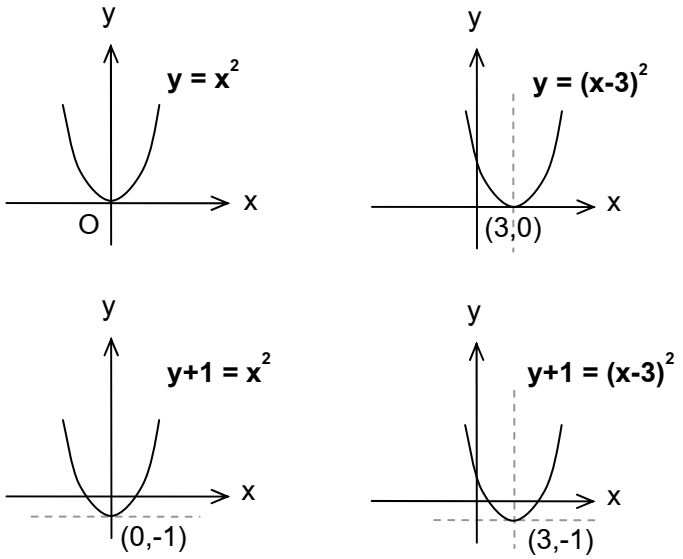


วงกลม	*วงรี*	*พาราโบลา*	*ไฮเพอร์โบลา*
(Circle)	(Ellipse)	(Parabola)	(Hyperbola)

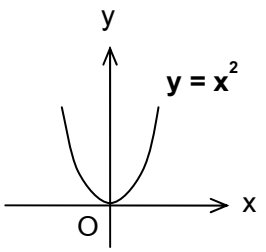
<u>เทคนิคการวาดกราฟ</u>

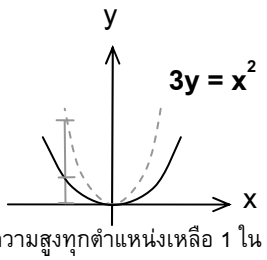
• ก่อนจะศึกษาเรื่องภาคตัดกรวย ต้องทบทวนพื้นฐานการวาดกราฟ ว่าลักษณะของกราฟโดยทั่วๆ ไปนั้นจะเปลี่ยนไปอย่างไร หากมีค่าคงที่มาบวกลบ หรือคูณหาร อยู่กับตัวแปร x หรือ y

(1) <u>เมื่อมีค่าคงที่มาบวกหรือลบ</u> จะเกิดการ *เลื่อนแกนทางขนาน* (Translate)
กล่าวคือ หากเปลี่ยนรูปสมการจาก $f(x,y)=0$ ไปเป็น $f(x-h,y-k)=0$ เมื่อ h,k เป็นค่าคงที่ กราฟรูปเดิมจะถูกเลื่อนไปทางขวา h หน่วย และเลื่อนขึ้นด้านบนอีก k หน่วย (หรือกล่าวว่า จุดกำเนิดถูกเลื่อนไปยังคู่อันดับ (h,k) และรูปกราฟทั้งหมดถูกเลื่อนตามไปด้วย)

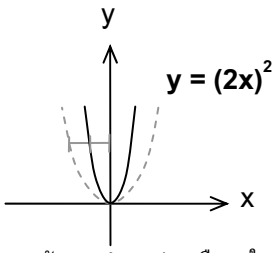


(2) <u>เมื่อมีค่าคงที่ (ที่เป็นบวก) มาคูณหรือหาร</u> จะเกิดการ *ปรับขนาด* (Scale) ทางแกนนั้น กล่าวคือ หากเปลี่ยนรูปสมการจาก $y = f(x)$ ไปเป็น $my = f(nx)$ เมื่อ m, n เป็นค่าคงที่ที่มากกว่า 1 กราฟรูปเดิมจะถูกบีบลงทางแนวนอน n เท่า และบีบลงทางแนวตั้ง m เท่า (ส่วนกรณีที่ m, n น้อยกว่า 1 จะมองว่าเป็นการหาร และกราฟจะถูกขยายออกแทน) ทั้งนี้ต้องใช้แกน h, k ที่ได้จากการเลื่อนแกนแล้ว เป็นแกนกลางสำหรับบีบหรือขยายรูปกราฟ

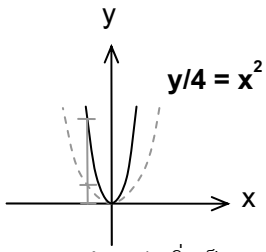




ความสูงทุกตำแหน่งเหลือ 1 ใน 3



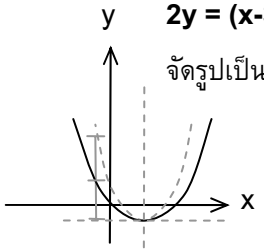
ความกว้างทุกตำแหน่งเหลือ 1 ใน 2



ความสูงทุกตำแหน่งเพิ่มเป็น 4 เท่า

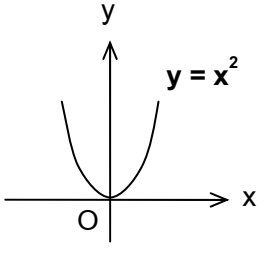
<u>ข้อสังเกต</u> **1.** กราฟในตัวอย่าง สองรูปล่างเป็นกราฟเดียวกัน เพียงแต่มองคนละวิธี

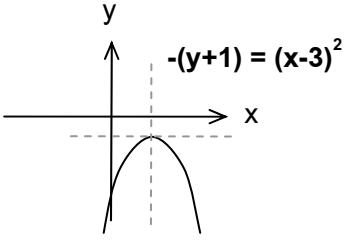
2. หากสมการมีทั้งการบวกลบและคูณหาร จะต้องจัดรูปสมการให้บวกลบอยู่ในวงเล็บ (กระทำกับตัวแปรโดยตรง) แล้วถัดมาจึงเป็นการคูณหาร ดังตัวอย่างต่อไปนี้



เลื่อนแกนไปอยู่ที่ (3,-1) และ
ความสูงทุกตำแหน่งเหลือ 1 ใน 2

(3) <u>เมื่อมีค่าคงที่ (ที่เป็นลบ) มาคูณหรือหาร</u> นอกจากจะมีการขยายหรือบีบตามข้อ (2) แล้ว ยังเกิดการ *พลิก* (Flip) รูปกราฟ โดยใช้แกน h, k นี้เป็นแกนหมุนด้วย (หากตัวแปร x ถูกคูณด้วยลบ จะพลิกสลับซ้ายขวา, และเช่นเดียวกัน หากตัวแปร y ถูกคูณด้วยลบ จะพลิกสลับบนล่าง)



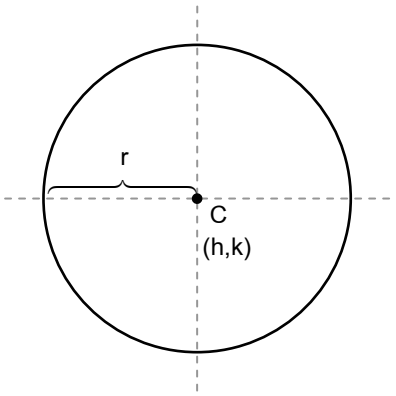


เลื่อนแกนไปอยู่ที่ (3,-1) และ
พลิกรูปกราฟ สลับบนล่าง

<u>วงกลม (Circle)</u>

• <u>นิยาม</u> *วงกลม* คือ “เซตของคู่อันดับที่อยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่ง เป็นระยะเท่าๆ กัน” เรียกจุดคงที่จุดนั้นว่า *จุดศูนย์กลาง* (Center; C) และเรียกระยะทางนั้นว่า *รัศมี* (Radius; r)

• สมการวงกลม สร้างจากสมการระยะทางระหว่างจุดสองจุด (ทฤษฎีบทปีทาโกรัส) หากมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C\ (0,0)$ และรัศมียาว r หน่วย สมการจะเป็น $\boxed{x^2+y^2=r^2}$ แต่ถ้าเลื่อนแกนให้จุดศูนย์กลางไปอยู่ที่ $C\ (h,k)$ สมการจะกลายเป็น $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$



วงกลม

$\boxed{(x-h)^2+(y-k)^2=r^2}$

จุดศูนย์กลาง $C\ (h,k)$

รัศมี r หน่วย

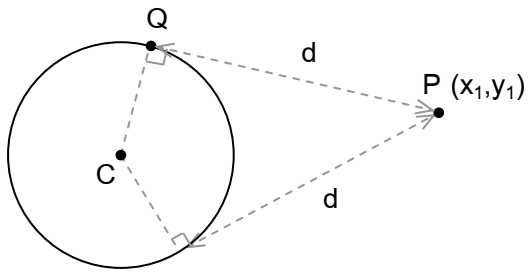
<u>รูปทั่วไป</u>

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

• <u>ข้อสังเกต</u> **1.** จากรูปทั่วไปของสมการวงกลม $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ เมื่อจัดรูปด้วยวิธีกำลังสองสมบูรณ์แล้ว จะทำให้ทราบว่า $(h,k)=(-D/2,-E/2)$

2.1 สมการวงกลมมีพารามิเตอร์ (ค่าคงที่ซึ่งบอกลักษณะกราฟ) อยู่ 3 ตัว คือ D,E,F หรือ h,k,r ดังนั้นการสร้างสมการวงกลมจากจุดที่กราฟผ่าน ต้องกำหนดจุดมาให้ 3 จุด แล้วจึงแก้ระบบสมการ 3 สมการ ซึ่งกรณีนี้สมการ $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ จะคำนวณง่ายกว่า **2.2** แต่ถ้าบอก r มาให้ จะต้องการจุดเพิ่มอีกเพียง 2 จุด เพื่อหาค่า h,k หรือถ้าบอก h,k มาให้ ก็ต้องการอีกเพียงจุดเดียวเพื่อหาค่า r โดยใช้สมการ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

• ระยะทางจากจุด $P\ (x_1,y_1)$ ใดๆ ภายนอกวงกลม มายังจุดสัมผัส Q (ดังภาพ)



$\boxed{d=\sqrt{x_1^2+y_1^2+Dx_1+Ey_1+F}}$

หรือ $d=\sqrt{(x_1-h)^2+(y_1-k)^2-r^2}$

<u>ทฤษฎีบท</u> เส้นสัมผัสวงกลม คือเส้นตรงที่ลากผ่านจุดบนวงกลมเพียงจุดเดียวเท่านั้น (เรียกว่าจุดสัมผัส) และเส้นสัมผัสวงกลมทุกเส้นจะตั้งฉากกับรัศมี (ที่เชื่อมจุดศูนย์กลางกับจุดสัมผัส)

โจทย์

(1) สมการต่อไปนี้ต้องการเลื่อนแกนเพื่อให้ได้รูปที่กำหนด ต้องเลือกจุดใดเป็นจุดกำเนิดจุดใหม่

(1.1) $(x-4)(y+3)=1 \quad \rightarrow \quad \mathbf{xy} = 1$

(1.2) $y=\left| x+1 \right|-2 \quad \rightarrow \quad \mathbf{y}=\left| \mathbf{x} \right|$

(1.3) $x^2+y^2+2x-4y+5=9 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2=k$

(2) จงหาสมการรูปทั่วไปของวงกลม ที่มีลักษณะดังแต่ละข้อต่อไปนี้

(2.1) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(3,4)$ และผ่านจุด $(1,1)$

(2.2) เส้นผ่านศูนย์กลางเส้นหนึ่ง เชื่อมจุด $(1,1)$ กับ $(2,2)$

(2.3) สัมผัสเส้นตรง $y = 2x$ ที่จุดกำเนิด และผ่านจุด $(1,1)$

(2.4) ผ่านจุด $(-6,3)$, $(2,3)$ และ $(-2,7)$

(2.5) ผ่านจุด $(1,-5)$ และผ่านจุดตัดของวงกลม $x^2+y^2-2x+2y-8=0$ กับ $x^2+y^2-3x-3y-8=0$

(3) หาความยาวเส้นสัมผัสที่ลากจากจุด $(0,1)$ ไปยังวงกลม $3x^2+3y^2+11x+15y=-9$

(4) ให้หาสมการเส้นตรงที่สัมผัสวงกลม ตามเงื่อนไขต่อไปนี้

(4.1) สัมผัสวงกลม $x^2+y^2=8$ ที่จุด $(2,2)$

(4.2) สัมผัสวงกลม $x^2+y^2=17$ และมีความชันเป็น 4

[Hint: สร้างสมการเส้นตรงความชันเท่านี้ แต่ผ่านจุดศูนย์กลางก่อน]

(4.3) สัมผัสวงกลม $x^2+y^2=16$ และผ่านจุด $(-1,8)$

[Hint: สร้างสมการเส้นตรงความชันใดๆ ที่ผ่านจุดนี้ แล้วจึงหาค่าความชัน]

(5) ให้หาสมการวงกลม ตามเงื่อนไขต่อไปนี้

(5.1) รัศมี 2 หน่วย และสัมผัสกับวงกลมสองวงนี้ คือ $(x-2)^2+(y+1)^2=1$ และ $(x-6)^2+(y-2)^2=4$ โดยมีจุดศูนย์กลางอยู่ในควอดรันต์ที่ 1

(5.2) รัศมี 1 หน่วย, สัมผัสกับเส้นตรง $y=x+\sqrt{2}$, และสัมผัสกับวงกลม $x^2+y^2-4x+2y+1=0$

(5.3) แนบในสามเหลี่ยมที่เกิดจากเส้นตรงสามเส้นนี้ตัดกัน $2x-3y+21=0$, $3x-2y-6=0$, และ $2x+3y+9=0$ [Hint: หาจุดศูนย์กลางวงกลมก่อน]

(6) จงหาค่า k ที่ทำให้ $x^2+y^2-6x+8y+k=0$ เป็นสมการวงกลม

(7) จงหาค่า $k>0$ ที่น้อยที่สุด ที่ทำให้ $y=kx$ สัมผัสกับ $x^2+y^2-14x+49=k^2$

(8) ถ้า C เป็นจุดศูนย์กลางของกราฟ $x^2+4x+2=-(y^2+8y+9)$ แล้ว ให้หาสมการเส้นตรง OC และสมการวงกลมที่มี OC เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางเส้นหนึ่ง

(9) เส้นตรงเส้นหนึ่งมีความชัน $-4/3$ ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2+y^2-4x+2y=4$ โดยตัดวงกลมที่จุด A กับ B หากกำหนดจุด D $(-1,-2)$ แล้ว ให้หาพื้นที่สามเหลี่ยม ABD

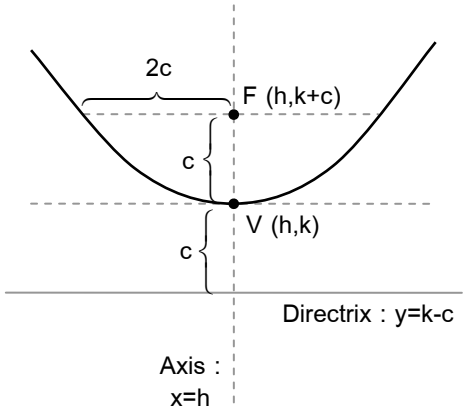
(10) ให้หาสมการกราฟซึ่งจุด P (x,y) ใดๆ บนกราฟเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่สัมผัสกับกราฟ $(x-1)^2=(1-y)(1+y)$ และผ่านจุด A $(-1,0)$ ด้วย

พาราโบลา (Parabola)

• นิยาม *พาราโบลา* คือ “เซตของคู่อันดับที่มีระยะไปถึงจุดคงที่จุดหนึ่ง เท่ากับระยะไปถึงเส้นตรงเส้นหนึ่ง” เรียกจุดคงที่จุดนั้นว่า *จุดโฟกัส* (Focus; F) เรียกเส้นตรงเส้นนั้นว่า *ไดเรกตริกซ์* (Directrix) เรียกเส้นตรงที่ผ่านโฟกัสและตั้งฉากกับไดเรกตริกซ์ ว่า *แกน* (Axis)

• พาราโบลาที่มี *จุดยอด* (Vertex) อยู่ที่ $V(0,0)$ และระยะโฟกัสยาว c หน่วย จะมีสมการเป็น $\boxed{x^2 = 4cy}$ (อ้อมแกน y, กราฟหงายเมื่อค่า c เป็นบวก, กราฟคว่ำเมื่อค่า c ติดลบ) หรือ $\boxed{y^2 = 4cx}$ (อ้อมแกน x, กราฟเปิดขวาเมื่อ c เป็นบวก, กราฟเปิดซ้ายเมื่อ c ติดลบ)

• หากมีการเลื่อนแกน ให้จุดยอดไปอยู่ที่ $V(h,k)$ สมการจะกลายเป็น $(x-h)^2 = 4c(y-k)$ และ $(y-k)^2 = 4c(x-h)$ ตามลำดับ



พาราโบลา

$\boxed{(x-h)^2 = 4c\,(y-k)}$

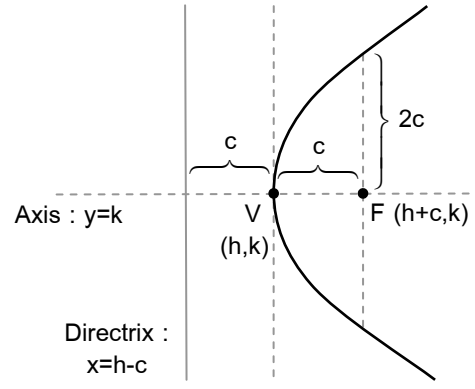
จุดยอด $V(h,k)$

ระยะโฟกัส $|c|$ หน่วย

Latus Rectum ยาว $|4c|$ หน่วย

รูปทั่วไป

$x^2 + Dx + Ey + F = 0$



พาราโบลา

$\boxed{(y-k)^2 = 4c\,(x-h)}$

จุดยอด $V(h,k)$

ระยะโฟกัส $|c|$ หน่วย

Latus Rectum ยาว $|4c|$ หน่วย

รูปทั่วไป

$y^2 + Dx + Ey + F = 0$

นิยาม Latus Rectum คือเส้นแสดงความกว้างของรูปกราฟ ณ ตำแหน่งโฟกัส

• ข้อสังเกต **1.** พาราโบลาอ้อมแกนใด อาจสังเกตได้จาก ตัวแปรนั้นจะยกกำลังหนึ่ง

2. พาราโบลามีพารามิเตอร์ 3 ตัว คือ D, E, F หรือ h, k, c เช่นเดียวกับวงกลม ดังนั้น การสร้างสมการจะใช้วิธีคล้ายกัน แต่พาราโบลาต้องทราบก่อนด้วยว่าเป็นพาราโบลาอ้อมแกนใด

โจทย์

(11) จงหาสมการรูปทั่วไปของพาราโบลา ที่มีลักษณะดังแต่ละข้อต่อไปนี้

(11.1) จุดยอดอยู่ที่ $(-2,3)$ และจุดโฟกัสอยู่ที่ $(5,3)$

(11.2) จุดยอดอยู่ที่ O และจุดปลาย Latus Rectum จุดหนึ่งอยู่ที่ $(-3,6)$

(11.3) จุดยอดอยู่ที่ O และผ่านจุด $(-4,-6)$ โดยมีแกน x เป็นแกนสมมาตร

(11.4) จุดยอดอยู่ที่ $(2,-3)$ และผ่านจุด $(8,2.1)$ โดยแกนสมมาตรตั้งฉากแกน x

(11.5) จุดยอดอยู่ที่ $(5,-2)$ และผ่านจุด $(3,0)$ โดยแกนสมมาตรตั้งฉากกับแกน y

(11.6) จุดโฟกัสอยู่ที่ $(2,2)$ และสมการไดเรกตริกซ์เป็น $x+2=0$

(11.7) ผ่านจุด $(1,3)$, $(9,1)$, และ $(51,-2)$ โดยแกนสมมาตรขนานกับแกน x

(11.8) ผ่านจุด $(-2,3)$, $(3,18)$, และ $(0,3)$

(12) ให้หาระยะจากจุด $P\ (4,-3)$ ซึ่งอยู่บนพาราโบลา $2x^2+3y=0$ ไปถึงจุดโฟกัส

(13) ให้หาส่วนประกอบต่างๆ ของพาราโบลา

(13.1) จุดโฟกัส ความกว้างที่จุดโฟกัส และสมการไดเรกตริกซ์ ของ $x^2-12y=0$

(13.2) ส่วนประกอบทั้งหมดของ $y^2-10y+12x+61=0$

(13.3) จุดโฟกัสของพาราโบลาที่มีจุดยอดที่ $(4,2)$ และมีไดเรกตริกซ์เป็น $x-1=0$

(13.4) จุดตัดแกน x ของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(0,-1/3)$ และจุดโฟกัสอยู่ที่ $(0,7/6)$

(14) ให้หาสมการแสดงทางเดินของจุด $P\ (x,y)$ ซึ่ง

(14.1) อยู่ห่างจากเส้นตรง $y=-4$ เท่ากับระยะห่างจากจุด $(-2,8)$

(14.2) อยู่ห่างจากเส้นตรง $x=-4$ มากกว่าระยะห่างจากจุด $(3,1)$ อยู่ 5 หน่วย

(15) จุดบนโค้ง $4y=(x-1)^2$ ซึ่งอยู่ห่างจากจุดโฟกัส 13 หน่วย จะห่างจากแกน x เท่าใด

(16) ความยาวคอร์ดที่เกิดจากเส้นตรง $2x-y=8$ ตัดกับพาราโบลา $y^2=8x$ เป็นเท่าใด

(17) สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,6)$ และจุดโฟกัสของ $y^2-4x-4y=8$ คือสมการใด

(18) ให้หาสมการพาราโบลาที่มีเส้นตรง $y=5$ เป็นไดเรกตริกซ์ และมีจุดโฟกัสอยู่ที่ศูนย์กลางของกราฟ $x^2-6x=6-2y-y^2$

(19) ให้หาสมการพาราโบลาที่ผ่านจุดตัดของเส้นตรง $x=y$ กับวงกลม $x^2+y^2+6x=0$ โดยมีแกน x เป็นแกนสมมาตร

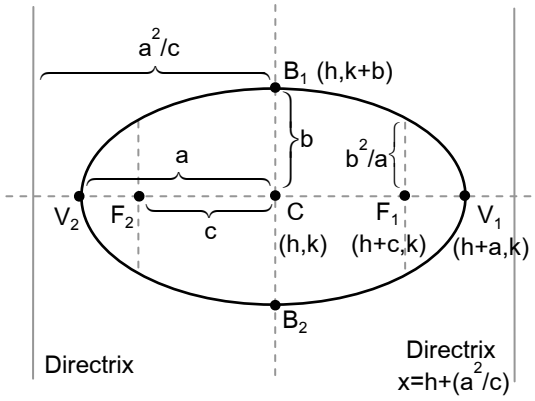
(20) กำหนดให้ไดเรกตริกซ์และแกนของพาราโบลา $y^2-4y+8x=20$ ตัดกันที่จุด P ถ้าวงกลมวงหนึ่งผ่านจุดกำเนิด, จุด P, และจุดโฟกัสของพาราโบลาแล้ว กำลังสองของรัศมีวงกลมเป็นเท่าใด

(21) ให้หาระยะโฟกัสของเลนส์รูปพาราโบลา ซึ่งมีความสูง 6 หน่วย และฐานกว้าง 8 หน่วย

<u>วงรี (Ellipse)</u>

• <u>นิยาม</u> *วงรี* คือ “เซตของคู่อันดับที่ ผลรวมของระยะทางไปถึงจุดคงที่สองจุด มีค่าเท่ากัน” เรียกจุดคงที่สองจุดนั้น ว่า *จุดโฟกัส* (F_1, F_2) และนอกจากนี้ ระยะทางรวมซึ่งเป็นค่าคงที่นั้น จะมีค่าเท่ากับ *ความยาวของแกนเอก* $(2a)$ พอดี

• วงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C\ (0,0)$ และแกนเอกยาว $2a$ หน่วย แกนโทยาว $2b$ หน่วย จะมีสมการเป็น $\boxed{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1}$ (รีตามแกน x) หรือ $\boxed{\left(\frac{y}{a}\right)^2+\left(\frac{x}{b}\right)^2=1}$ (รีตามแกน y)



วงรี

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1}$$

จุดศูนย์กลาง $C\ (h,k)$

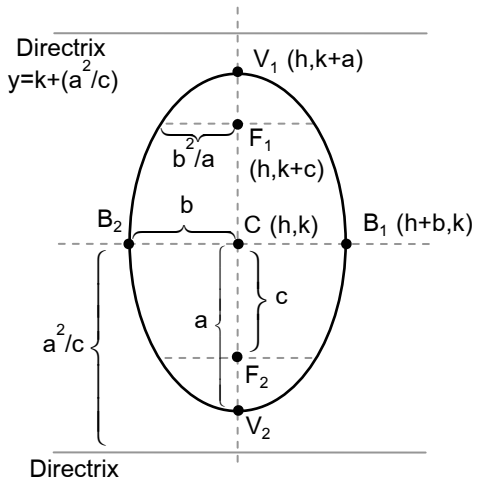
แกนเอกยาว $2a$ แกนโทยาว $2b$

ระยะโฟกัส $c=\sqrt{a^2-b^2}$

Latus Rectum ยาว $2b^2/a$

<u>รูปทั่วไป</u>

$$Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$$



วงรี

$$\boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1}$$

จุดศูนย์กลาง $C\ (h,k)$

แกนเอกยาว $2a$ แกนโทยาว $2b$

ระยะโฟกัส $c=\sqrt{a^2-b^2}$

Latus Rectum ยาว $2b^2/a$

<u>รูปทั่วไป</u>

$$Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$$

<u>นิยาม</u> *แกนเอก* (Major Axis) คือเส้นแสดงความยาวของวงรี ($\overline{V_1V_2}$) และ *แกนโท* (Minor Axis) คือเส้นแสดงความกว้างของวงรี ($\overline{B_1B_2}$)

• <u>ข้อสังเกต</u> **1.** สมการวงรีเกิดจากการขยายขนาดทางแกน x, y ของวงกลมรัศมี 1 หน่วย

2. สำหรับวงรีนั้น $a > b$ เสมอ ดังนั้นตัวเลขใดมีค่ามากกว่า ตัวนั้นก็จะเป็น a (เป็นแกนเอก)

3. วงรีมีพารามิเตอร์ถึง 4 ตัว การสร้างสมการวงรีจากจุดที่กราฟผ่านถึง 4 จุดนั้นไม่นิยมกระทำ

โจทย์

(22) จงหาสมการรูปทั่วไปของวงรี ที่มีลักษณะดังแต่ละข้อต่อไปนี้

(22.1) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(3,-1)$ แกนเอกขนานกับแกน y และยาว 8 หน่วย ส่วนแกนโทยาว 6 หน่วย

(22.2) จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด มีจุดยอดอยู่ที่ $(0,8)$ และมีโฟกัสอยู่ที่ $(0,-5)$

(22.3) จุดยอดอยู่ที่ $(-4,2)$ และ $(2,2)$ โดยแกนโทยาว 4 หน่วย

(22.4) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-2,1)$ มีจุดโฟกัสที่ $(-2,4)$ และผ่านจุด $(-6,1)$

(22.5) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(2,1)$ มีจุดยอดที่ $(2,-4)$ และค่า $c:a=2:5$

(23) ให้หาส่วนประกอบต่างๆ ทั้งหมดของวงรี

(23.1) $4x^2+9y^2=36$

(23.2) $9x^2+5y^2-54x-50y+26=0$

(23.3) $5x^2+9y^2-10x=40$

(24) ให้หาสมการแสดงทางเดินของจุด $P(x,y)$ ซึ่ง

(24.1) ระยะห่างจากจุด $(4,0)$ และจุด $(-4,0)$ รวมกันเป็น 12 หน่วย

(24.2) ระยะห่างจากจุด $(2,7)$ และจุด $(2,1)$ รวมกันเป็น 10 หน่วย

(25) ฐานของสามเหลี่ยมยาว 6 หน่วย และผลบวกของอีกสองด้านเป็น 10 หน่วย

(25.1) ถ้าฐานตรึงอยู่กับที่ กราฟที่ประกอบด้วยจุดยอดของสามเหลี่ยมจะเป็นรูปใด

(25.2) ให้หาสมการกราฟดังกล่าว ถ้าฐานตั้งอยู่บนแกน x โดยมีจุดกำเนิดอยู่ตรงกลาง

(26) ให้หาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางของ $4x^2+9y^2-48x+72y+144=0$ และตั้งฉากกับ $3x+4y=5$

(27) ระยะห่างระหว่างเส้นตรงคู่ขนานที่ทำมุม 45° กับแกน x และผ่านจุดโฟกัสทั้งสองของกราฟ $x^2+3y^2-4x-2=0$ มีค่าเท่าใด

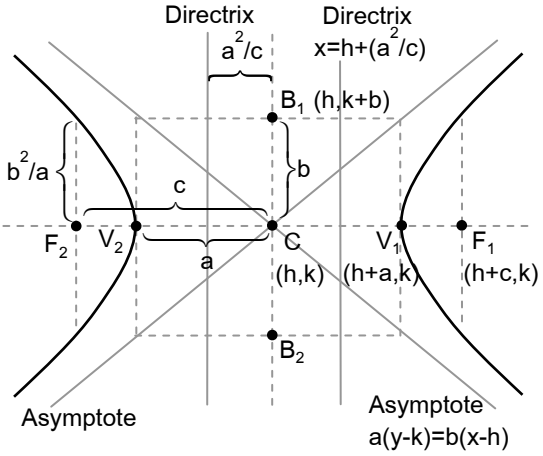
(28) ให้จุด F_1 และ F_2 เป็นจุดโฟกัสของวงรี $kx^2+4y^2-4y=8$ และวงรีนี้ตัดแกน y ที่จุด B ซึ่งอยู่เหนือแกน x ถ้าสามเหลี่ยม F_1F_2B มีพื้นที่ $3\sqrt{7}/4$ ตารางหน่วย ค่า k เป็นเท่าใด

(29) นายแดงปีนขึ้นไปบนสะพานโค้งที่มีลักษณะเป็นครึ่งวงรี ปลายทั้งสองห่างกัน 4 เมตร และมีระยะสูงสุด 1 เมตร ถ้าเขาอยู่บนสะพานในตำแหน่งที่ห่างจากปลายข้างหนึ่ง เป็นระยะตามแนวราบ 80 ซม. เขาจะอยู่สูงจากพื้นกี่เซนติเมตร

ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola)

• นิยาม *ไฮเพอร์โบลา* คือ “เซตของคู่อันดับที่ ผลต่างของระยะทางไปถึงจุดคงที่สองจุด มีค่าเท่ากัน” เรียกจุดคงที่สองจุดนั้น ว่า *จุดโฟกัส* (F_1, F_2) และนอกจากนี้ ผลต่างระยะทางซึ่งเป็นค่าคงที่นั้น จะมีค่าเท่ากับ *ความยาวของแกนตามขวาง* $(2a)$ พอดี

• ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่ $C(0,0)$ แกนตามขวางยาว $2a$ และแกนสังยุคยาว $2b$ จะมีสมการเป็น $\boxed{\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1}$ (แบบอ้อมแกน x) หรือ $\boxed{\left(\frac{y}{a}\right)^2-\left(\frac{x}{b}\right)^2=1}$ (อ้อมแกน y)



ไฮเพอร์โบลา

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

จุดศูนย์กลาง $C(h,k)$

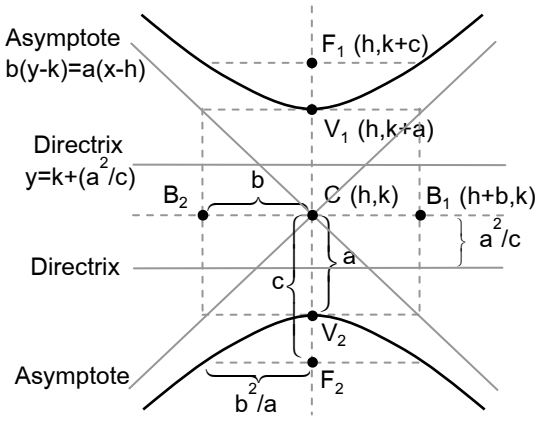
แกนตามขวาง $2a$ แกนสังยุค $2b$

ระยะโฟกัส $c=\sqrt{a^2+b^2}$

Latus Rectum ยาว $2b^2/a$

รูปทั่วไป

$$Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$$



ไฮเพอร์โบลา

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

จุดศูนย์กลาง $C(h,k)$

แกนตามขวาง $2a$ แกนสังยุค $2b$

ระยะโฟกัส $c=\sqrt{a^2+b^2}$

Latus Rectum ยาว $2b^2/a$

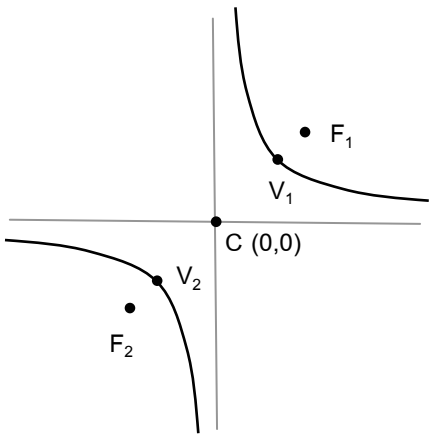
รูปทั่วไป

$$Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$$

นิยาม *แกนตามขวาง* (Transverse Axis) $\overline{V_1V_2}$ และ *แกนสังยุค* (Conjugate Axis) $\overline{B_1B_2}$ ใช้ในการสร้าง *เส้นกำกับ* (Asymptote) สองเส้น เพื่อบังคับความกว้างของไฮเพอร์โบลา

• ข้อสังเกต **1.** การวาดกราฟไฮเพอร์โบลา เปรียบเสมือนว่ามีวงรีอยู่ในกรอบตรงกลาง โดยใช้จุดศูนย์กลางร่วมกัน และแกนตามขวางกับแกนสังยุคจะทับแกนเอกและโทของวงรีพอดี แต่สำหรับไฮเพอร์โบลา a ไม่จำเป็นต้องมากกว่า b (แกนใดเครื่องหมายบวก จะอ้อมแกนนั้น) **2.** ถ้า $a=b$ (สี่เหลี่ยมจัตุรัส) รูปวงรีตรงกลางจะกลายเป็นวงกลม สามารถเรียกไฮเพอร์โบลานั้นว่า *ไฮเพอร์โบลามุมฉาก* (Rectangular Hyperbola)

• นอกจากนี้ไฮเพอร์โบลามุมฉากอีกรูปแบบหนึ่ง ได้แก่สมการในรูป $\boxed{xy = k}$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่ ไฮเพอร์โบลานี้มีแกนนอนและแกนตั้งเป็นเส้นกำกับ และมีส่วนประกอบต่างๆ ดังภาพ



ไฮเพอร์โบลามุมฉาก

$\boxed{xy = k}$ $k > 0$

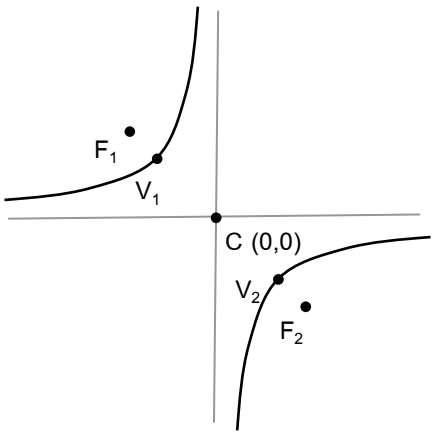
จุดศูนย์กลาง $C\ (0,0)$

จุดยอด $V_1\ (\sqrt{k}, \sqrt{k})$

$V_2\ (-\sqrt{k}, -\sqrt{k})$

จุดโฟกัส $F_1\ (\sqrt{2k}, \sqrt{2k})$

$F_2\ (-\sqrt{2k}, -\sqrt{2k})$



ไฮเพอร์โบลามุมฉาก

$\boxed{xy = k}$ $k < 0$

จุดศูนย์กลาง $C\ (0,0)$

จุดยอด $V_1\ (-\sqrt{k}, \sqrt{k})$

$V_2\ (\sqrt{k}, -\sqrt{k})$

จุดโฟกัส $F_1\ (-\sqrt{2k}, \sqrt{2k})$

$F_2\ (\sqrt{2k}, -\sqrt{2k})$

• <u>นิยาม</u> สำหรับวงรีและไฮเพอร์โบลา *ค่าความเยื้องจุดศูนย์กลาง* (Eccentricity; e) คือค่าที่บอกว่าจุดโฟกัสและจุดยอด อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางเป็นอัตราส่วนเท่าใด นั่นคือ $\boxed{e = c / a}$

<u>ข้อสังเกต</u> ค่า e ของวงรี อยู่ระหว่าง 0 กับ 1 เสมอ (ถ้า e ยิ่งมากขึ้น วงรีจะยิ่งแคบลง) และค่า e ของไฮเพอร์โบลา มากกว่า 1 เสมอ (ถ้า e ยิ่งมากขึ้น กราฟจะยิ่งกว้างขึ้น)

โจทย์

(30) จงหาสมการรูปทั่วไปของไฮเพอร์โบลา ที่มีลักษณะดังแต่ละข้อต่อไปนี้

(30.1) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-3,1)$ มีจุดยอดที่ $(2,1)$ และแกนสังยุคยาว 6 หน่วย

(30.2) จุดโฟกัสอยู่ที่ $(-1,-6)$ และ $(-1,4)$ โดยแกนตามขวางยาว 6 หน่วย

(30.3) จุดโฟกัสอยู่ที่ $(0,4)$ และ $(0,-4)$ และมีจุดปลายแกนสังยุคเป็น $(3,0)$

(31) ให้หาส่วนประกอบต่างๆ ทั้งหมดของไฮเพอร์โบลา

(31.1) $9x^2-4y^2=36$

(31.2) $9x^2-16y^2-18x-64y-199=0$

(31.3) $6x^2-y^2-36x-2y+59=0$

(31.4) $6x^2-10y^2-12x-40y-94=0$

(32) ให้หาสมการแสดงทางเดินของจุด $P(x,y)$ ซึ่งผลต่างของระยะทางจาก $P(x,y)$ ไปยังจุด $(3,0)$ กับ $(-3,0)$ เป็น 4 หน่วย

(33) ให้หาสมการกราฟที่ทำให้ผลคูณระยะทางจาก $P(x,y)$ ใดๆ ในกราฟ ไปยังเส้นตรง $4x-3y=-11$ และ $4x+3y=-5$ เป็น $144/25$

(34) ให้หาส่วนประกอบของกราฟรูปต่อไปนี้

(34.1) จุดยอด และจุดโฟกัสของ $xy=-4$

(34.2) จุดศูนย์กลางของ $xy+2x-y=3$

(35) ถ้าภาคตัดกรวยรูปหนึ่งมีสมการเป็น $9x^2-18x=16y^2+64y+199$ แล้ว ผลรวมของระยะทางจากจุดโฟกัสทั้งสองไปถึงเส้นตรง $3x+4y=8$ เป็นเท่าใด

(36) ถ้าให้ F_1 เป็นจุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลา $6x^2-10y^2-12x-40y-94=0$ และอยู่ในควอดรันต์ที่ 4 จงหาสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ F_1 และมีไดเรกตริกซ์เป็นแกนสังยุคของไฮเพอร์โบลา

(37) กำหนดไฮเพอร์โบลามีสมการเป็น $(x-1)^2-(y-2)^2=36$ จงหาสมการวงรี ซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใดๆ บนวงรี ไปยังจุดที่ไฮเพอร์โบลาตัดแกน x ทั้งสองจุด เป็น 8 หน่วย

(38) กำหนด E แทนวงรี $6x^2+5y^2+12x-20y-4=0$ จงหาสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกับ E, มีจุดยอดอยู่ที่เดียวกับจุดโฟกัสของ E, และมีความยาวแกนสังยุคเท่ากับความยาวแกนโทของ E พอดี

<u>โจทย์ทบทวน</u> ให้สังเกตว่ากราฟของสมการแต่ละข้อ เป็นภาคตัดกรวยรูปใด

(1) $x^2+y^2-6x-8y+12=0$

(2) $x^2+2y^2-2x+4y-13=0$

(3) $x^2+2x-y+3=0$

(4) $x^2-y^2-2x-2=0$

(5) $x^2-y^2=4$

(6) $3x^2+3y^2-9x-6y+20=0$

(7) $3x^2-3y^2-9x-6y+20=0$

(8) $3x^2-2=-y^2+4y$

(9) $3x^2-2=y^2+4y$

(10) $3x^2-2=4y$

<u>เฉลย</u> (1.1) $(4,-3)$ (1.2) $(-1,-2)$ (1.3) $(-1,2)$ (2.1) $x^2+y^2-6x-8y+12=0$ (2.2) $x^2+y^2-3x-3y+4=0$ (2.3) $x^2+y^2-4x+2y=0$ (2.4) $x^2+y^2+4x-6y-3=0$ (2.5) $x^2+y^2-3x+3y-8=0$ (3) 3 (4.1) $x+y=4$ (4.2) $4x-y=\pm 17$ (4.3) $4x+3y=20,\ 12x-5y=-52$ (5.1) $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ (5.2) $(x-2)^2+(y-2)^2=1,\ (x+1)^2+(y+1)^2=1$ (5.3) $(x+1)^2+(y-2)^2=13$ (6) $k<25$ (7) $4\sqrt{3}$ (8) $y=2x,\ (x+1)^2+(y+2)^2=5$ (9) 9 (10) $12x^2-4y^2=3\ (x<0)$ (11.1) $y^2-28x-6y-47=0$ (11.2) $y^2+12x=0$ (11.3) $y^2+9x=0$ (11.4) $x^2-4x+40y-116=0$ (11.5) $x^2-10x-2y+21=0$ (11.6) $y^2-8x-4y+4=0$ (11.7) $2y^2-x-12y+19=0$ (11.8) $x^2+2x-y+3=0$ (12) $\sqrt{1801}/8$ (13.1) $(3,0),\ y+3=0,\ 12$ (13.2) V $(-3,5)$, F $(-6,5)$, Latus Rectum ยาว 12, และไดเรกตริกซ์คือแกน y (13.3) $(7,2)$ (13.4) $(\pm\sqrt{2},0)$ (14.1) $x^2+4x-24y-44=0$ (14.2) $y^2-4x-2y+9=0$ (15) 12 (16) $6\sqrt{5}$ (17) $4x-3y+14=0$ (18) $x^2-6x+12y-15=0$ (19) $y^2+3x=0$ (20) $145/16$ (21) $2/3$ หน่วย (22.1) $16x^2+9y^2-96x+18y+9=0$ (22.2) $64x^2+39y^2=2496$ (22.3) $4x^2+9y^2-16x+18y-11=0$ (22.4) $25x^2+16y^2+100x-32y-284=0$ (22.5) $25x^2+21y^2-100x+42y-404=0$ (23.1) C $(0,0)$, V $(\pm 3,0)$, F $(\pm\sqrt{5},0)$, B $(0,\pm 2)$, Latus Rectum ยาว $8/3$, ไดเรกตริกซ์ $x=\pm 9/\sqrt{5}$ (23.2) C $(3,5)$, V $(3,5\pm 6)$, F $(3,5\pm 4)$, B $(3\pm\sqrt{20},5)$, Latus Rectum ยาว $20/3$, ไดเรกตริกซ์ $x=5\pm 9$ (23.3) C $(1,0)$, V $(1\pm 2\sqrt{2},0)$, F $(1\pm 4\sqrt{2}/3,0)$, B $(1,\pm 4\sqrt{10}/3)$, Latus Rectum ยาว $10\sqrt{2}/9$, ไดเรกตริกซ์ $x=1\pm 3\sqrt{2}$ (24.1) $5x^2+9y^2=180$ (24.2) $25x^2+16y^2+100x-128y-44=0$ (25.1) วงรี (25.2) $16x^2+25y^2=400$ (26) $4x-3y=36$ (27) $2\sqrt{2}$ (28) $9/4$ (29) 80 (30.1) $9x^2-25y^2+54x+50y-169=0$ (30.2) $9x^2-16y^2+18x-32y+137=0$ (30.3) $7x^2-9y^2+63=0$ (31.1) C $(0,0)$, V $(\pm 2,0)$, F $(\pm\sqrt{13},0)$, B $(0,\pm 3)$, Latus Rectum ยาว 9, ไดเรกตริกซ์ $x=\pm 4/\sqrt{13}$ (31.2) C $(1,-2)$, V $(1\pm 4,-2)$, F $(1\pm 5,-2)$, B $(1,-2\pm 3)$, Latus Rectum ยาว 4.5, ไดเรกตริกซ์ $x=1\pm 16/5$ (31.3) C $(3,-1)$, V $(3,-1\pm\sqrt{6})$, F $(3,-1\pm\sqrt{7})$, B $(3\pm 1,-1)$, Latus Rectum ยาว $\sqrt{2/3}$, ไดเรกตริกซ์ $y=-1\pm 6/\sqrt{7}$ (31.4) C $(1,-2)$, V $(1\pm\sqrt{10},-2)$, F $(1\pm 4,-2)$, B $(1,-2\pm\sqrt{6})$, Latus Rectum ยาว $6\sqrt{2/5}$, ไดเรกตริกซ์ $x=1\pm 2.5$ (32) $5x^2-4y^2=20$ (33) $16x^2-9y^2+64x+18y+55=\pm 144$ (34.1) V $(\pm 2,\mp 2)$, F $(\pm 2\sqrt{2},\mp 2\sqrt{2})$ (34.2) $(1,-2)$ (35) $42/5$ (36) $(y+2)^2+8(x+1)=0$ (37) $\sqrt{92}\,(x-1)^2+48y^2=16\sqrt{92}$ (38) $(x+1)^2-5(y-2)^2=-5$

<u>เฉลยโจทย์ทบทวน</u> (1) วงกลม (2) วงรี (3) พาราโบลา (4) ไฮเพอร์โบลา (5) ไฮเพอร์โบลา (6) วงกลม (7) ไฮเพอร์โบลา (8) วงรี (9) ไฮเพอร์โบลา (10) พาราโบลา

ความสัมพันธ์ (Relation)

คู่อันดับ และผลคูณคาร์ทีเซียน

• *คู่อันดับ* (Ordered Pair) ประกอบด้วยสมาชิกสองตัวในรูป (a,b) ซึ่งไม่สามารถเปลี่ยนลำดับสมาชิกตัวหน้ากับตัวหลังได้ และ $(a,b)=(c,d)$ ก็ต่อเมื่อ $a=c$ และ $b=d$ เท่านั้น

• *ผลคูณคาร์ทีเซียน* (Cartesian Product) คือผลคูณของเซต ... เซต $A\times B$ (เอคูณบี) คือเซตของคู่อันดับ ที่สมาชิกตัวหน้ามาจากเซต A และสมาชิกตัวหลังมาจากเซต B ครบทุกคู่

• หรือเขียนแบบเงื่อนไขได้ว่า $A\times B=\{(a,b)\mid a\in A \text{ และ } b\in B\}$

เช่น $A=\{0,1,2\}$, $B=\{1,3\}$ จะได้

$A\times B=\{(0,1),(0,3),(1,1),(1,3),(2,1),(2,3)\}$

$A\times A=\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)\}$

ข้อสังเกต **1.** $\boxed{n(A\times B)=n(A)\cdot n(B)}$

2. $n(A\times\varnothing)=n(A)\cdot n(\varnothing)=0$ ดังนั้น $A\times\varnothing=\varnothing$

3. $A\times B=B\times A$ ก็ต่อเมื่อ $A=B$ หรือมีเซตใดเซตหนึ่งเป็น $\varnothing$

ความสัมพันธ์

• *ความสัมพันธ์* (Relation : r) คือเซตของคู่อันดับ

นิยาม "*ความสัมพันธ์จาก A ไป B*" (from A to B) คือเซตของคู่อันดับที่สมาชิกตัวหน้ามาจากเซต A และสมาชิกตัวหลังมาจากเซต B แต่ไม่จำเป็นต้องครบทุกคู่

• ดังนั้น $\boxed{\text{"ความสัมพันธ์จาก } A \text{ ไป } B\text{" คือสับเซตของ } A\times B \text{ ซึ่งมีได้ทั้งหมด } 2^{n(A\times B)} \text{ แบบ}}$

สัญลักษณ์ที่ใช้แทนคำว่า "ความสัมพันธ์จาก A ไป B" คือ $r=\{(x,y)\in A\times B\mid .....\}$

• หมายเหตุ **1.** $r=\{(x,y)\in A\times A\mid .....\}$ เรียกว่า "ความสัมพันธ์ภายใน A" (in A)

2. ถ้าไม่ระบุว่าเป็นความสัมพันธ์จากเซตใดไปเซตใด จะหมายถึงเซตจำนวนจริง $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

• ตัวอย่างเช่น $A=\{2,3,4\}$ และ $B=\{1,3,5,8\}$

จะได้ $A\times B=\{(2,1),(2,3),(2,5),(2,8),(3,1),(3,3),(3,5),\ldots,(4,8)\}$

และมี $r\subset A\times B$ ทั้งสิ้น $2^{3\times 4}=4096$ แบบ ... ทุกแบบสามารถเขียนเงื่อนไขได้ เช่น

$r_1=\{(x,y)\in A\times B\mid y\le x\}$ จะได้ $r_1=\{(2,1),(3,1),(3,3),(4,1),(4,3)\}$

$r_2=\{(x,y)\in A\times B\mid y=x+1\}$ จะได้ $r_2=\{(2,3),(4,5)\}$

$r_3=\{(x,y)\in A\times B\mid x \text{ หาร } y \text{ ลงตัว}\}$ จะได้ $r_3=\{(2,8),(3,3),(4,8)\}$

$r_4=\{(x,y)\in A\times B\mid x^3<y\}$ จะได้ $r_4=\varnothing$

โจทย์

(1) กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง ข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

(1.1) $\forall a \forall b\,[(a,b) \neq (b,a)]$

(1.2) $\forall a \forall b\,[(a,b) \neq (c,d) \rightarrow a \neq c$ และ $b \neq d]$

(1.3) $\exists a \exists b\,[(a+2b,1) = (-1, b+a/2)]$

(2) ถ้า $(3x+5, 8-4y) = (-5,-6)$ และ $(y,2) = (-p,2)$ แล้ว ให้หา $(xp, x/p)$

(3) กำหนดให้ $(a,b) * (c,d) = (a-c, b+d)$ ถ้า $(3,4) * (0,0) = (x,y) * (3,4)$ แล้ว ให้หา (x,y)

(4) กำหนด A, B, C เป็นเซตใดๆ แล้ว ข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

(4.1) ถ้า A เป็นเซตอนันต์ และ B เป็นเซตจำกัดแล้ว $A \times B$ เป็นเซตอนันต์

(4.2) ถ้า $A \times B$ เป็นเซตอนันต์ แล้ว A เป็นเซตอนันต์ หรือ B เป็นเซตอนันต์

(4.3) ถ้า $A \times B = A \times C$ แล้ว $B = C$

(4.4) ถ้า $A \times B = \varnothing$ แล้ว $A = B = \varnothing$

(4.5) $A \times B = B \times A$ ก็ต่อเมื่อ $A = B$

(4.6) $(A \cap B) \times C \subset A \times C \subset (A \cup B) \times C$

(4.7) $A \times B \neq A$ และ $A \times B \neq B$

(4.8) มีเซต A บางเซต ที่ทำให้ $A \cap (A \times B) \neq \varnothing$

(5) ข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

(5.1) ถ้า $A = \{4,5,6,\{4,5,6\}\}$ และ $B = \{4,5,\{4,5\}\}$ แล้ว $n[P(A) \times P(B)] = 128$

(5.2) ถ้า $A = \{3,4,5,\ldots,32\}$, $B = \{7,8,9,\ldots,40\}$ และ $C = \{0,1,2,\ldots,25\}$ แล้ว $n[(A \times B) \cap (A \times C)] = 570$

(5.3) ถ้า $A = \{0,1,2,\ldots,28\}$ และ $B = \{-3,-2,-1,\ldots,4\}$ แล้ว $n[(A \times B) \cup (B \times A)] = 279$

(6) กำหนดให้ $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\}$, $B = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k\}$ โดยที่ $m \leq k$ ถ้า $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (B \cap A)$ แล้ว $n[(A \times B) \cup (B \times A)]$ มีเท่าใด

(7) ถ้า $n(\mathcal{U}) = 10$, $n(A' \cap B') = 2$, $n(A' \cup B') = 9$ และ $n(B) - n(A) = 1$ แล้ว ให้หาจำนวนความสัมพันธ์ต่างๆ กันจาก A ไป B

(8) [Ent'39] ถ้า $n(A) = 10$ แล้ว ให้หาจำนวนความสัมพันธ์ทั้งหมดจาก $A \times A$ ไป A

(9) กำหนดให้ $A = \{1,2,3\}$ และ $B = \{0,4\}$ แล้ว ข้อความต่อไปนี้ถูกต้องหรือไม่

(9.1) มีความสัมพันธ์จาก A ไป B ทั้งหมด 64 เซต

(9.2) มีความสัมพันธ์จาก A ไป B ที่โดเมนเท่ากับ A ทั้งหมด 27 เซต

(10) กำหนดให้ $n(A) = 3$ และ $n(B) = 4$ แล้ว ข้อความต่อไปนี้ถูกต้องหรือไม่

(10.1) จำนวนความสัมพันธ์จาก A ไป B เท่ากับจำนวนความสัมพันธ์จาก B ไป A

(10.2) จำนวนความสัมพันธ์จาก A ไป B ที่โดเมนเป็น A มีทั้งหมด 15^3 เซต

(10.3) จำนวนความสัมพันธ์จาก B ไป A ที่โดเมนเป็น B มีทั้งหมด 2401 เซต

(10.4) จำนวนความสัมพันธ์ภายใน A ที่โดเมนเป็น A มีทั้งหมด 343 เซต

(11) ให้เขียน $r_1 \cap r_2$ แบบแจกแจงสมาชิก เมื่อ

(11.1) $r_1 = \{(x,y) \in \mathbb{I}\times\mathbb{I} \mid x+y=1\}$, $r_2 = \{(x,y) \in \mathbb{I}\times\mathbb{I} \mid x-y=3\}$

(11.2) $r_1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2=16\}$, $r_2 = \{(x,y) \mid y=4-x^2\}$

(12) ถ้า $A = \{1,2,3,\ldots,20\}$, $B = \{0,1,2,\ldots,25\}$

และ $r = \{(x,y) \in A\times B \mid y \geq x\}$ ให้หาจำนวนคู่อันดับภายใน r

<u>โดเมน (Domain) และเรนจ์ (Range)</u>

• "โดเมน (D) ของความสัมพันธ์" คือเซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับ

"เรนจ์ หรือพิสัย (R) ของความสัมพันธ์" คือเซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับ

นั่นคือ $\boxed{D_r = \{x \mid (x,y) \in r\} \text{ และ } R_r = \{y \mid (x,y) \in r\}}$

• เช่นในตัวอย่างข้างต้น $D_{r_1} = \{2,3,4\}$, $R_{r_1} = \{1,3\}$,

$D_{r_2} = \{2,4\}$, $R_{r_2} = \{3,5\}$ และ $D_{r_4} = R_{r_4} = \varnothing$

<u>ข้อสังเกต</u> ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B แล้ว $\boxed{D_r \subset A \text{ และ } R_r \subset B}$

• การหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ภายใน $\mathbb{R}$ ซึ่งบอกเป็นเงื่อนไข (สมการ)

ให้พิจารณาเงื่อนไข ว่าหากมีสิ่งเหล่านี้คือ การหาร, การถอดราก, ค่าสัมบูรณ์, การยกกำลัง

จะมีข้อจำกัดเกิดขึ้น กล่าวคือ

- $a = \frac{b}{c}$ จะได้ว่า $c \neq 0$
- $a = \sqrt[n]{b}$ ถ้า n เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า $a \geq 0$ และ $b \geq 0$
- $a = b^n$ ถ้า n เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า $a \geq 0$
- $a = |b|$ จะได้ว่า $a \geq 0$

โดยการหาโดเมน จะพิจารณาในรูป $y = \ldots(x)\ldots$

และการหาเรนจ์ หากเป็นไปได้ควรจัดรูปให้กลายเป็น $x = \ldots(y)\ldots$ แล้วจึงค่อยพิจารณา

• <u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $r = \{(x,y) \mid y = \sqrt{4-x^2}\}$ จะได้ว่า

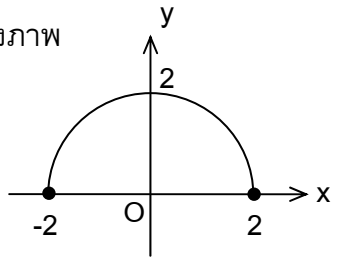
(1) การหาโดเมน พบว่ามีรากที่สอง ดังนั้น $4-x^2 \geq 0$ หรือ <u>$-2 \leq x \leq 2$</u>

(2) การหาเรนจ์ เนื่องจากมีรากที่สอง ดังนั้น <u>$y \geq 0$</u> เสมอ จากนั้นจัดรูปเป็น $x = \pm\sqrt{4-y^2}$

ซึ่งจะได้ว่า $4-y^2 \geq 0$ หรือ <u>$-2 \leq y \leq 2$</u> นำเงื่อนไขมารวมกันได้เป็น <u>$0 \leq y \leq 2$</u>

ดังนั้น <u>ตอบ</u> $D_r = [-2,2]$ และ $R_r = [0,2]$

• <u>หมายเหตุ</u> หากได้ศึกษาเรื่องกราฟวงกลม ในบทเรียน “ภาคตัดกรวย” จะทราบว่า สมการ $y = \sqrt{4-x^2}$ อยู่ในรูปแบบของวงกลม $x^2 + y^2 = 4$ ดังภาพ (เป็นครึ่งวงกลมเนื่องจากมีเครื่องหมายรากที่สอง ทำให้ $y \geq 0$) ซึ่งจากกราฟ จะเห็นโดเมนและเรนจ์ได้ชัดเจนกว่าการคำนวณ



<u>อินเวอร์สของความสัมพันธ์</u>

• r^{-1} คือ *อินเวอร์ส* ของ r โดยที่ $\boxed{r^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in r\}}$

อธิบายได้ว่า r^{-1} สามารถหาได้จาก การสลับที่สมาชิกตัวหน้าและหลังของคู่อันดับใน r หรือถ้าเป็นความสัมพันธ์แบบเงื่อนไข ก็หาได้จากการสลับที่ระหว่าง x และ y นั่นเอง

• เช่น ถ้า $r = \{(2,1),(3,3),(4,5)\}$ จะได้ $r^{-1} = \{(1,2),(3,3),(5,4)\}$

แต่ถ้าเป็นแบบเงื่อนไข $r = \{(x,y) \mid y = 2x-3\}$ สามารถเขียน r^{-1} ได้หลายแบบ เช่น $r = \{(y,x) \mid y = 2x-3\}$ หรือ $r = \{(x,y) \mid x = 2y-3\}$ หรือ $r = \{(x,y) \mid y = \frac{x+3}{2}\}$ ซึ่งแบบสุดท้าย (เขียนในรูปของ y) นี้เป็นที่นิยมมากกว่า

<u>ข้อสังเกต</u> $\boxed{D_{r^{-1}} = R_r \text{ และ } R_{r^{-1}} = D_r \text{ เสมอ}}$

<u>โจทย์</u>

(13) ให้หาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

(13.1) $r = \{(x,y) \mid xy = 2\}$

(13.2) $r = \{(x,y) \mid (x-2)(y-1) = 1\}$

(13.3) $r = \{(x,y) \mid y = \frac{1}{x-1}\}$

(13.4) $r = \{(x,y) \mid y = \frac{2x-3}{x+1}\}$

(13.5) $r = \{(x,y) \mid y = \frac{x+1}{x-1},\ x > 1\}$

(14) ให้หาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

[<u>Hint</u> : บางสมการควรจัดรูปให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์]

(14.1) $r = \{(x,y) \mid y = x^2\}$

(14.2) $r = \{(x,y) \mid \sqrt{y} = x\}$

(14.3) $r = \{(x,y) \mid y = x^2 - 2x - 3\}$

(14.4) $r = \{(x,y) \mid y = 3 + \sqrt{x+1}\}$

(14.5) $r = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 16\}$

(14.6) $r = \{(x,y) \mid y = \sqrt{16-x^2}\}$

(14.7) $r = \{(x,y) \mid y = \frac{1}{2}\sqrt{4-3x-x^2}\ \}$

(14.8) $r = \{(x,y) \mid x^2+y^2-6x+4y-3 = 0\}$

(15) ให้หาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

(15.1) $r = \{(x,y) \mid y = \frac{1}{x^2-x}\}$

(15.2) $r = \{(x,y) \mid y = \frac{1}{x^2-4x+3}\}$

(15.3) $r = \{(x,y) \mid y = \frac{\sqrt{x+1}}{x}\}$

(15.4) $r = \{(x,y) \mid 2x^2+y^2-2xy+x+1 = 0\}$

(15.5) $r = \{(x,y) \mid x^2y^2-y^2-x-2 = 0\}$

(15.6) $r = \{(x,y) \mid xy^2-xy-2y^2+2y-6x+11 = 0\}$

(16) ให้หาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

(16.1) $r = \{(x,y) \mid y = \frac{3}{|x+3|-4}\}$

(16.2) $r = \{(x,y) \mid y = \big||x+2|-|x|\big|\}$

(16.3) $r = \{(x,y) \mid y = |x^2-4|\ \}$

(17) ให้หาเรนจ์ ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

(17.1) $r = \{(x,y) \mid y = \frac{1}{x^2-4}\}$

(17.2) $r = \{(x,y) \mid y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\}$

(17.3) $r = \{(x,y) \mid y = \frac{x}{x-2}\}$

(17.4) $r = \{(x,y) \mid y = \sqrt{3x-1+2\sqrt{2x^2-3x-2}}\ \}$

(18) ให้ $r = \{(x,y) \mid xy = 1+y\}$ แล้ว $R_r - D_r$ เป็นเซตใด

(19) ให้ r เป็นความสัมพันธ์ภายใน $\mathbb{R}$ ซึ่ง $r = \{(x,y) \mid y = \begin{cases}\sqrt{x-2} & , x \le 11\\ \sqrt{15-x} & , x > 11\end{cases}\}$

ถ้า $A = D_r \cap R_r$ แล้ว ผลบวกของค่าขอบเขตบนน้อยสุดกับค่าขอบเขตล่างมากสุดเป็นเท่าใด

(20) กำหนดให้ $r = \{(x,y) \mid y^2-2xy^2-x+1 = 0\}$ จำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่เป็นสมาชิกของ $R_r \cap D_r'$ เป็นเท่าใด

(21) ถ้า $r = \{(x,y) \mid y = \frac{1}{x^2-2x-3}\}$ แล้ว ให้หาคอมพลีเมนต์ของ $D_{r^{-1}}$

(22) ถ้าให้เอกภพสัมพัทธ์เป็น R_r โดยที่ $r = \{(x,y) \mid y^2 = (9-x^2)^{-1}\}$ แล้ว ข้อใดถูก

ก. $\exists x \forall y\,[x+y=y]$ ข. $\forall x \exists y\,[x+y=0]$

<u>กราฟของความสัมพันธ์</u>

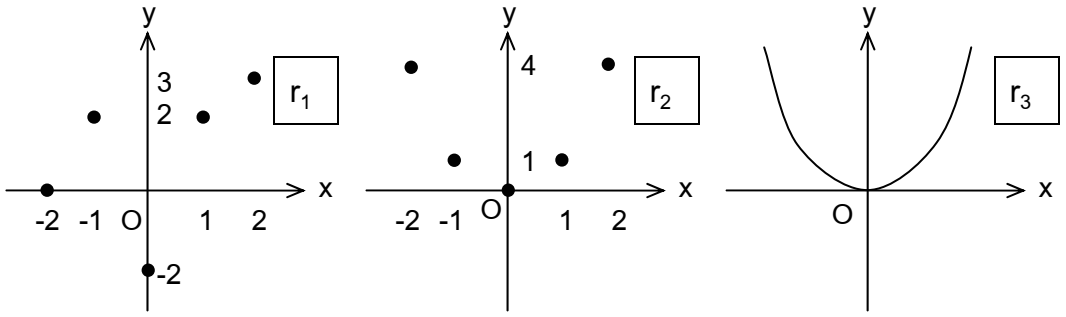
• "*กราฟของความสัมพันธ์* r" ก็คือเซตของจุดบนแกนมุมฉาก (x, y) ซึ่งแต่ละจุดแทนสมาชิกใน r (โดยให้สมาชิกตัวหน้าเป็นแกนนอน และสมาชิกตัวหลังเป็นแกนตั้ง)

เช่น $r_1 = \{(1,2),(-1,2),(2,3),(-2,0),(0,-2)\}$

$r_2 = \{(x,y) \in \mathbb{I}\times\mathbb{I} \mid y = x^2\} = \{(0,0),(\pm1,1),(\pm2,4),\dots\}$

$r_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y = x^2\}$

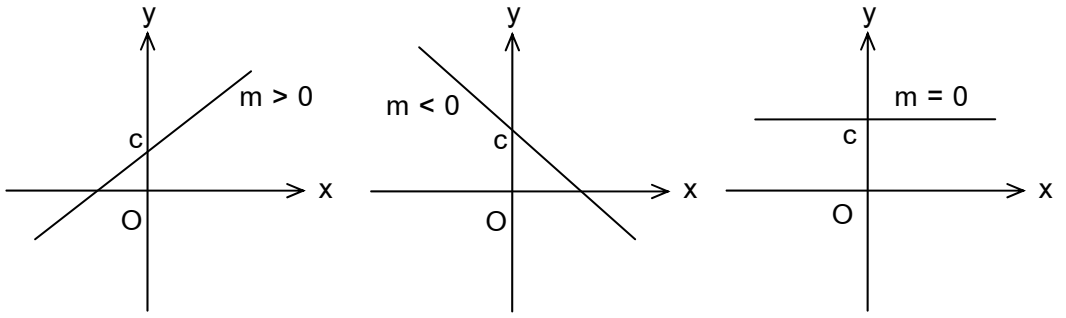
จะได้กราฟดังภาพ



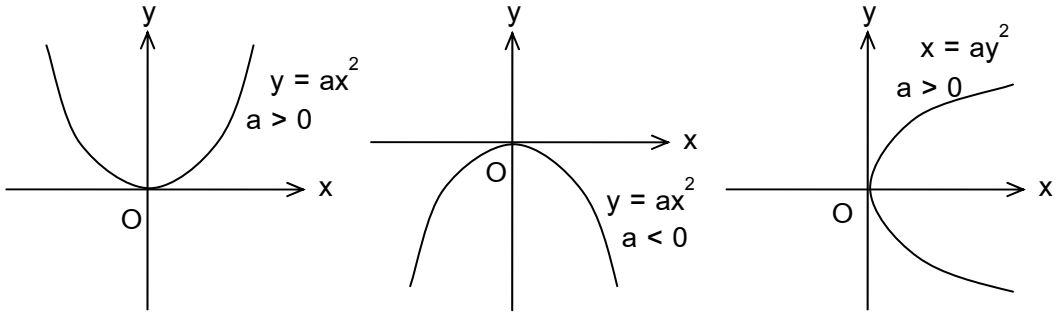
• การเขียนกราฟของความสัมพันธ์ จะช่วยให้เห็นโดเมนและเรนจ์ได้ชัดเจนยิ่งขึ้น รูปแบบของกราฟที่ควรรู้จักมีดังนี้ ...

* <u>หมายเหตุ</u> ควรศึกษาเทคนิคการเขียนกราฟ (การเลื่อนแกน, การปรับขนาดกราฟ) ซึ่งอธิบายเพิ่มเติมไว้ในบทเรียน "ภาคตัดกรวย" เพื่อช่วยในการโดเมนและเรนจ์ต่อไป

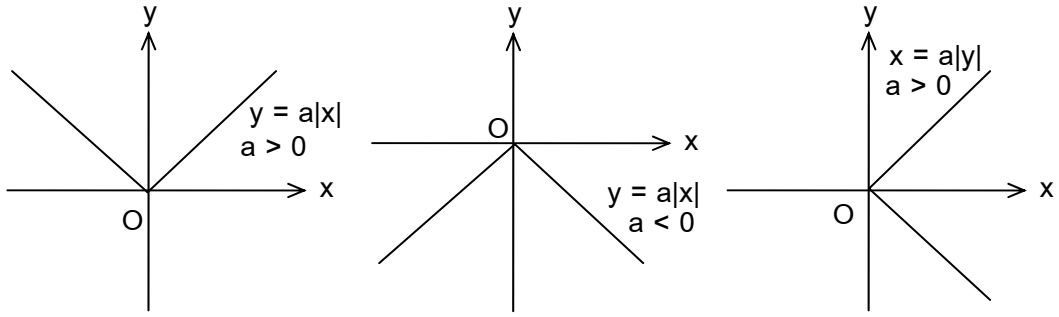
1. กราฟเส้นตรง $\boxed{y = mx + c}$ m คือความชัน และ c คือระยะตัดแกน y



2. กราฟพาราโบลา $\boxed{y = ax^2}$ หรือ $\boxed{x = ay^2}$ a คือค่าคงที่ใดๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์

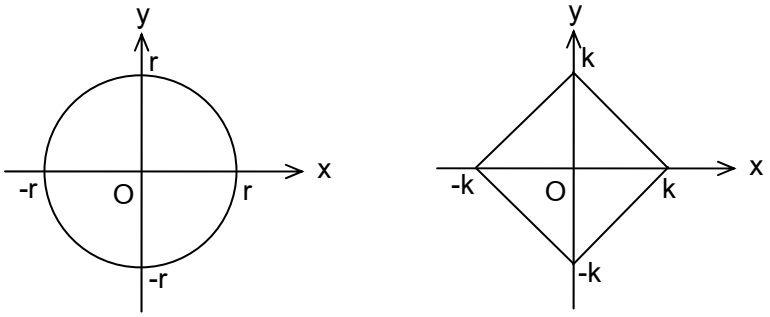


3. กราฟค่าสัมบูรณ์ (ที่คล้ายพาราโบลา) $\boxed{y = a|x|}$ หรือ $\boxed{x = a|y|}$

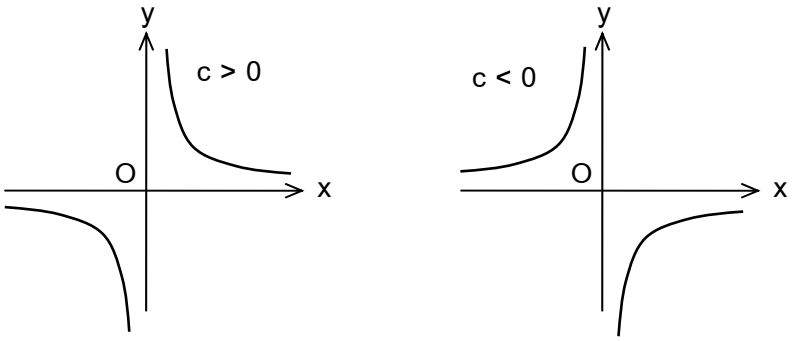


4. กราฟวงกลม $\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$ r คือรัศมีของวงกลม (มากกว่าศูนย์)

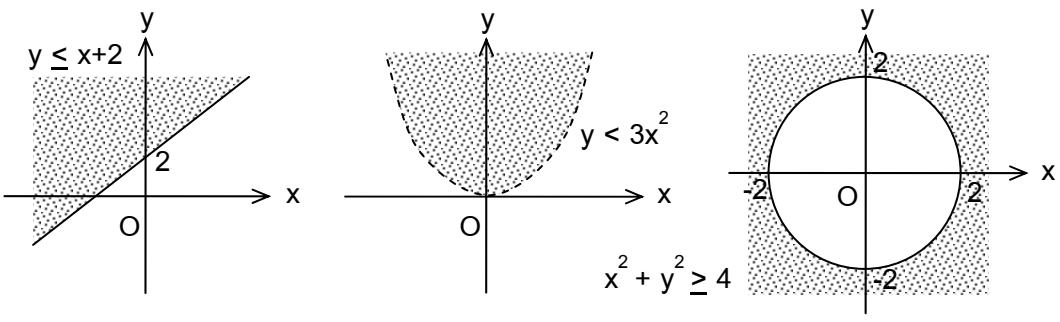
5. กราฟค่าสัมบูรณ์ (ที่คล้ายวงกลม) $\boxed{|x| + |y| = k}$ k คือค่าคงที่ที่มากกว่าศูนย์



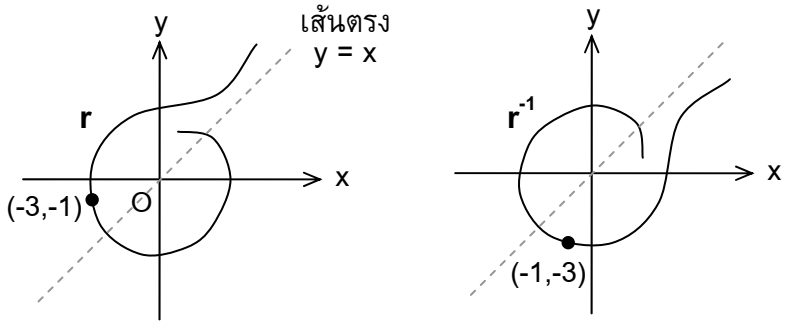
6. กราฟไฮเพอร์โบลามุมฉาก $\boxed{xy = c}$ c คือค่าคงที่ใดๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์



<u>ข้อสังเกต</u> กราฟของความสัมพันธ์อาจเป็น “พื้นที่ (แรเงา)” ในระนาบ หากว่าความสัมพันธ์นั้นเป็น “อสมการ” โดยมีหลักในการเขียนกราฟคือ คิดว่าเป็นเครื่องหมายเท่ากับแล้วเขียนกราฟของสมการก่อน จากนั้นตรวจสอบว่าบริเวณใดของพื้นที่ตรงตามเงื่อนไขของอสมการ จึงแรเงา (เส้นกราฟทึบแสดงว่าจุดบนเส้นนั้นอยู่ใน r , เส้นประแสดงว่าจุดบนเส้นนั้นไม่อยู่ใน r)



• กราฟของอินเวอร์ส (r^{-1}) มีความเกี่ยวข้องกับกราฟของ r คือ เกิดจากการหมุนกราฟโดยมีเส้นตรง $y=x$ เป็นแกนหมุน (แกนสมมาตร) ... เท่ากับเป็นการสลับแกน x กับ y กันนั่นเอง



<u>โจทย์</u>

(23) ให้หาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้ โดยอาศัยการเขียนกราฟ

(23.1) $r = \{(x,y) \mid |x|+|y| = 4\}$

(23.2) $r = \{(x,y) \mid |x-2|+|y| = 2\}$

(23.3) $r = \{(x,y) \mid y = x^2+2x-2\}$

(23.4) $r = \{(x,y) \mid y = x^2+2x-2 \ , \ -3 \le x < 2\}$

(24) ขนาดพื้นที่ของบริเวณในแต่ละข้อเป็นกี่ตารางหน่วย เมื่อกำหนดให้

$r_1 = \{(x,y) \mid x+y \le 1\}$ $r_2 = \{(x,y) \mid x-y \le 1\}$ $r_3 = \{(x,y) \mid y-x \le 1\}$

$r_4 = \{(x,y) \mid y \ge 0\}$ และ $r_5 = \{(x,y) \mid x \ge 0\}$

(24.1) $r_1 \cap r_2 \cap r_5$ (24.3) $r_1 \cap r_3 \cap r_4$

(24.2) $r_1 \cap r_4 \cap r_5$ (24.4) $r_3 \cap r_4 \cap r_5$

(25) ให้หาขนาดพื้นที่ (ตารางหน่วย) ของ $r_1 \cap r_2 \cap r_3$ เมื่อ

$r_1 = \{(x,y) \mid x-y+1 \ge 0\}$ $r_2 = \{(x,y) \mid 2x+y-4 \le 0\}$

และ $r_3 = \{(x,y) \mid y+1 \ge 0\}$

(26) ให้หาขนาดพื้นที่ (ตารางหน่วย) ของ $r_1 \cap r_2$ เมื่อ

(26.1) $r_1 = \{(x,y) \mid 2 \le |x|+|y|\}$ และ $r_2 = \{(x,y) \mid |x|+|y| \le 4\}$

(26.2) $r_1 = \{(x,y) \mid |x|+2|y| \le 4\}$ และ $r_2 = \{(x,y) \mid 2|x|+|y| \ge 2\}$

(26.3) $r_1 = \{(x,y) \mid y^2 \le 4-x^2\}$ และ $r_2 = \{(x,y) \mid y \ge |x|\}$

(26.4) $r_1 = \{(x,y) \mid y \le \sqrt{16-x^2}\}$ และ $r_2 = r_1^{-1}$

(27) ให้หาขนาดพื้นที่ (ตารางหน่วย) ของ $r \cup r^{-1}$ เมื่อ $r = \{(x,y) \mid 2|x|+|y| \le 8\}$

(28) ถ้า $A =$ โดเมนของ $r_1 \cap r_2$ และ $B =$ เรนจ์ของ $r_1 \cap r_2$

โดยที่ $r_1 = \{(x,y) \mid |x|+|y| \ge 2\}$ และ $r_2 = \{(x,y) \mid |x|+2|y| \le 4\}$

แล้ว ผลบวกของจำนวนเต็มใน $A \cap B'$ เป็นเท่าใด

(29) ถ้า $r_1 = \{(x,y) \mid |x|-|y| = 5\}$ และ $r_2 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 55\}$ แล้ว โดเมนของ $r_1 \cap r_2$ เป็นช่วงใด

(30) ถ้า $A = \{x \mid x^2 - 2x \le 3\}$ และ $r = \{(x,y) \in A \times \mathbb{R} \mid x^2 - y - 1 = 0\}$ แล้ว เรนจ์ของ r เป็นช่วงใด

(31) ข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

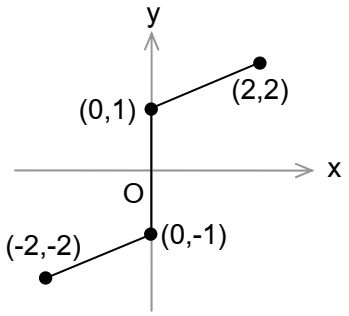
(31.1) ถ้า $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x^2}\}$ แล้ว $r^{-1} = r$

(31.2) ถ้า $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x^2}\}$ แล้ว $r^{-1} = r$

(31.3) ถ้า $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 25\}$ แล้ว $r^{-1} = r$

(31.4) ถ้า $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 25\}$ แล้ว $r^{-1} = r$

(32) ให้หาขนาดพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ถูกล้อมด้วยกราฟของ r และ r^{-1} เมื่อกำหนดกราฟของ r เป็นดังภาพ



<u>เฉลย</u>

(1) ผิดทุกข้อ (2) $(35/3, 20/21)$ (3) $(6,0)$ (4) ข้อ (4.2) และ (4.6) ถูก (5) ถูกทุกข้อ (6) $2mk - m^2$ (7) 2^{20} (8) $2^{1,000}$ (9) ถูกทุกข้อ (10) ถูกทุกข้อ (11.1) $\{(2,-1)\}$ (11.2) $\{(0,4),(\sqrt{7},-\sqrt{3}),(-\sqrt{7},-\sqrt{3})\}$ (12) 310 (13.1) $D_r = \mathbb{R} - \{0\}$, $R_r = \mathbb{R} - \{0\}$ (13.2) $\mathbb{R} - \{2\}$, $\mathbb{R} - \{1\}$ (13.3) $\mathbb{R} - \{1\}$, $\mathbb{R} - \{2\}$ (13.4) $\mathbb{R} - \{-1\}$, $\mathbb{R} - \{2\}$ (13.5) $(1,\infty)$, $(1,\infty)$ (14.1) $\mathbb{R}$, $[0,\infty)$ (14.2) $[0,\infty)$, $[0,\infty)$ (14.3) $\mathbb{R}$, $[-4,\infty)$ (14.4) $[-1,\infty)$, $[3,\infty)$ (14.5) $[-4,4]$, $[-4,4]$ (14.6) $[-4,4]$, $[0,4]$ (14.7) $[-4,1]$, $[0,5/4]$ (14.8) $[-1,7]$, $[-6,2]$ (15.1) $\mathbb{R} - \{0,1\}$, $\mathbb{R} - (-4,0]$ (15.2) $\mathbb{R} - \{-1,4\}$, $\mathbb{R} - (-1,0]$ (15.3) $[-1,\infty) - \{0\}$, $[0,\infty)$ (15.4) $\varnothing$, $\varnothing$ (15.5) $[-2,-1) \cup (1,\infty)$, $\mathbb{R}$ (15.6) $(-\infty, 46/25] \cup (2,\infty)$, $\mathbb{R} - \{3,-2\}$ (16.1) $\mathbb{R} - \{-7,1\}$, $\mathbb{R} - (-3/4, 0]$ (16.2) $\mathbb{R}$, $[0,\infty)$ (16.3) $\mathbb{R}$, $[0,\infty)$ (17.1) $\mathbb{R} - \{-2,2\}$ (17.2) $\mathbb{R} - \{-2,2\}$ (17.3) $\mathbb{R} - \{2\}$ (17.4) $[-3,-1/2] \cup [2,\infty)$ (18) $\{1\}$ (19) 5 (20) 2 (21) $(-1/4, 0]$ (22) ข. (23.1) $[-4,4]$, $[-4,4]$ (23.2) $[0,4]$, $[-2,2]$ (23.3) $\mathbb{R}$, $[-3,\infty)$ (23.4) $[-3,2)$, $[-3,6)$ (24.1) 1 (24.2) 0.5 (24.3) 1 (24.4) หาค่าไม่ได้ (25) 6.75 (26.1) 6 (26.2) 3 (26.3) π (26.4) 4π (27) 85.33 (28) 0 (29) $[-\sqrt{55},-5] \cup [5,\sqrt{55}]$ (30) $[-1,8]$ (31) ข้อ (31.2) และ (31.3) ถูก (32) 4

ฟังก์ชัน (Function)

• จากที่ศึกษาผ่านมาแล้วว่า *ความสัมพันธ์* คือเซตของคู่อันดับ (และที่พบบ่อยจะเขียนอยู่ในรูปสมการ) หากความสัมพันธ์ใดมีลักษณะดังต่อไปนี้ด้วย จะเรียกว่าเป็น *ฟังก์ชัน* (Function : f)

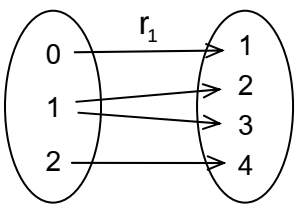
"สมาชิกตัวหน้าแต่ละตัว จะคู่กับสมาชิกตัวหลังได้เพียงแบบเดียวเท่านั้น"

หรือกล่าวว่า สำหรับ x แต่ละตัว จะคู่กับ y ได้เพียงแบบเดียวเท่านั้น

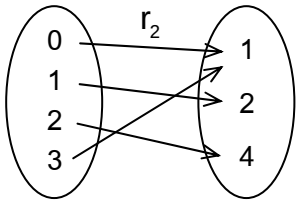
• เช่น $r_1 = \{(0,1),(1,2),(1,3),(2,4)\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะ 1 คู่กับทั้ง 2 และ 3

$r_2 = \{(0,1),(1,2),(3,1),(2,4)\}$ เป็นฟังก์ชัน เพราะไม่มีการใช้สมาชิกตัวหน้าซ้ำเลย

สังเกต : ห้ามใช้สมาชิกตัวหน้าซ้ำ แต่ใช้สมาชิกตัวหลังซ้ำได้



ไม่เป็นฟังก์ชัน

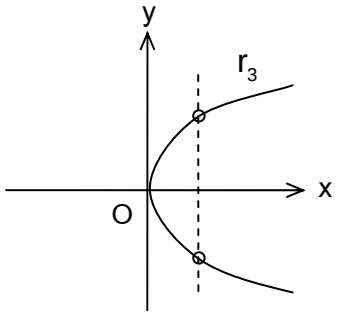


เป็นฟังก์ชัน

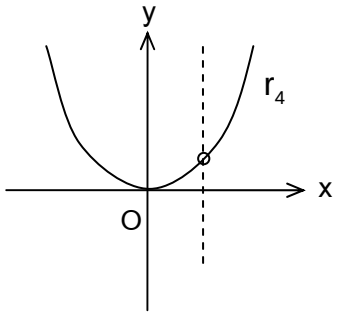
• $r_3 = \{(x,y) \mid y^2 = x\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน สมมติ $x = 4$ จะได้ว่า $y = 2$ หรือ -2

$r_4 = \{(x,y) \mid y = x^2\}$ เป็นฟังก์ชัน เพราะไม่ว่าจะแทน x ค่าใด ก็ได้ y เพียงค่าเดียว

สังเกต : เมื่อเขียนกราฟของความสัมพันธ์ จะเห็นได้ชัดเจนว่า x แต่ละตัว คู่กับ y เพียงตัวเดียวหรือไม่ (ลากเส้นแนวตั้ง ดูว่าที่ x แต่ละค่า เส้นนี้ตัดกราฟไม่เกินหนึ่งจุดหรือไม่)



ไม่เป็นฟังก์ชัน



เป็นฟังก์ชัน

หมายเหตุ **1.** ความสัมพันธ์ที่เขียนในรูป $y = \ldots(x)\ldots$ ได้ จะเป็นฟังก์ชันเสมอ

*** 2.** ถ้า f เป็นฟังก์ชัน จะเขียนแทน y ด้วยคำว่า $f(x)$ (อ่านว่า เอฟเอกซ์) เช่น $f(x) = x^2$

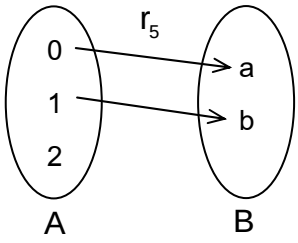
ลักษณะของฟังก์ชัน

• "*ฟังก์ชันจาก* A *ไป* B" (from A into B หรือ $f : A \to B$)

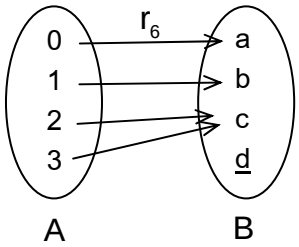
คือฟังก์ชันซึ่ง $\boxed{D_f = A \text{ และ } R_f \subset B}$

"*ฟังก์ชันจาก* A *ไปทั่วถึง* B" (from A onto B หรือ $f : A \xrightarrow[\text{onto}]{} B$)

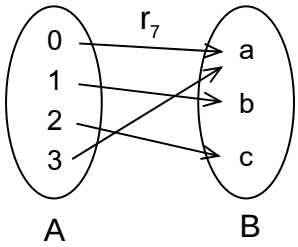
คือฟังก์ชันซึ่ง $\boxed{D_f = A \text{ และ } R_f = B}$ ... ดูตัวอย่างหน้าถัดไปประกอบ



เป็นฟังก์ชัน



เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B



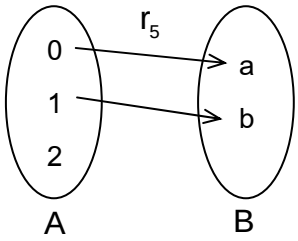
เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

• "*ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B*" (one-to-one หรือ $f : A \xrightarrow{1-1} B$)

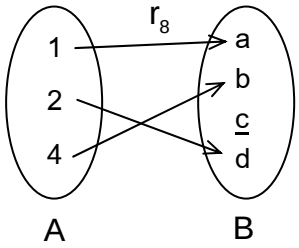
คือฟังก์ชันที่ $\boxed{D_f = A \text{ และ } R_f \subset B \text{ และ "สำหรับ } y \text{ แต่ละตัว จะคู่กับ } x \text{ เพียงตัวเดียวด้วย"}}$

"*ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B*" (one-to-one correspondence หรือ $f : A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B$)

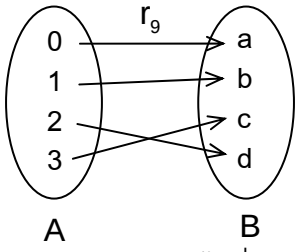
คือฟังก์ชันที่ $\boxed{D_f = A \text{ และ } R_f = B \text{ และ "สำหรับ } y \text{ แต่ละตัว จะคู่กับ } x \text{ เพียงตัวเดียวด้วย"}}$



เป็นฟังก์ชัน 1-1

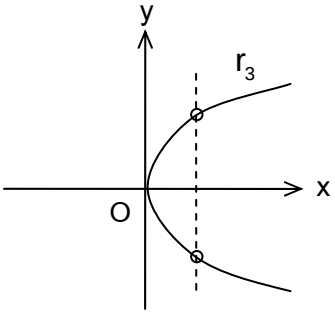


เป็นฟังก์ชัน 1-1 จาก A ไป B

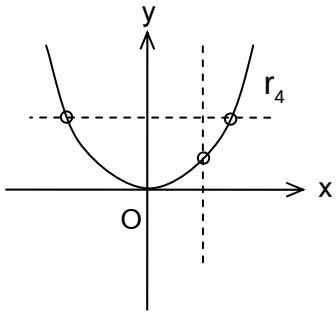


เป็นฟังก์ชัน 1-1 จาก A ไปทั่วถึง B

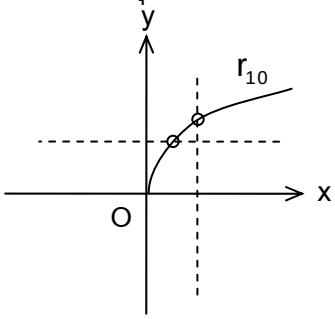
<u>สังเกต</u> : เมื่อเขียนกราฟของความสัมพันธ์ จะตรวจสอบว่า y แต่ละตัว คู่กับ x เพียงตัวเดียว หรือไม่ โดยลากเส้นแนวนอน ดูว่าที่ y แต่ละค่า เส้นนี้ตัดกราฟไม่เกินหนึ่งจุดหรือไม่)



ไม่เป็นฟังก์ชัน



เป็นฟังก์ชัน แต่ไม่เป็น 1-1



เป็นฟังก์ชัน 1-1

• ฟังก์ชันแบบเฉพาะต่างๆ ที่ควรรู้จัก

ฟังก์ชันคงตัว (Constant Function) $\boxed{f(x) = a}$ (เส้นตรงนอน)

ฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear Function) $\boxed{f(x) = ax + b}$ (เส้นตรง)

ฟังก์ชันกำลังสอง (Quadratic Function) $\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$ (พาราโบลาหงายหรือคว่ำ)

ฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial Function) $\boxed{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0}$

ฟังก์ชันตรรกยะ (Rational Function) $\boxed{f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}}$ เมื่อ $p(x), q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม

<u>ข้อสังเกต</u> ฟังก์ชันสามแบบแรก จัดเป็นฟังก์ชันพหุนามเช่นกัน

• *ฟังก์ชันเพิ่ม* (Increasing Function) และ *ฟังก์ชันลด* (Decreasing Function) มีนิยามดังนี้
... สำหรับทุกๆ $x_1, x_2 \in [a,b]$
ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มในช่วง $[a,b]$ ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x_2 > x_1$ แล้ว $f(x_2) > f(x_1)$
และ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันลดในช่วง $[a,b]$ ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x_2 > x_1$ แล้ว $f(x_2) < f(x_1)$
หมายเหตุ การเขียนกราฟของฟังก์ชันพหุนาม และการหาช่วงที่เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลด จะได้ศึกษาอย่างละเอียดในบทเรียน อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ตัวอย่างการแก้ฟังก์ชัน (1)

• ถ้า $f(x) = 2x-3$ ให้หา $f(3x-1)$
วิธีคิด จาก $f(\square) = 2(\square)-3$ จะได้ $f(3x-1) = 2(3x-1)-3 = \underline{\underline{6x-5}}$ ... ตอบ

• $f(3x-1) = 6x-5$ ให้หา $f(x)$
วิธีคิด ให้ $A = 3x-1$ นั่นคือ $x = \frac{A+1}{3}$
จะได้ว่า $f(3x-1) = 6x-5$ กลายเป็น $f(A) = 6(\frac{A+1}{3})-5 = 2A-3$
ดังนั้น $f(x) = \underline{\underline{2x-3}}$ ... ตอบ

• $f(3x-1) = 6x-5$ ให้หา $f(2)$
วิธีคิด ให้ $2 = 3x-1$ ได้เลย นั่นคือ $x = 1$
จะได้ว่า $f(3x-1) = 6x-5$ กลายเป็น $f(2) = 6(1)-5 = \underline{\underline{1}}$ ... ตอบ

• $f(x) = 2x-3$ ให้หา $f(3x-1)$ ในรูปของ $f(x)$
วิธีคิด หา $f(3x-1) = 2(3x-1)-3 = 6x-5$ ก่อน
จากนั้นเปลี่ยน x เป็น $f(x)$ โดย $f(x) = 2x-3 \rightarrow x = \frac{f(x)+3}{2}$
จะได้ว่า $f(3x-1) = 6(\frac{f(x)+3}{2})-5 = \underline{\underline{3f(x)+4}}$ ... ตอบ

โจทย์

(1) f ที่กำหนดให้ในแต่ละข้อ เป็นฟังก์ชันจริงหรือไม่
และถ้าเป็นฟังก์ชันให้ระบุเพิ่มเติมด้วยว่า เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

(1.1) $f(x) = x^2$
(1.2) $[f(x)]^2 = x$
(1.3) $f(x) = \sqrt{x}$
(1.4) $f(x) = |x|$
(1.5) $|f(x)| = x$
(1.6) $f(x) = 1/x$
(1.7) $f(x) = x^2+x+1$
(1.8) $f(x) = x^3$
(1.9) $f(x) = 1/x^2$
(1.10) $f(x) = x^{2/3}$

(2) ความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่

(2.1) $r = \{(x,y) \mid x+y < 1\}$

(2.2) $r = \{(x,y) \mid x+y = 1\}$

(3) ความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่

(3.1) $r = \{(x,y) \mid |x+y| = 1\}$

(3.2) $r = \{(x,y) \mid |x|+|y| = 1\}$

(3.3) $r = \{(x,y) \mid x+|y| = 1\}$

(3.4) $r = \{(x,y) \mid |x|+y = 1\}$

(4) ฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

(4.1) $f = \{(x,y) \mid 2x+y-3 = 0\}$

(4.2) $f = \{(x,y) \mid (x-4)(y+3) = 1\}$

(4.3) $f = \{(x,y) \mid y-3 = (x+4)^3\}$

(4.4) $f = \{(x,y) \mid x^2-y+3 = 0\}$

(5) ฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ หรือไม่

(5.1) $f = \{(x,y) \mid y = \sqrt{9-x^2}\}$

(5.2) $f = \{(x,y) \mid y = \sqrt{9+x^2}\}$

(5.3) $f = \{(x,y) \mid y|x| = 1\}$

(5.4) $f = \{(x,y) \mid x+|y|-5 = 0\}$

(6) ฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \xrightarrow[\text{onto}]{} A$ เมื่อ $A = [0,\infty)$ หรือไม่

(6.1) $f = \{(x,y) \mid y = x^4\}$

(6.2) $f = \{(x,y) \mid y = x^2-2x+3\}$

(6.3) $f = \{(x,y) \mid y = |x^2-4|\}$

(6.4) $f = \{(x,y) \mid y = |x^3+3x^2+3x+1|\}$

(7) ฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันเพิ่มใน $\mathbb{R}$ หรือไม่

(7.1) $f(x) = 5x-2$

(7.2) $f(x) = -2x+5$

(7.3) $f(x) = x^2+3$

(7.4) $f(x) = x^2+2x+1$

(7.5) $f(x) = (x-2)^3+2$

(7.6) $f(x) = x^3+3x^2+3x+1$

(8) ให้หาโดเมน และเรนจ์ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(8.1) $f(x) = x^2-2x+4$

(8.2) $f(x) = \dfrac{x^2-25}{x-5}$

(8.3) $f(x) = \dfrac{1+x^2}{x}$

(9) กำหนด $f(x) = x^2$ เมื่อ $-2 \le x \le 8$ ถามว่า $f(t+3)$ เท่ากับเท่าใด และจะมีความหมายเมื่อ t อยู่ในช่วงใด

(10) ให้หาค่าของ

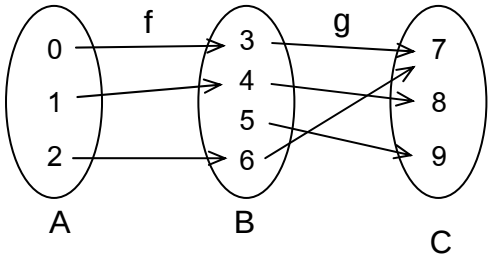
(10.1) $f(x)$ เมื่อ $f(x+1) = x^2+3x+9$

(10.2) $f(2)$ เมื่อ $f(\sqrt{x^2-1}) = x^2+2$

(10.3) $f(4x)$ ในเทอมของ $f(x)$ เมื่อ $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$

<u>ฟังก์ชันคอมโพสิท</u> (Composite Function)

• ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันดังแผนภาพ



จะได้ว่า $f(0) = 3$ และ $g(3) = 7$

อาจกล่าวว่า $g(f(0)) = 7$ ก็ได้

นอกจากนั้น $g(f(1)) = 8$

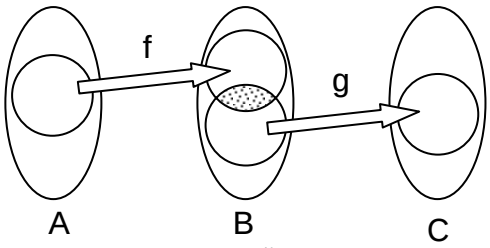
และ $g(f(2)) = 7$

• ฟังก์ชัน $g(f(x))$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไป C

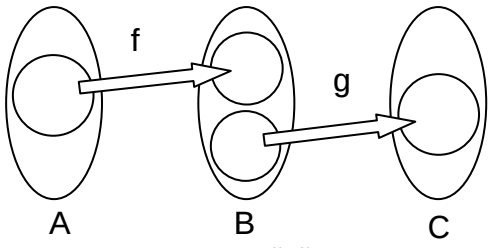
เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\boxed{g(f(x)) = (gof)(x)}$ เรียกว่าฟังก์ชันคอมโพสิทของ f และ g และอ่านว่า จีโอเอฟเอกซ์

• ฟังก์ชัน $(gof)(x)$ จะหาได้ก็เมื่อ มีสมาชิกบางส่วนของ R_f กับ D_g ร่วมกัน

หรือกล่าวว่า $\boxed{(gof)(x) \text{ จะหาได้ ก็เมื่อ } R_f \cap D_g \neq \varnothing}$



หา gof ได้



หา gof ไม่ได้

* โดยทั่วไป ถ้า $R_f \subset D_g$ จะได้ว่า $D_{gof} = D_f$ (คือโดเมนของ f ทุกตัวใช้ได้หมด)

แต่ถ้า $R_f \not\subset D_g$ (กรณีทั่วไป) จะได้ว่า $D_{gof} \subset D_f$ เท่านั้น (คือโดเมนของ f บางตัวใช้ไม่ได้ เพราะเรนจ์ของตัวนั้นไม่ได้อยู่ในโดเมน g) ... การหาโดเมนของ gof จึงต้องระวัง

• ตัวอย่างเช่น $f(x) = \sqrt{x-1}$ และ $g(x) = x^2$ ต้องการหา D_{gof}

... จะได้ว่า $(gof)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x-1}) = \underline{\underline{x-1}}$

ซึ่งดูจากลักษณะแล้ว ค่า x น่าจะเป็นจำนวนจริงใดๆ ($D_{gof} = \mathbb{R}$)

แต่ที่จริงแล้ว $f(x) = \sqrt{x-1}$ นั้น $x \geq 1$ จากนั้นนำ $f(x)$ ไปใช้กับ g พบว่าใช้ได้ทั้งหมด

ดังนั้นจึงสรุปว่า $D_{gof} = [1, \infty)$

ตัวอย่างการแก้ฟังก์ชัน (2)

• ถ้า $f(x)=2x-3$ และ $g(x)=3x+4$ ให้หา $(gof)(x)$

วิธีคิด จาก $(gof)(x)=g(f(x))=g(2x-3)=3(2x-3)+4=\underline{\underline{6x-5}}$ ... ตอบ

• $(gof)(x)=6x-5$ และ $g(x)=3x+4$ ให้หา $f(x)$

วิธีคิด จาก $(gof)(x)=g(f(x))=3(f(x))+4$ แต่โจทย์กำหนด $(gof)(x)=6x-5$

ดังนั้น $3(f(x))+4=6x-5$ ย้ายข้างสมการได้ $f(x)=\underline{\underline{2x-3}}$ ... ตอบ

• $(gof)(x)=6x-5$ และ $g(x)=3x+4$ ให้หา $f(2)$

วิธีคิด จาก $(gof)(2)=g(f(2))=3(f(2))+4$ แต่ $(gof)(2)=6(2)-5=7$

ดังนั้น $3(f(2))+4=7$ ย้ายข้างสมการได้ $f(2)=\underline{\underline{1}}$ ... ตอบ

• $(gof)(x)=6x-5$ และ $f(x)=2x-3$ ให้หา $g(x)$

วิธีคิด จาก $(gof)(x)=g(f(x))=g(2x-3)$ แต่โจทย์กำหนด $(gof)(x)=6x-5$

ดังนั้น $g(2x-3)=6x-5$ ใช้เทคนิคการแก้ฟังก์ชันตามเดิมได้ $g(x)=\underline{\underline{3x+4}}$ ... ตอบ

• $(gof)(x)=6x-5$ และ $f(x)=2x-3$ ให้หา $g(1)$

วิธีคิด ต้องการ $g(1)$ จึงให้ $f(x)=1$ จะได้ $2x-3=1 \rightarrow x=2$

แทนค่า x ด้วย 2 จะได้ $(gof)(2)=g(1)=6(2)-5=\underline{\underline{7}}$ ... ตอบ

โจทย์

(11) ให้หา gof และ fog ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ในแต่ละข้อ

(11.1) $f(x)=2x$ และ $g(x)=x+3$

(11.2) $f(x)=x+1$ และ $g(x)=\sqrt{x}$

(11.3) $f(x)=4x+1$ และ $g(x)=x^2$

* (11.4) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x} & ,x\le 0\\ 6-x & ,x>4\end{cases}$ และ $g(x)=x^2+1$ เมื่อ $|x|>2$

(12) ถ้า $(gof)(x)=3[f(x)]^2-2f(x)+1$ และ $g(x)=x^2-x+2$ ให้หา $(gof)(1)$

(13) ถ้า $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$ เมื่อ $x\neq 0$ และ $(fog)(x)=x$ ให้หา $g(x)$

(14) ถ้า $g(x)=x^2+x+2$ และ $(gof)(x)=x^2-x+2$ แล้วให้หา $f(x)$

(15) ถ้า $f(x)=Ax+B$ โดยที่ $A>0$ และ $(fof)(x)=4x-9$ ให้หาค่า B

ฟังก์ชันอินเวอร์ส (Inverse Function)

• จากที่ทราบแล้วว่าความสัมพันธ์ r ใดๆ สามารถหาอินเวอร์ส (r^{-1}) ได้เสมอ เช่นเดียวกับฟังก์ชัน f ใดๆ ก็จะหาอินเวอร์ส f^{-1} ได้เสมอ แต่ f^{-1} อาจไม่เป็นฟังก์ชัน ถ้า f^{-1} เป็นฟังก์ชันจะเรียกว่า *ฟังก์ชันอินเวอร์ส*

• ข้อสังเกต จากหลักการเขียนกราฟของอินเวอร์ส ทำให้พบว่า

$\boxed{f^{-1} \text{ จะเป็นฟังก์ชัน ก็เมื่อ } f \text{ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เท่านั้น}}$

และ $\boxed{f^{-1}(\square) = \Delta \text{ มีความหมายเดียวกับ } f(\Delta) = \square}$

• สมบัติของอินเวอร์ส $\boxed{(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}}$ และ $\boxed{(f^{-1})^{-1} = f}$

ตัวอย่างการแก้ฟังก์ชัน (3)

• ถ้า $f(x) = 2x-3$ ให้หา $f^{-1}(x)$

วิธีคิด จาก $f(x) = 2x-3 \rightarrow f^{-1}(2x-3) = x$

จากนั้นใช้เทคนิคการแก้ฟังก์ชันตามเดิมได้ $f^{-1}(x) = \underline{\underline{0.5x+1.5}}$ ... ตอบ

(หมายเหตุ อาจใช้วิธีหาอินเวอร์ส เหมือนในบทเรียนความสัมพันธ์ คือสลับตัวแปร x กับ y)

• ถ้า $f(x) = 2x-3$ ให้หา $f^{-1}(5)$

วิธีคิด จาก $f(x) = 2x-3 \rightarrow f^{-1}(2x-3) = x$

แล้วให้ $2x-3 = 5$ นั่นคือ $x = 4$ ดังนั้น แทนค่า x ด้วย 4 จะได้ $f^{-1}(5) = \underline{\underline{4}}$ ... ตอบ

• ถ้า $f(x-1) = 4x-3$ ให้หา $f^{-1}(x)$

วิธีคิด จาก $f(x-1) = 4x-3 \rightarrow f^{-1}(4x-3) = x-1$

จากนั้นใช้เทคนิคการแก้ฟังก์ชันตามเดิมได้ $f^{-1}(x) = \underline{\underline{0.25x-0.25}}$ ... ตอบ

• ถ้า $f(x+1) = 4x-3$ ให้หา $f^{-1}(5)$

วิธีคิด จาก $f(x-1) = 4x-3 \rightarrow f^{-1}(4x-3) = x-1$

แล้วให้ $4x-3 = 5$ นั่นคือ $x = 2$ ดังนั้น แทนค่า x ด้วย 2 จะได้ $f^{-1}(4) = \underline{\underline{1}}$ ... ตอบ

• ถ้า $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{x-2}$ และ $(fog)(x+2) = 3x+6$ ให้หา $g(2)$

วิธีคิด ต้องการ $g(2)$ จึงให้ $x+2 = 2$ นั่นคือ $x = 0$

แทนค่าใน $(fog)(x+2) = 3x+6$ จะได้ว่า $(fog)(2) = 6$ หรือ $f((g(2)) = 6$

จากนั้นใช้สมบัติของอินเวอร์ส กลายเป็น $f^{-1}(6) = g(2)$

ซึ่ง $f^{-1}(6) = \dfrac{6}{6-2} = 1.5$ ดังนั้น $g(2) = \underline{\underline{1.5}}$ ... ตอบ

โจทย์

(16) อินเวอร์สของฟังก์ชันต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันหรือไม่

(16.1) $f = \{(x, y) \mid y = x|x|\}$

(16.2) $f = \{(x, y) \mid y = (x+1)^2\}$

(16.3) $f = \{(x, y) \mid y = \sqrt{9-x^2}\}$

(16.4) $f = \{(x, y) \mid y = 1/|x|\}$

(17) ให้หาฟังก์ชันอินเวอร์ส $f^{-1}(x)$ เมื่อกำหนดให้

(17.1) $f(x) = \sqrt{5-x}$

(17.2) $f(x) = \sqrt{5x+4}$

(17.3) $f(x) = \dfrac{x-1}{3}$

(17.4) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

(17.5) $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$

(17.6) $f(x) = \dfrac{x}{2x-1}$

(17.7) $f(x) = \dfrac{2x-3}{3x-2}$

(18) ให้หา $f^{-1}(x)$ เมื่อกำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & , x \geq 0 \\ -x^2-1 & , x < 0 \end{cases}$

(19) ให้หา $f^{-1}(x)$ เมื่อกำหนดให้

(19.1) $f(3x-4) = 4x+3$

(19.2) $f(\dfrac{x}{2}+1) = \dfrac{x}{2}-1$

(19.3) $f(x+1) = \dfrac{5x-7}{x-3}$

(19.4) $f^{-1}[3f(2x+1)-3x+2] = 2x+1$

(20) ถ้า $f(x-1) = x^3-3x^2+3x+5$ แล้วค่าของ $f^{-1}(5)$ เป็นเท่าใด

(21) กำหนดให้ $f(x+3) = 4x-5$ และ $g(x-3) = 2-3x$ ให้หาค่าของ

(21.1) $(fog^{-1})(5)$

(21.2) $(gof^{-1})(-1)$

(21.3) $(f^{-1}og^{-1})(-4)$

(21.4) $(g^{-1}of^{-1})(3)$

(22) กำหนดให้ $f(x+1) = 2x+3$ และ $g(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x \geq 0 \\ 3x+1 & , x < 0 \end{cases}$ ให้หาค่าของ

(22.1) $(f^{-1}og^{-1})(0)$

(22.2) $(g^{-1}of^{-1})(0)$

พีชคณิตของฟังก์ชัน (Algebra of Function)

- $\boxed{(f*g)(x) = f(x)*g(x)}$ ซึ่ง $\boxed{D_{f*g} = D_f \cap D_g}$

เครื่องหมาย $*$ เป็นได้ทั้ง $+, -, \times, \div$ (โดยกรณีหาร $g(x) \neq 0$)

โจทย์

(23) กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases}-2x, & x\geq 0\\ 3, & x<0\end{cases}$ และ $g(x)=\begin{cases}x^2, & x>3\\ -x, & x\leq 3\end{cases}$ ให้หา

(23.1) $(f-g)(x)$

(23.2) $D_{f/g}$

(24) ถ้า $f(x)=\sqrt{x+1}$, $g(x)=\sqrt{1-x}$ และ $h(x)=1-x^2$ แล้ว ให้หา

(24.1) $[(gof)+h](x)$

(24.2) $(\frac{fog}{h})(x)$

(25) ถ้า $f(2x-3)=3x-2$ และ $(f+g)(x)=x^2+x-3$ แล้ว ให้หา

(25.1) $(g+f^{-1})(x)$

(25.2) $(\frac{g}{f})(x)$

(26) ถ้า $f(x)=x+5$ และ $(gof)(x)=x^2-25$ แล้ว ให้หา $(\frac{f}{g})(x)$

(27) ถ้า $f(x)=4x$, $g(x)=x^2+1$ และ $h(x)=\begin{cases}x+1, & x\geq 0\\ x-1, & x<0\end{cases}$ แล้ว ให้หา

(27.1) $(f^{-1}+g+h^{-1})(-2)$

(27.2) $[(gof^{-1})\cdot h](2)$

(28) ถ้า $(f+g)(x)=2x+1$ และ $(f-g)(x)=3-4x$ แล้ว ให้หา

(28.1) $(fog)^{-1}(-2)$

(28.2) $[(g^{-1}+f^{-1})of](1)$

(29) ถ้า $f^{-1}(x)=\frac{x}{x-2}$ และ $(fog)(x)=x+2$ แล้ว ให้หา

(29.1) $(f+g)(2)$

(29.2) $[(gof)\cdot f^{-1}](4)$

(30) ถ้า $f^{-1}(x+1)=2x+3$ และ $(fog)(x-1)=5x+1$ แล้ว ให้หา

(30.1) $(\frac{f}{g}+f^{-1})(3)$

(30.2) $[(fg)of^{-1}](1)$

เฉลย

(1) ข้อ (1.2) และ (1.5) ไม่เป็นฟังก์ชัน ข้อ (1.3), (1.6), (1.8) เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (2.1) ไม่เป็น (2.2) เป็น (3) ข้อ (3.4) เท่านั้นที่เป็น (4) ข้อ (4.4) เท่านั้นที่ไม่เป็น (5) ข้อ (5.2) เท่านั้นที่เป็น (6) ข้อ (6.2) เท่านั้นไม่เป็น (7) ข้อ (7.1), (7.5), (7.6) เป็น (8.1) $\mathbb{R}$, $[3,\infty)$ (8.2) $\mathbb{R}-\{5\}$, $\mathbb{R}-\{10\}$ (8.3) $\mathbb{R}-\{0\}$, $[-2,2]$ (9) $(t+3)^2$ เมื่อ $-5\le t\le 5$ (10.1) x^2+x+7 (10.2) 7 (10.3) $\dfrac{4f(x)}{3f(x)+1}$ (11.1) $(gof)(x)=2x+3$, $(fog)(x)=2x+6$ (11.2) $(gof)(x)=\sqrt{x+1}$ เมื่อ $x\ge -1$, $(fog)(x)=\sqrt{x}+1$ เมื่อ $x\ge 0$ (11.3) $(gof)(x)=(4x+1)^2$, $(fog)(x)=4x^2+1$ (11.4) $(gof)(x)=\begin{cases}5-x & ,x<0\\ (6-x)^2+1 & ,x>8\end{cases}$ และ $(fog)(x)=5-x^2$ เมื่อ $|x|>2$ (12) $7/4$ หรือ 2 (13) $\dfrac{1}{x-1}$ เมื่อ $x\ne 1$ (14) $x-1$ หรือ $-x$ (15) -3 (16) ข้อ (16.1) เท่านั้นที่เป็น (17.1) $5-x^2$ เมื่อ $x\ge 0$ (17.2) $\dfrac{x^2-4}{5}$ เมื่อ $x\ge 0$ (17.3) $3x+1$ (17.4) $1+\dfrac{1}{x}$ เมื่อ $x\ne 0$ (17.5) $\dfrac{3x-2}{x-1}$ เมื่อ $x\ne 1$ (17.6) $\dfrac{x}{2x-1}$ เมื่อ $x\ne \dfrac{1}{2}$ (17.7) $\dfrac{2x-3}{3x-2}$ เมื่อ $x\ne \dfrac{2}{3}$ (18) $f^{-1}(x)=\begin{cases}0.5x+1 & ,x\ge 2\\ -\sqrt{-x-1} & ,x<-1\end{cases}$ (19.1) $\dfrac{3x-25}{4}$ (19.2) $x+2$ (19.3) $\dfrac{4x-12}{x-5}$ เมื่อ $x\ne 5$ (19.4) $\dfrac{4x+7}{3}$ (20) -1 (21.1) -33 (21.2) -19 (21.3) 4 (21.4) -4 (22.1) $1/3$ (22.2) 3 (23.1) $3+x,\ x<0$ และ $-x,\ 0\le x\le 3$ และ $-2x-x^2,\ x>3$ (23.2) $\mathbb{R}-\{0\}$ (24.1) $\sqrt{1-\sqrt{x+1}}+1-x^2$ เมื่อ $-1\le x\le 0$ (24.2) $\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{1-x}}}{1-x^2}$ เมื่อ $x\in(-\infty,1)-\{-1\}$ (25.1) $x^2+\dfrac{x-1}{6}$ (25.2) $\dfrac{3(2x^2-x+3)}{2(2x-5)}$ เมื่อ $x\ne 5$ (26) $\dfrac{x+5}{x(x-10)}$ เมื่อ $x\ne 0,10$ (27.1) $\dfrac{7}{2}$ (27.2) $\dfrac{15}{4}$ (28.1) 2 (28.2) 2 (29.1) 6 (29.2) $\dfrac{7}{2}$ (30.1) $7\dfrac{1}{43}$ (30.2) $-\dfrac{13}{2}$

กำหนดการเชิงเส้น (Linear Programming)

• *กำหนดการเชิงเส้น* เป็นเทคนิคที่เริ่มใช้ในปี ค.ศ. 1947 ในช่วงที่สหรัฐอเมริกากำลังประสบปัญหาทรัพยากรไม่เพียงพอ และต้องหาวิธีจัดสรรให้ได้ประโยชน์สูงที่สุด เทคนิคการแก้ปัญหาแบบนี้นำไปใช้ในหลายด้าน เช่น การผลิตสินค้าแต่ละประเภทด้วยวัตถุดิบที่มีให้ได้กำไรสูงที่สุด การขนส่งให้สิ้นเปลืองน้อยที่สุด การหาปริมาณวัตถุผสมให้ได้ส่วนประกอบตามต้องการโดยเสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด การมอบหมายงานให้แต่ละกลุ่มเพื่อให้งานสำเร็จในเวลาน้อยที่สุด ฯลฯ

• ตัวอย่างสถานการณ์ ในการผลิตเก้าอี้สองชนิดคือขนาดเล็กและขนาดใหญ่ พบว่า เก้าอี้ขนาดเล็กแต่ละตัวต้องเสียเวลาในการเลื่อยไม้ 1 ชั่วโมง ประกอบและตกแต่ง 2 ชั่วโมง ขายได้กำไรตัวละ 30 บาท ส่วนเก้าอี้ขนาดใหญ่ต้องเสียเวลาในการเลื่อยไม้ 2 ชั่วโมง ประกอบและตกแต่ง 2 ชั่วโมง และขายได้กำไรตัวละ 50 บาท ถ้าหากคนงานเลื่อยไม้ทำงานได้วันละไม่เกิน 8 ชั่วโมง และคนงานประกอบตกแต่งทำงานได้วันละไม่เกิน 10 ชั่วโมง ต้องการทราบว่าในแต่ละวันควรจะผลิตเก้าอี้แต่ละชนิดเป็นจำนวนเท่าใดจึงจะได้กำไรมากที่สุด และได้กำไรเท่าใด

• ขั้นตอนการแก้ปัญหา จะเริ่มจากการเปลี่ยนสถานการณ์ให้เป็น *แบบจำลองทางคณิตศาสตร์* ก่อน โดยสมมติตัวแปร x และ y แทนจำนวนผลิตที่เราต้องการทราบ นั่นคือ

ให้ x แทนจำนวนเก้าอี้ขนาดเล็กที่ผลิตใน 1 วัน

y แทนจำนวนเก้าอี้ขนาดใหญ่ที่ผลิตใน 1 วัน

1. สิ่งที่เราต้องการคือกำไรมากที่สุด ดังนั้นถ้าให้ P แทนกำไรที่ได้ จะเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$P = 30x + 50y$$

เรียกว่า *สมการจุดประสงค์* หรือ *ฟังก์ชันจุดประสงค์* (P เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับตัวแปร x และ y)

2. เงื่อนไข (หรือข้อจำกัด) ที่มีอยู่ ได้แก่จำนวนชั่วโมงทำงานของคนงานเลื่อยไม้ และคนงานประกอบตกแต่ง ซึ่งนำมาเขียนเป็นอสมการได้ดังนี้

(เลื่อยไม้) $x + 2y \le 8$

(ประกอบตกแต่ง) $2x + 2y \le 10$

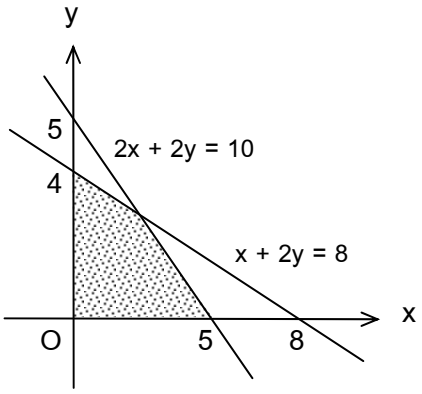
ค่า x และ y เป็นจำนวนเก้าอี้ จึงไม่สามารถเป็นค่าติดลบได้

$$x \ge 0$$

$$y \ge 0$$

เนื่องจาก x และ y ต้องอยู่ภายใต้เงื่อนไขเหล่านี้ จึงเรียกอสมการทั้งสี่ว่า *อสมการข้อจำกัด*

3. เขียนกราฟของระบบอสมการข้อจำกัด และแรเงาบริเวณที่ “ตรงตามเงื่อนไขทุกข้อ”



เรียกบริเวณที่แรเงานี้ว่า <u>*อาณาบริเวณที่หาคำตอบได้*</u> (Feasible Region) เนื่องจากค่า x และ y ที่เป็นไปได้จะต้องอยู่ในบริเวณที่แรเงาเท่านั้น

4. หาจุดยอดมุมทั้งหมดของบริเวณที่แรเงา (ถ้าเป็นจุดที่เกิดจากเส้นตรงตัดกัน ไม่ได้อยู่บนแกน x หรือ y ก็ต้องใช้วิธีแก้ระบบสมการเพื่อหาจุดตัด)
ในตัวอย่างนี้หาจุดยอดมุมได้เป็น $(0,0),(0,4),(2,3),(5,0)$
<u>*คู่อันดับ x และ y เหล่านี้เท่านั้น*</u> ที่มีโอกาสทำให้เกิดค่า P มากที่สุดดังต้องการ

5. นำคู่อันดับ x และ y ทั้งสี่จุดที่ได้ ไปหาค่า P
จะพบว่าค่า P ที่มากที่สุดเกิดเมื่อ (x,y) = (2,3) คือ

$$P = 30(2) + 50(3) = 210$$

<u>*สรุปว่า*</u> ใน 1 วัน ควรผลิตเก้าอี้ขนาดเล็ก 2 ตัว ขนาดใหญ่ 3 ตัว จึงจะทำให้ได้กำไรมากที่สุด และกำไรที่มากที่สุดนั้นเท่ากับ 210 บาท

• <u>ข้อสังเกต</u> (1) ฟังก์ชันที่ต้องการค่าสูงสุดมักให้ชื่อเป็น P (Profit), ค่าต่ำสุดเป็น C (Cost)
(2) ในทุกสถานการณ์ นอกจากข้อจำกัดที่โจทย์ให้มาแล้ว มักจะต้องเพิ่มอสมการ $x \geq 0$, $y \geq 0$ ด้วยเสมอ (คือ ค่า x และ y โดยส่วนมากไม่สามารถเป็นค่าลบได้)
(3) ในบางสถานการณ์ ค่า x หรือ y อาจต้องเป็นจำนวนเต็มเท่านั้น หากค่าที่ได้เป็นคำตอบไม่ใช่จำนวนเต็ม ก็จำเป็นจะต้องเลือกจุดข้างเคียง (ภายในบริเวณที่แรเงา) ที่เป็นจำนวนเต็ม และให้ผลใกล้กับค่าที่ต้องการมากที่สุด ดังแสดงให้เห็นในตัวอย่างถัดไป
(4) ในบางครั้งอาณาบริเวณที่แรเงาอาจล้อมรอบด้วยเส้นประ (เช่น กรณีที่ในข้อจำกัดใช้คำว่า ระหว่าง, น้อยกว่า, หรือ มากกว่า) จุดยอดมุมที่ได้เป็นคำตอบยังไม่สามารถใช้ได้ ก็ต้องใช้วิธีเลือกจุดข้างเคียงภายในบริเวณที่แรเงา เช่นเดียวกัน

• <u>ตัวอย่าง</u> โดยปกติเครื่องบินลำหนึ่งมีที่นั่ง 15 ที่นั่ง บรรจุผู้โดยสารและสินค้ารวมกันได้ 1,500 กก. แต่ถ้าน้ำหนักสินค้ามากกว่าน้ำหนักผู้โดยสารเกิน 200 กก. เครื่องบินจะเอียงและบินไม่ได้ (สมมติว่าผู้โดยสารแต่ละคนมีน้ำหนักเฉลี่ย 75 กก.) ถามว่าเที่ยวบินแต่ละเที่ยวจะมีรายได้มากที่สุดเท่าใด หากค่าโดยสารที่นั่งละ 6,000 บาท และค่าขนส่งสินค้ากิโลกรัมละ 100 บาท

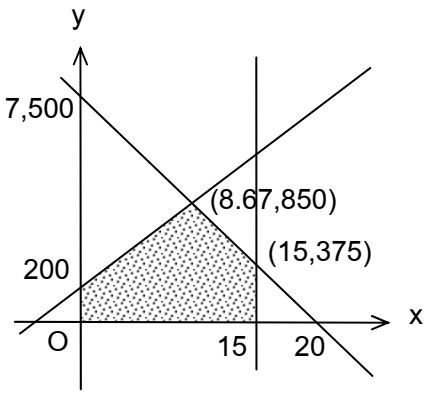
<u>วิธีคิด</u> ให้จำนวนผู้โดยสารเป็น x คน และน้ำหนักสินค้าเป็น y กิโลกรัม
และ Z เป็นรายได้ต่อเที่ยวที่ต้องการ ดังนั้นฟังก์ชันจุดประสงค์คือ $Z = 6000x + 100y$
ส่วนเงื่อนไขที่มีได้แก่ (1) ที่นั่งผู้โดยสารมี 15 ที่นั่ง $0 \le x \le 15$

(2) เครื่องบินบรรทุกได้ 1,500 กก. $75x + y \le 1500$

(3) น้ำหนักสินค้ามากกว่าผู้โดยสารได้ไม่เกิน 200 กก. $y - 75x \le 200$

(4) (เพิ่มเติมเอง) น้ำหนักสินค้าไม่เป็นค่าติดลบ $y \ge 0$

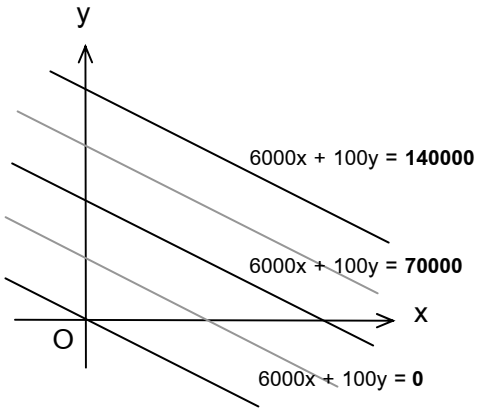
หาอาณาบริเวณที่เป็นคำตอบได้ดังกราฟ และจุดยอดมุมทั้งหมดได้แก่

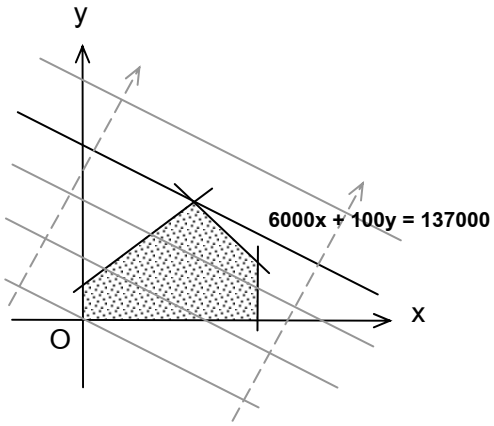


(0,0), (0,200), (8.67,850), (15,375), และ (15,0)
เมื่อแทนค่าในฟังก์ชันจุดประสงค์แล้ว พบว่าจุด (8.67,850) ให้ค่ารายได้มากที่สุด คือ Z = 137,000 แต่มีปัญหาว่า x เป็นจำนวนผู้โดยสาร ต้องเป็นจำนวนเต็มเท่านั้น เมื่อพิจารณาจุดใกล้เคียงในบริเวณที่แรเงา จะมี (8,800) ซึ่งให้ค่า Z = 128,000 บาท
และ (9,825) ซึ่งให้ค่า Z = 136,500 บาท
ดังนั้นจึงต้องเลือกจุดหลัง และได้คำตอบว่า เที่ยวบินแต่ละเที่ยวจะมีรายได้มากที่สุด 136,500 บาท (เมื่อมีผู้โดยสาร 9 คน, สินค้า 825 กก.)

<u>หมายเหตุ</u> (1) การแก้ปัญหาด้วยกำหนดการเชิงเส้น นอกจากใช้หาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์แล้ว ยังใช้กับหาค่าต่ำสุดได้เช่นกัน โดยจุดคำตอบจะเป็นหนึ่งในบรรดาจุดยอดมุม ที่ทำให้ค่าฟังก์ชันน้อยกว่าจุดอื่นๆ

(2) การที่คำตอบทุกข้อจะเป็นหนึ่งในจุดยอดมุมเสมอ ก็เพราะฟังก์ชันจุดประสงค์ Z = a x + b y มีลักษณะเป็นสมการเส้นตรงที่แปรเปลี่ยนระดับไปตามค่า Z ดังภาพ จะเห็นว่าค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของ Z ย่อมเกิดที่จุดยอดมุมสุดท้าย ก่อนเส้นตรงเส้นนี้จะหลุดออกนอกบริเวณที่แรเงา





(3) ตัวอย่างข้อนี้หากเปลี่ยนตัวเลขเป็น ค่าโดยสารที่นั่งละ 8,000 บาท จะทำให้ฟังก์ชันจุดประสงค์เปลี่ยนเป็น $Z = 8000x + 100y$ (ความชันเปลี่ยน) ซึ่งจุดยอดมุมที่ทำให้เกิดค่ามากที่สุดกลายเป็นจุด (15,375) ก็จะไม่มีปัญหาเรื่องค่า x เป็นทศนิยม

โจทย์

(1) จงเขียนกราฟแสดงบริเวณที่เป็นคำตอบของระบบอสมการแต่ละข้อ พร้อมทั้งหาจุดยอดมุมที่เกิดขึ้นทั้งหมดด้วย

(1.1)
$$\begin{aligned} x+y &\le 4 \\ 3x-2y &\le 6 \\ x \ge 0,\ y &\ge 0 \end{aligned}$$

(1.2)
$$\begin{aligned} x+y &\le 4 \\ 2x-y &\le 4 \\ x \ge 0,\ y &\ge 0 \end{aligned}$$

(1.3)
$$\begin{aligned} x+2y &\ge 4 \\ 2x+4y &\le 12 \\ x \ge 0,\ y &\ge 0 \end{aligned}$$

(1.4)
$$\begin{aligned} 5x+3y &\ge 0 \\ x-2y &\ge 0 \\ 2 \le x &\le 4 \end{aligned}$$

(1.5)
$$\begin{aligned} 3x+y &\le 6 \\ x-y &\le 1 \\ x+y &\le 4 \\ x \ge 0,\ y &\ge 0 \end{aligned}$$

(2) สำหรับข้อ (2.1) ถึง (2.3) ให้หาค่า P ที่สูงที่สุด หรือค่า C ที่ต่ำที่สุด และสำหรับข้อ (2.4) ถึง (2.8) ให้หาทั้งค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์

(2.1)
$$\begin{aligned} P &= 5x+3y \\ 2x+5y &\le 300 \\ x+y &\le 90 \\ 0 \le x &\le 70 \\ y &\ge 0 \end{aligned}$$

(2.2)
$$\begin{aligned} C &= 2x+3y \\ x+y &\ge 4 \\ 5x+2.5y &\le 25 \\ 0 \le x &\le 5 \\ 0 \le y &\le 5 \end{aligned}$$

(2.3)
$$\begin{aligned} P &= 2x+3y \\ 2x+3y &\le 30 \\ y-x &\le 5 \\ x+y &\ge 5 \\ x \ge 10,\ y &\ge 0 \end{aligned}$$

(2.4)
$$\begin{aligned} Z &= 3x+2y \\ 2x+3y &\le 12 \\ 2x+y &\le 8 \\ x \ge 0,\ y &\ge 0 \end{aligned}$$

(2.5)
$$\begin{aligned} Z &= 20x+30y \\ 4x+2y &\ge 100 \\ 2x+4y &\ge 140 \\ x \le 60,\ y &\le 40 \end{aligned}$$

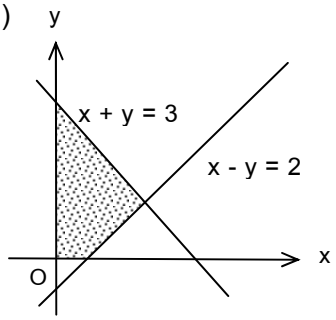
(2.6)
$$\begin{aligned} Z &= 40x+35y \\ 3x+5y &\ge 62 \\ 5x+y &\ge 30 \\ x \ge 0,\ y &\ge 0 \end{aligned}$$

(2.7)
$$\begin{aligned} Z &= x-2y+4 \\ x+y &\le 4 \\ x+2y &\ge -2 \\ x-y &\ge -2 \\ x &\le 3 \end{aligned}$$

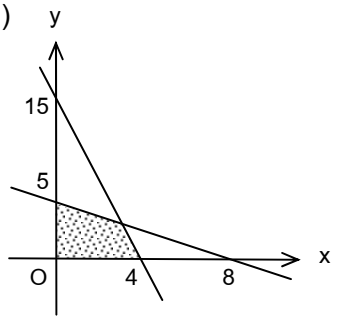
(2.8)
$$\begin{aligned} Z &= 8x+5y \\ 3x+y &\ge 6 \\ x+5y &\ge 8 \\ x+y &\ge 4 \\ x \ge 0,\ y &\ge 0 \end{aligned}$$

(3) บริเวณที่แรเงาเป็นกราฟของระบบอสมการใด

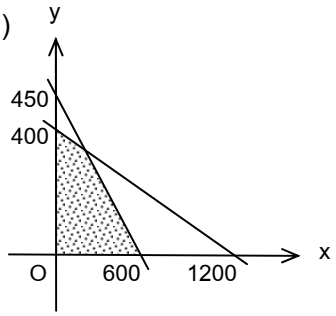
(3.1)



(3.2)



(3.3)



(4) โรงงานลิ้นจี่กระป๋องและสับปะรดกระป๋องแห่งหนึ่ง ขายลิ้นจี่ได้กำไรกระป๋องละ 4 บาท สับปะรดกำไรกระป๋องละ 7 บาท โดยกรรมวิธีการผลิตมี 2 ขั้นตอน คือ

- ปอกและต้มในน้ำเชื่อม (เครื่องจักรทำงานได้ไม่เกินครั้งละ 30 ชั่วโมง)
- บรรจุกระป๋อง (เครื่องจักรทำงานได้ไม่เกินครั้งละ 20 ชั่วโมง)

ลิ้นจี่ 1 กระป๋องต้องผ่านขั้นตอนแรก 3 นาที ขั้นตอนหลัง 1 นาที
สับปะรด 1 กระป๋องต้องผ่านขั้นตอนแรก 4 นาที ขั้นตอนหลัง 3 นาที
การผลิตแต่ละครั้งควรผลิตอย่างละกี่กระป๋อง จึงจะได้กำไรมากที่สุด

(5) โรงงานผลิตจานและชามพลาสติก มีรายละเอียดการใช้เครื่องจักร และกำไรที่ได้ ดังแสดงในตาราง ให้หาว่าควรผลิตอย่างละกี่ใบใน 1 วัน จึงจะได้กำไรสูงสุด

	จาน 1 ใบ	**ชาม 1 ใบ**	**เครื่องจักรทำงานได้**
เครื่องจักร A	2 นาที	1 นาที	ไม่เกินวันละ 3 ช.ม.
เครื่องจักร B	1 นาที	3 นาที	ไม่เกินวันละ 5 ช.ม.
กำไร	1.00 บาท	1.20 บาท	

(6) โรงงานผลิตสินค้าสองชนิด แต่ละวันจะใช้เหล็ก 250 กก. สินค้าชนิดที่หนึ่งใช้เหล็กชิ้นละ 10 กก. ชนิดที่สองใช้เหล็กชิ้นละ 25 กก. และสำหรับเวลาที่ใช้ผลิตแต่ละวันมี 260 นาที ทั้งสองชนิดใช้เวลาชิ้นละ 20 นาทีเท่ากัน ส่วนการทาสีมีเวลารวมวันละ 100 นาที ชนิดแรกใช้เวลาทาสีชิ้นละ 10 นาที ชนิดที่สองชิ้นละ 4 นาที ถ้าสินค้าชนิดแรกกำไรชิ้นละ 30 บาท ชนิดที่สองกำไรชิ้นละ 25 บาท ควรจะผลิตอย่างละกี่ชิ้นใน 1 วันจึงได้กำไรสูงที่สุด

(7) โรงงานผลิตสินค้าทำสินค้าออกมาสองชนิด คือ x กับ y โดยสินค้าแต่ละอย่างต้องผ่านกระบวนการ 3 ขั้นตอน ดังตาราง หากกำไรต่อชิ้นของสินค้า x เป็น 5,000 บาท สินค้า y เป็น 3,500 บาท ควรจะผลิตอย่างละกี่ชิ้นใน 1 วัน

	สินค้า x 1 ชิ้น	**สินค้า y 1 ชิ้น**	**เครื่องจักรทำงานได้**
ขั้นตอนที่ 1	3 ช.ม.	2 ช.ม.	24 ช.ม. ต่อวัน
ขั้นตอนที่ 2	1 ช.ม.	2 ช.ม.	16 ช.ม. ต่อวัน
ขั้นตอนที่ 3	1 ช.ม.	1 ช.ม.	9 ช.ม. ต่อวัน

(8) บริษัทผลิตวิทยุแห่งหนึ่งผลิตวิทยุออกมา 2 รุ่น คือรุ่น A กับรุ่น B โดยที่รุ่น A มีกำไรเครื่องละ 250 บาท รุ่น B 300 บาท แต่ละวันตั้งใจจะผลิตรุ่น A ไม่น้อยกว่า 80 เครื่อง รุ่น B ไม่น้อยกว่า 100 เครื่อง แต่ผลิตได้รวมกันไม่เกินวันละ 200 เครื่อง ควรจะผลิตอย่างไรจึงจะได้กำไรสูงสุด และกำไรสูงสุดนั้นเป็นเท่าใด

(9) โรงงานเฟอร์นิเจอร์ทำตู้และเตียงซึ่งจะใช้แรงงานช่างไม้กับช่างทาสี โดยตู้ 1 ใบช่างไม้ใช้เวลาทำ 15 ชั่วโมง ช่างทาสีอีก 12 ชั่วโมง และเตียง 1 หลังช่างไม้ใช้เวลาทำ 5 ชั่วโมง ช่างทาสี 4 ชั่วโมง ถ้าแต่ละวันช่างไม้ทุกคนช่วยกันทำงานได้เวลารวมกันอย่างมาก 60 ชั่วโมง ช่างทาสีรวมกัน 40 ชั่วโมง ส่วนกำไรนั้นตู้ใบละ 500 บาท เตียงหลังละ 400 บาท ควรจะผลิตตู้และเตียงอย่างละเท่าใดต่อวัน

(10) ผู้จัดการบริษัทต้องการซื้อตู้เก็บเอกสารใหม่จำนวนหนึ่ง เขาสอบถามได้ข้อมูลว่าตู้ยี่ห้อ A ราคาตู้ละ 400 บาท ใช้พื้นที่วาง 6 ตารางฟุต จุเอกสารได้ 8 ลูกบาศก์ฟุต ส่วนตู้ยี่ห้อ B ราคาตู้ละ 800 บาท ใช้พื้นที่วาง 8 ตารางฟุต จุเอกสารได้ 12 ลูกบาศก์ฟุต หากเขามีงบไม่เกิน 5,600 บาท และมีพื้นที่ไม่เกิน 72 ตารางฟุต เขาควรจะซื้ออย่างละกี่ตู้เพื่อให้เก็บเอกสารได้มากที่สุด และถามว่าเก็บเอกสารได้เท่าใด

(11) ต้องการจ้างคนงานสองคนมาทำความสะอาดตู้ 5 ตู้ โต๊ะ 12 ตัว และหิ้งหนังสือ 18 หิ้ง โดยคนงานคนที่หนึ่งสามารถทำความสะอาดตู้ได้ 1 ตู้ โต๊ะ 3 ตัว และหิ้งหนังสือ 3 หิ้งต่อชั่วโมง คนที่สองทำความสะอาดตู้ 1 ตู้ โต๊ะ 2 ตัว และหิ้งหนังสือ 6 หิ้งต่อชั่วโมง ค่าแรงคนที่หนึ่ง 25 บาทต่อชั่วโมง ค่าแรงคนที่สอง 22 บาทต่อชั่วโมง ควรจะจ้างคนงานทั้งสองทำงานคนละกี่ชั่วโมงเพื่อเสียค่าแรงน้อยที่สุด

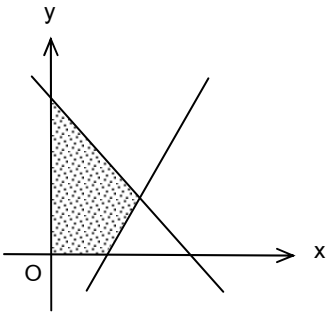
(12) ปุ๋ยเคมีสองชนิดมีส่วนผสมดังตาราง หากต้องการปุ๋ยที่มีฟอสฟอรัสไม่ต่ำกว่า 9 หน่วย ไนโตรเจนไม่ต่ำกว่า 8 หน่วย และโพแทสเซียมไม่เกิน 7 หน่วย จะเสียค่าใช้จ่ายในการซื้อปุ๋ยน้อยที่สุดเท่าใด

	ฟอสฟอรัส	**ไนโตรเจน**	**โพแทสเซียม**	**ราคาต่อถุง**
ชนิดที่ 1	3 หน่วย	1 หน่วย	1 หน่วย	50 บาท
ชนิดที่ 2	1 หน่วย	2 หน่วย	1 หน่วย	40 บาท

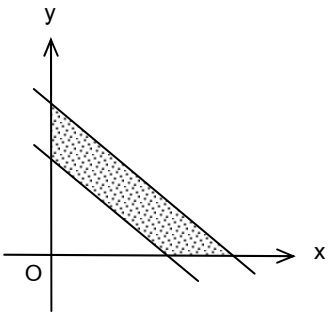
(13) บริษัทแห่งหนึ่งมีเหมืองอยู่ 2 แห่ง ในแต่ละวันเหมืองแรกผลิตแร่เกรด A ได้ 1 ตัน เกรด B 3 ตัน และเกรด C 5 ตัน ส่วนเหมืองที่สองผลิตแร่ทั้งสามเกรดได้เกรดละ 2 ตันเท่ากัน หากบริษัทต้องการผลิตแร่ส่งลูกค้าโดยเป็นแร่เกรด A 80 ตัน เกรด B 150 ตัน และเกรด C 200 ตัน ให้หาว่าบริษัทควรจะเปิดเหมืองเพื่อผลิตแร่แห่งละกี่วันจึงจะเสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด (ค่าใช้จ่ายในการขุดแร่แต่ละเหมืองเป็น 6,000 บาทต่อวัน เท่ากัน)

* (14) อาหารปลาชนิดแรกราคาถุงละ 6 บาท มีอัตราส่วนระหว่างโปรตีน ไขมัน และคาร์โบไฮเดรต เท่ากับ 1 : 2 : 2 ในขณะที่อาหารปลาชนิดที่สองราคาถุงละ 4 บาท มีอัตราส่วนเป็น 1 : 1 : 5 ให้หาอัตราส่วนระหว่างอาหารชนิดที่หนึ่งกับชนิดที่สองที่ผู้เลี้ยงปลาควรจะซื้อ ถ้าอัตราส่วนระหว่างโปรตีน ไขมัน และคาร์โบไฮเดรต ที่จำเป็นต้องใช้ ไม่ต่ำกว่า 3 : 4 : 10

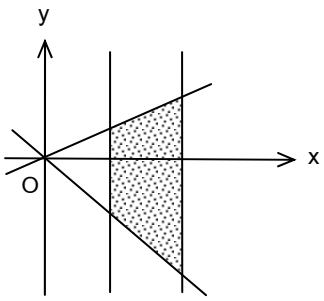
<u>เฉลย</u> (1.1) (0,0), (0,4), (2,0), (14/5,6/5) และ (1.2) (0,0), (0,4), (2,0), (8/3,4/3)



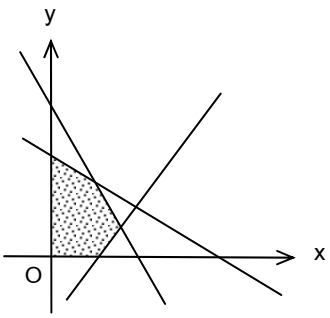
(1.3) (0,2), (0,3), (4,0), (6,0)



(1.4) (2,1), (4,2), (2,-10/3), (4,-20/3)



(1.5) (0,0), (0,4), (1,0), (1,3), (7/4,3/4)



(2.1) 410 (2.2) 8 (2.3) 30 (2.4) 13, 0 (2.5) 2400, 1100 (2.6) หาค่าไม่ได้, 434 (2.7) 12, -1 (2.8) 64, 23 (3.1) $x-y\le 2, x+y\le 3, x\ge 0, y\ge 0$ (3.2) $5x+8y\le 40$ $15x+4y\le 60, x\ge 0, y\ge 0$ (3.3) $3x+4y\le 1800, x+3y\le 1200, x\ge 0, y\ge 0$ (4) ลิ้นจี่ 120 กระป๋อง, สับปะรด 360 กระป๋อง (5) จาน 48 ใบ, ชาม 84 ใบ (6) ชนิดที่หนึ่ง 8 ชิ้น, ชนิดที่สอง 5 ชิ้น (7) สินค้า x 6 ชิ้น, สินค้า y 3 ชิ้น (8) รุ่น A 80 เครื่อง, รุ่น B 120 เครื่อง, กำไร 56,000 บาท (9) ผลิตเตียง 10 หลังโดยไม่ผลิตตู้เลย (10) ยี่ห้อ A 8 ตู้, ยี่ห้อ B 3 ตู้, เก็บได้ 100 ลบ.ฟุต (11) คนแรก 2 ช.ม., คนที่สอง 3 ช.ม. (12) 220 บาท (ชนิดที่ 1 สองถุง ชนิดที่ 2 สามถุง) (13) เหมืองแรก 36 วัน, เหมืองที่สอง 22 วัน หรือเหมืองแรก 34 วัน, เหมืองที่สอง 24 วัน ก็ได้ (14) 5 : 14

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric Function)

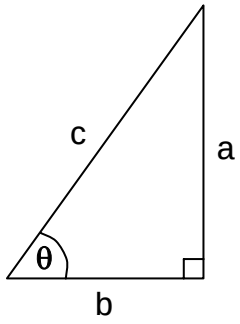
• *ตรีโกณมิติ* (Trigonometry) เป็นวิชาที่เกี่ยวกับการวัดส่วนประกอบของรูปสามเหลี่ยม เช่น ความยาวด้าน, ขนาดของมุม, และขนาดพื้นที่ โดยมีฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องอยู่ 6 ฟังก์ชัน เรียกว่า *ฟังก์ชันตรีโกณมิติ* (Trigonometric Function) ได้แก่ ฟังก์ชันไซน์ (Sine; $\sin$) โคไซน์ (Cosine; $\cos$) แทนเจนต์ (Tangent; $\tan$) โคแทนเจนต์ (Cotangent; $\cot$) เซแคนต์ (Secant; $\sec$) และโคเซแคนต์ (Cosecant; cosec หรือ $\csc$)

• แต่ละฟังก์ชันมีโดเมนเป็นขนาดของมุม θ และค่าเรนจ์ที่ได้ออกมานั้นเป็นจำนวนจริง ซึ่งจะพบว่า หาก $0° < \theta < 90°$ แล้ว ค่าฟังก์ชันที่ได้คือ “อัตราส่วนระหว่าง 2 ด้านในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มุมหนึ่งมีขนาดเท่ากับ θ”

$$\sin\theta = \frac{a}{c} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{c}{a}$$

$$\cos\theta = \frac{b}{c} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{c}{b}$$

$$\tan\theta = \frac{a}{b} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{b}{a}$$



• ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ควรทราบ

θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\theta$	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0
$\tan\theta$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	หาค่าไม่ได้

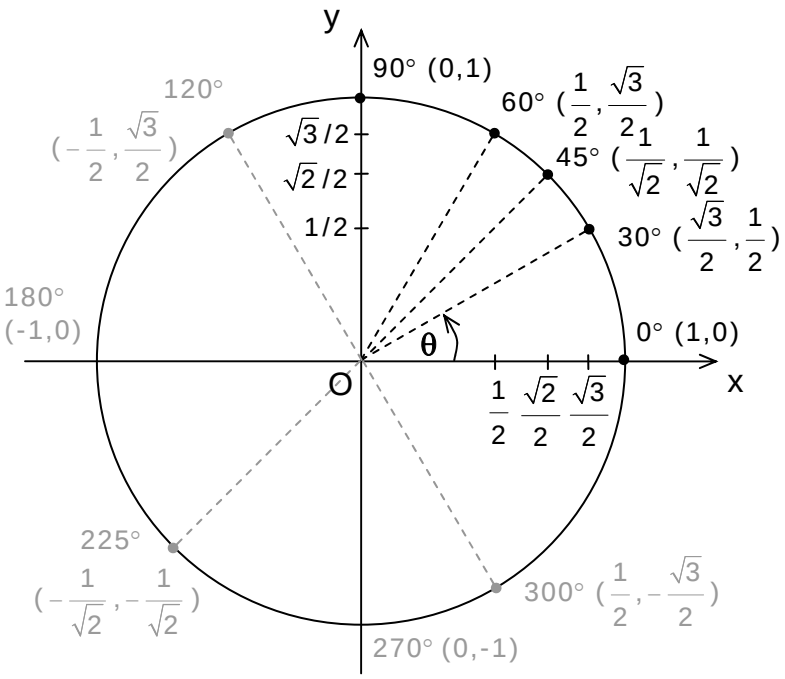
• *เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติ* ที่สำคัญ ได้แก่

1. $\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$ เป็นความสัมพันธ์ระหว่างค่า $\sin$ และ $\cos$ ของมุมใดๆ ซึ่งได้มาจากทฤษฎีบทปีทาโกรัสในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ($a^2+b^2=c^2$ นำ c^2 หารสองข้าง) นอกจากนี้ เมื่อนำ $\sin^2\theta$ หารทั้งสองข้างของสมการอีก จะได้ $\boxed{1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta}$ หรือถ้านำ $\cos^2\theta$ หารทั้งสองข้างของสมการ ก็จะได้ $\boxed{\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta}$

2. $\boxed{\sin\theta = \cos(90°-\theta)}$ เป็นความสัมพันธ์แบบ *โค-ฟังก์ชัน* (Co-function) ซึ่งสังเกตได้จากความสัมพันธ์ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเช่นกัน กล่าวว่า “ถ้ามุมสองมุมรวมกันได้ $90°$ แล้ว ค่า $\sin$ ของมุมหนึ่งจะเท่ากับค่า $\cos$ ของอีกมุม” และนอกจากนี้ยังมีอีกสองคู่ คือ $\boxed{\tan\theta = \cot(90°-\theta)}$ และ $\boxed{\sec\theta = \operatorname{cosec}(90°-\theta)}$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติในวงกลมหนึ่งหน่วย

• จากความสัมพันธ์ที่ว่า $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ เสมอ (ทุกๆ ค่า θ) ถ้าให้ $\sin\theta, \cos\theta$ เป็นแกน x, y แล้ว จะได้กราฟเป็นรูปวงกลมรัศมี 1 หน่วย โดยมีข้อตกลงที่ใช้เป็นมาตรฐาน คือให้ แกน x เป็น $\cos\theta$ และแกน y เป็น $\sin\theta$ กำหนดแบบนี้ก็เพื่อให้ θ เป็นมุมที่ทำกับแกน x โดยเริ่มวัดเป็น $0°$ ในแนว +x และเพิ่มขึ้นในทิศทวนเข็มนาฬิกา เรียงไปตามลำดับควอดรันต์ (คือเป็น $90°$ ในทิศ +y, เป็น $180°$ ในทิศ –x, ...) พอดี



$\sin 45° = 1/\sqrt{2}$
$\cos 60° = 1/2$
$\sin 90° = 1$
$\cos 90° = 0$
$\sin 120° = \sqrt{3}/2$
$\cos 120° = -1/2$
$\sin 180° = 0$
$\cos 180° = -1$
$\sin 225° = -1/\sqrt{2}$
$\cos 225° = -1/\sqrt{2}$
$\sin 300° = -\sqrt{3}/2$
$\cos 300° = 1/2$

• ประโยชน์ของวงกลมหนึ่งหน่วย คือ เราสามารถหาค่าฟังก์ชันของมุม θ ต่างๆ ได้ง่ายขึ้น, สามารถขยายฟังก์ชันให้ใช้กับ θ ใดๆ ก็ได้ ไม่ว่าจะเกิน $90°$ หรือจะเป็นค่าติดลบก็ตาม (วัดตามเข็มนาฬิกา), และยังช่วยให้เห็นแนวโน้มของค่าฟังก์ชันเมื่อ θ มีค่าอยู่ในควอดรันต์ต่างๆ

• ข้อสังเกต จากกราฟวงกลมนี้ทำให้เราได้ทราบว่า

1. $\sin\theta, \cos\theta$ มีค่าได้ตั้งแต่ -1 ถึง 1 เท่านั้น

2. $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ ... เพราะ $\theta, -\theta$ จะอยู่เหนือแกนและใต้แกนตรงข้ามกันเสมอ

และ $\cos(-\theta) = \cos\theta$ ... เพราะ $\theta, -\theta$ จะอยู่ซ้ายหรือขวาเท่าๆ กันเสมอ

ดังนั้น $\tan(-\theta) = -\tan\theta$ ... ได้จากการนำ $\sin(-\theta)$ หารด้วย $\cos(-\theta)$

โจทย์

(1) ให้หาค่าของ

(1.1) $\sin x + \sin 2x + \sin 4x$ เมื่อ $x = 60°$

(1.2) $\cos 4x - \cos 3x + \cos x$ เมื่อ $x = 120°$

(2) จงหา $\sin\theta + \cos\theta$ หากกำหนดเงื่อนไข θ ดังแต่ละข้อ

(2.1) ปลายส่วนโค้ง θ อยู่บนเส้นตรงซึ่งเชื่อมจุด $(0,0)$ กับ $(3,4)$

(2.2) ปลายส่วนโค้ง θ อยู่บนเส้นตรง $y = 2x-1$

(3) ให้หาค่าของ

(3.1) $\cos^2 35^\circ + \sec^2 70^\circ - \operatorname{cosec}^2 47^\circ + \sin^2 35^\circ - \tan^2 70^\circ + \cot^2 47^\circ$

(3.2) $\dfrac{\sec^2 x}{2 + 2\tan^2 x} + \cot^2 x + \cot^2 x \sin^2 x + \sin^2 x - \operatorname{cosec}^2 x$

(4) จงเขียนให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

(4.1) $\dfrac{1}{1+\sin^2\theta} + \dfrac{1}{1+\cos^2\theta} + \dfrac{1}{1+\sec^2\theta} + \dfrac{1}{1+\operatorname{cosec}^2\theta}$

(4.2) $2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) + 1$

[Hint: กระจาย $(\sin^2 x + \cos^2 x)^3$ และ $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2$ ก่อน]

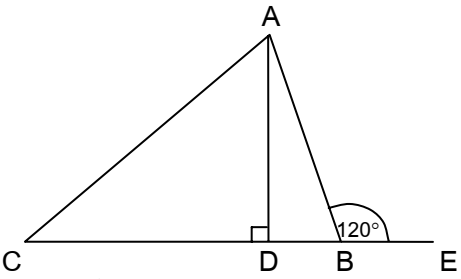
(5) ถ้า $\sin\theta - \cos\theta = a$ แล้ว $\sin\theta\cos\theta$ มีค่าเท่าใด

(6) ถ้า $(\sin\theta - \cos\theta)^2 = a^2$ แล้ว $\operatorname{cosec}\theta - \sec\theta$ มีค่าเท่าใด

(7) ถ้า ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากซึ่งมี A เป็นมุมฉาก และ $\tan B = 3/4$ แล้ว ให้หาค่าของ $\sec C \cot B \operatorname{cosec} A$

(8) กำหนดสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มีมุม B เป็นมุมฉาก หากลาก $\overline{BD}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AC}$ ที่จุด D แล้วพบว่า $\left|\overline{AB}\right| = 10$, $\left|\overline{BD}\right| = 8$ จงหาค่า $\sin, \cos$ ของมุม A และขนาดของ $\overline{BC}$, $\overline{CD}$

(9) จากภาพ หาก $BC = 10$ และพื้นที่สามเหลี่ยม ABC เป็น $10\sqrt{3}$ ตารางหน่วย ให้หาขนาดพื้นที่สามเหลี่ยม ACD



(10) ถ้า $\sin\theta = 0.7310$ และ $0 < \theta < 90^\circ$ ให้หาค่า θ นั้น

(ตารางระบุค่า $\cos 43^\circ = 0.7314$ และ $\cos 43^\circ 10' = 0.7294$)

<u>การวัดมุมในระบบเรเดียน</u>

- นอกจากการวัดมุมในระบบ *องศา* (Degree; $^\circ$) แล้ว ยังมีอีกระบบหนึ่งซึ่งวัดจากความยาวส่วนโค้ง (เส้นรอบวง) ของวงกลมหนึ่งหน่วย เรียกว่า *เรเดียน* (Radian; rad) นั่นคือ

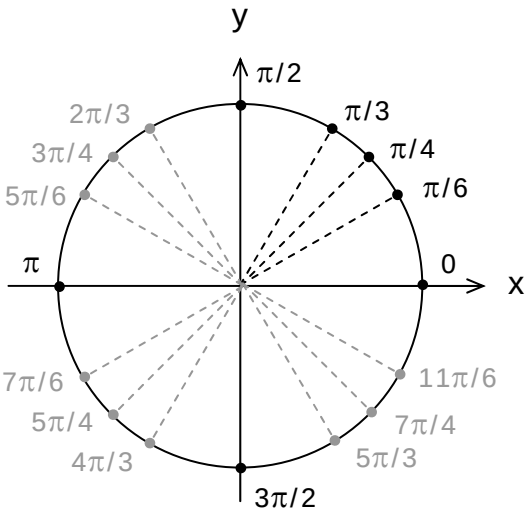
360° คิดเป็น 2π เรเดียน (ความยาวเส้นรอบวง) | 180° คิดเป็น π เรเดียน

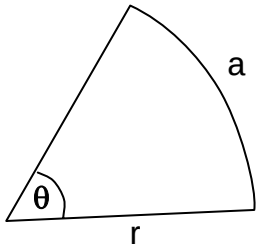
90° คิดเป็น $\pi/2$ เรเดียน | 60° คิดเป็น $\pi/3$ เรเดียน

45° คิดเป็น $\pi/4$ เรเดียน | 30° คิดเป็น $\pi/6$ เรเดียน

<u>ข้อสังเกต</u> หน่วยเรเดียนนี้ เป็นค่าจำนวนจริง ($\pi = 3.1416\ldots$)

- การแปลงหน่วยระหว่างองศา กับเรเดียน ใช้วิธีเทียบบัญญัติไตรยางศ์ ตามปกติ





• ความสัมพันธ์ระหว่างมุม θ (หน่วยเรเดียน) กับความยาวส่วนโค้ง a ในวงกลมรัศมี r ใดๆ คือ $\boxed{\theta = a/r}$

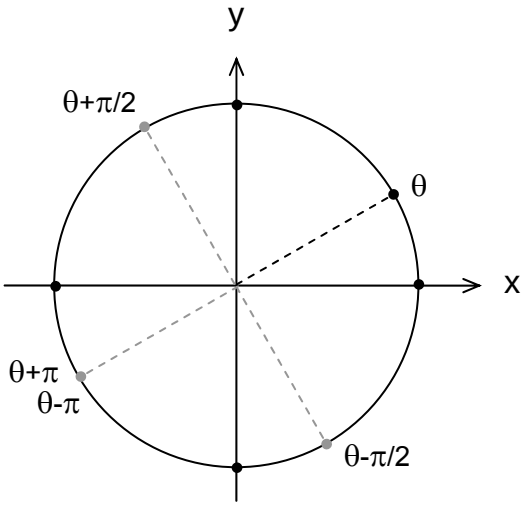
<u>หมายเหตุ</u> การวัดมุมเป็นเรเดียน มักละหน่วยไว้ ไม่ต้องเขียนกำกับว่า rad ก็ได้ หากไม่มีสัญลักษณ์องศากำกับ แสดงว่าเป็นมุมเรเดียน เช่น $\sin 30$ ไม่เท่ากับ $1/2$

<u>การลดรูปขนาดมุม</u>

• หากขนาดของมุมที่จะหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิตินั้น มี $n\pi$ หรือ $n\pi/2$ ไปบวกลบอยู่ เช่น $\sin(2\pi-\theta)$, $\cos(\pi+\theta)$, $\sin(\pi/2-\theta)$, ฯลฯ เราสามารถกำจัดค่าคงที่เหล่านี้ทิ้งได้ ให้เหลือเพียงมุม θ เช่น $\sin(\theta\pm 2\pi) = \sin\theta$

$$\cos(\theta\pm 2\pi) = \cos\theta$$
$$\sin(\theta\pm\pi) = -\sin\theta$$
$$\cos(\theta\pm\pi) = -\cos\theta$$
$$\sin(\theta\pm\pi/2) = \pm\cos\theta$$
$$\cos(\theta\pm\pi/2) = \mp\sin\theta$$

ความสัมพันธ์เหล่านี้ พิจารณาได้จากวงกลมหนึ่งหน่วย



• ข้อสังเกตคือ เมื่อตัดมุม $n\pi$ ออก ฟังก์ชันยังคงเป็นชื่อเดิมไม่เปลี่ยน แต่ถ้าตัดมุม $n\pi/2$ ออก ฟังก์ชันจะเปลี่ยนชื่อเป็นโคฟังก์ชันเสมอ (แต่นอกจากนี้ยังต้องดูเครื่องหมายบวกลบด้วยว่าเปลี่ยนหรือไม่)

โจทย์

(11) วงกลมวงหนึ่งมีรัศมี 24 ซม. ให้หาความยาวส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางขนาด

(11.1) $2/3$ เรเดียน

(11.2) $130°$

(12) มุมที่จุดศูนย์กลางวงกลมที่รัศมียาว 4 ซม. และส่วนโค้งรองรับมุมนี้ยาว 8 ซม. จะมีขนาดเป็นกี่เรเดียน

(13) ให้หารัศมีวงกลมซึ่งมุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาด 5 เรเดียน และส่วนโค้งที่รองรับมุมนี้ ยาว 20 นิ้ว

(14) สามเหลี่ยมหน้าจั่วมีมุมยอด $22.5°$ บรรจุอยู่ในวงกลม โดยจุดยอดอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลม ถ้าส่วนโค้งของวงกลมที่ถูกแบ่งด้วยฐานของสามเหลี่ยม ยาว 4 ซม. ให้หาความยาวรัศมีของวงกลมนี้

(15) ให้หาค่าของ $\dfrac{\sin\frac{2\pi}{3}-\cos\frac{4\pi}{3}-\tan\frac{5\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}+\tan\frac{3\pi}{4}+\sin\frac{7\pi}{6}}$

(16) ถ้า $f(\theta)=\cos\left(\dfrac{\pi-\theta}{3}\right)$ แล้ว ค่าของ $f(2\pi)-f(0)$ เป็นเท่าใด

(17) ตอบคำถามต่อไปนี้

(17.1) เมื่อ $0<\theta<\pi/2$ ค่าของ θ กับ $\sin\theta$ ค่าใดมากกว่ากัน

(17.2) ถ้า θ มากขึ้นจาก $\pi/2$ ไปสู่ π แล้ว ค่า $\operatorname{cosec}\theta$ เป็นอย่างไร

(18) ประโยคใดจริงหรือเท็จบ้าง

(18.1) $\sin 1° > \sin 1$

(18.2) $\tan 1 < \tan 2$

(18.3) $\sin(1-\pi)=\sin 1$

(18.4) $\sin(-\pi/6)<0$

(18.5) $\sin(-11\pi/6)<0$

(18.6) $\tan(\pi/7)=\tan(6\pi/7)$

(19) ให้หาค่าของ

(19.1) $\dfrac{\sin(2\pi-\theta)\ \tan(\pi-\theta)\ \cot(3\pi-\theta)}{\cot(2\pi+\theta)\ \tan(\pi+\theta)}$

(19.2) $[\sin\theta+\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)]^2+[\cos\theta-\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)]^2$

(20) ให้หาค่าของ $\cos 300°+\sin 450°+\tan 495°$

(21) ให้หาค่าของ $\dfrac{\sin^2(-253°)+\cos^2(287°)}{1-\sin^2(217°)}-\dfrac{\sin^2(323°)}{\cos^2(37°)}$

(22) ตอบคำถามต่อไปนี้ เมื่อ $0<x<2\pi$

(22.1) ค่ามากที่สุดของ $2-\cos 2x$ เป็นเท่าใด เมื่อ x เป็นเท่าใด

(22.2) ค่าต่ำสุดของกราฟ $y=3\sin(2x-\pi/2)$ เป็นเท่าใด เมื่อ x เป็นเท่าใด

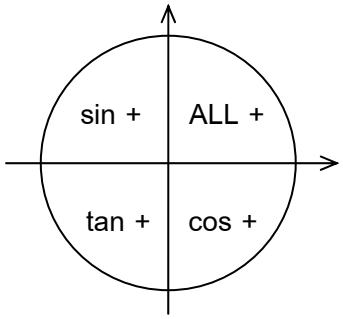
(23) [Ent'ต.ค.42] จงหาเซต $\{\cos A \mid 0\le A\le 4\pi/3$ และ $5-3\sin 3A$ มีค่ามากที่สุด$\}$

ข้อควรระวังในสมการตรีโกณมิติ

1. การทราบค่าฟังก์ชันค่าหนึ่ง เช่น ทราบว่า $\sin\theta = 1/2$ จะยังไม่สามารถสรุปได้ทันทีว่า θ อยู่ตำแหน่งใด เพราะจะมีสองคำตอบอยู่ในคนละควอดรันต์เสมอ (เช่นในกรณีนี้ θ อาจเป็นตำแหน่ง 30° หรือ 150°) ดังนั้นเราต้องทราบเพิ่มเติมด้วยว่า ค่า θ นี้อยู่ในควอดรันต์ใด

- โดยปกติเราสามารถทราบควอดรันต์ได้จากเครื่องหมายของค่าฟังก์ชันอื่น เช่นถ้าทราบเพิ่มว่า $\cos\theta > 0$ ก็แสดงว่าเป็นควอดรันต์ 1 คือ 30° แต่ถ้าทราบว่า $\cos\theta < 0$ ก็ต้องเป็นควอดรันต์ 2 คือ 150°

- แผนภาพต่อไปนี้เป็นการสรุปเครื่องหมาย เพื่อความสะดวกในการหาคำตอบ



Q_1 เป็นบวกทั้ง 6 ค่า
Q_2 มีเฉพาะ sin และ cosec ที่เป็นบวก
Q_3 มีเฉพาะ tan และ cot ที่เป็นบวก
Q_4 มีเฉพาะ cos และ sec ที่เป็นบวก

2. สมมติว่าต้องการค่า θ ในช่วง $0 \le \theta \le 2\pi$ แต่สมการที่ได้นั้นเป็นค่า 2θ (เช่น $\sin 2\theta = 1/\sqrt{2}$) จะต้องขยายช่วงคำตอบเป็น $0 \le 2\theta \le 4\pi$ (แล้วจึงนำคำตอบ 2θ ที่ได้ทุกคำตอบหารด้วยสอง) หากไม่ขยายช่วง จะกลายเป็น $0 \le 2\theta \le 2\pi$ คำตอบที่ได้จะไม่ครบ

3. คำตอบบางคำตอบ (โดยเฉพาะที่อยู่บนแกน x หรือแกน y) อาจใช้ไม่ได้ ในกรณีที่สมการมีคำว่า $\tan, \operatorname{cosec}, \sec, \cot$ เพราะค่าเหล่านี้มาจากการหารกันของ $\sin, \cos$ ต้องตรวจสอบด้วยว่ามีคำตอบใดหาค่าเหล่านี้ไม่ได้ (คือ ตัวส่วนเป็น 0) หรือไม่

4. ถ้าโจทย์ไม่ได้ระบุช่วงของคำตอบ ให้ตอบในรูปทั่วไปที่การหมุนของ θ เป็นกี่รอบก็ได้ เช่น ถ้าการหมุนรอบแรกในช่วง $[0, 2\pi]$ มีคำตอบ 1 จุด คือ $\pi/4$ ให้ตอบว่า $\pi/4 \pm 2n\pi$ แต่หากมีคำตอบหลายจุดในการหมุนรอบแรก อาจลดรูปลงเหลือประโยคเดียวได้ เช่น ถ้าคำตอบเป็น $\pi/3, 2\pi/3$ ก็อาจตอบรูปทั่วไปโดยยึดจุดกึ่งกลาง ว่า $\pi/2 \pm \pi/6 \pm 2n\pi$

โจทย์

(24) เมื่อ $\cos\theta = 4/5$ และ $0 \le \theta \le \pi/2$ แล้ว ให้หาค่าของ $5\tan\theta + 4\sec^2\theta$

(25) เมื่อ $\sin\theta = -3/5$ และ $\tan\theta > 0$ ให้หาค่าของ $\tan\theta - \cos\theta$

(26) เมื่อ $\tan\theta = 15/8$ และ $\pi < \theta < 3\pi/2$ ให้หาค่าของ $\sin\theta + \cos\theta$

(27) เมื่อ $\sin x = 5/13$ และ $\cos x < 0$ ให้หาค่าของ $\sin(x-\pi) + \cos(x-\pi)$

(28) กำหนดให้ $\sec\theta = 5/3$ และ $0 < \theta < \pi$ แล้ว ให้หาค่าของ $\dfrac{\sin\theta - \cos\theta}{\tan\theta - \csc\theta}$

(29) [Ent'ต.ค.43] ถ้า $\sin x = 3/5$ และ $\tan x = -3/4$ แล้ว จงหาค่าของ

$$\det\left(2\begin{bmatrix}\operatorname{cosec} x & \sec x\\ 1 & \cos x\end{bmatrix}\right)$$

(30) ตอบคำถามต่อไปนี้ เมื่อ $0 < \theta < 2\pi$

(30.1) ให้หาค่า θ ที่ทำให้ $\cos\theta = \sqrt{3}/2$

(30.2) ให้หาค่า θ ที่ทำให้ $\cos 2\theta = \sqrt{3}/2$

(31) เมื่อ $\tan x + \sec x = 2$ ให้หาค่าของ $\cos x$

(32) เมื่อ $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = 5/3$ แล้ว ให้หาค่าของ $\sin\theta$

(33) เมื่อ $2\sin x = \sec x$ ให้หาค่าของ $\sin^4 x + \cos^4 x$

(34) เมื่อ $2\sin x = \sec x$ ให้หาค่าของ $1 - \dfrac{\sin^2 x}{1+\cot x} - \dfrac{\cos^2 x}{1+\tan x}$

(35) เมื่อ $\sin\theta + \cos\theta = 1/5$ และ $0 \le \theta \le \pi$ ให้หาค่าของ $\tan\theta$

(36) เมื่อ $2\tan^2\theta - \sec\theta = 1$ และ $0 \le \theta \le \pi/2$ แล้ว ให้หาค่าของ $\sec\theta$

(37) เมื่อ $4\sin^2 x + 11\cos x - 1 = 0$ และ $\pi \le x \le 2\pi$ ให้หาค่าของ

$\sin(-x) + \cos(-x) + \tan(-x)$

(38) [Ent'36] กำหนดให้ $4\sin^2\theta + 11\cos\theta - 1 = 0$ แล้ว $\cot^2(\theta+\pi/2) + \sec(\theta-3\pi)$ มีค่าเท่าใด

(39) ให้หาค่า x จากสมการ $\cos^2 2x + 3\sin 2x - 3 = 0$

(40) [Ent'38] ให้หาเซตคำตอบของอสมการ $2\sin^4 x + 3\sin^2 x - 2 \ge 0$ โดยที่

$0 \le x \le 2\pi$

(41) ค่าของ $0 \le \theta \le 2\pi$ ที่ทำให้ $\sin\theta + \cos\theta \le 0$ จะอยู่ในช่วงใด

(42) [Ent'35] สำหรับจำนวนจริง x ใดๆ ให้ A_x เป็นเมตริกซ์ซึ่ง $A_x = \begin{bmatrix} 2\sin x & 2\sin^2 x \\ \sqrt{2}\cos^2 x & \cos x \end{bmatrix}$

ถามว่า $S = \{x \mid -2\pi \le x \le 2\pi$ และ A_x เป็นซิงกูลาร์เมตริกซ์ $\}$ มีจำนวนสมาชิกกี่ตัว

(43) จงหาผลบวกคำตอบทั้งหมดของสมการ $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์

$\cup = \{ x \in A \mid \cos(-x) \ge -\cos x \}$ และ $A = [0, 2\pi]$

(44) [Ent'39] กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{\cos^2 x} + \cos x$ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้ถูก

ก. ถ้า $0 \le x \le \pi$ แล้ว $f(x) = 2\cos x$

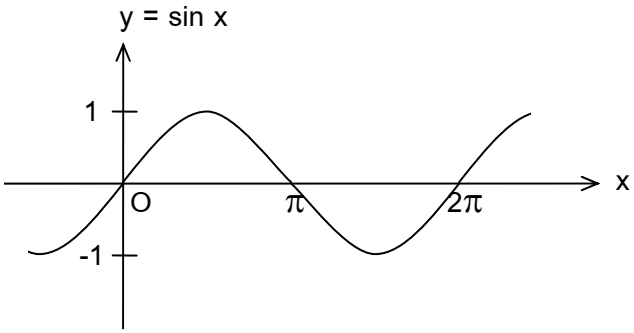
ข. ถ้า $\pi \le x \le 2\pi$ แล้ว $f(x) = 2\cos x$

ค. ถ้า $\pi/2 \le x \le 3\pi/2$ แล้ว $f(x) = 0$

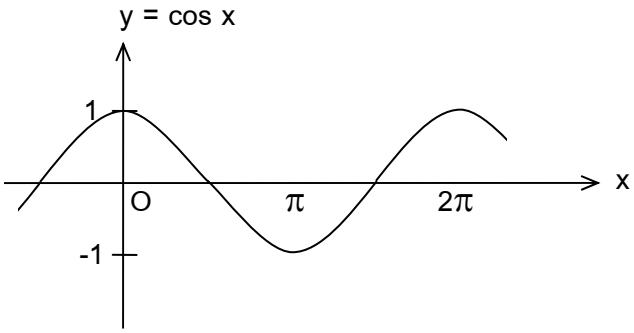
ง. ถ้า $3\pi/2 \le x \le 2\pi$ แล้ว $f(x) = 0$

<u>กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ</u>

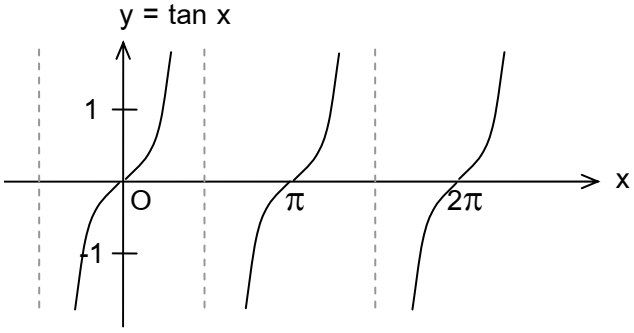
• การศึกษาเรื่องกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยเฉพาะฟังก์ชัน sin และ cos จะเป็นประโยชน์ในการศึกษาเรื่องอื่นๆ ได้ เช่น คลื่น, เสียง, การเคลื่อนที่แบบเป็นคาบ (การแกว่ง)



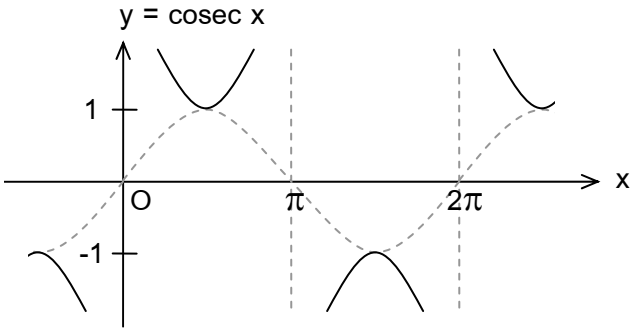
$D_{sin} = \mathbb{R}$
$R_{sin} = [-1,1]$
period $= 2\pi$
amplitude $= 1$



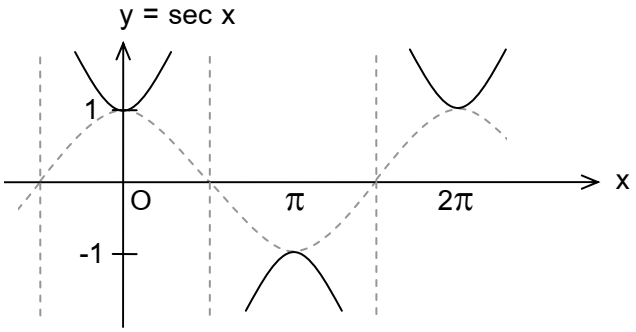
$D_{cos} = \mathbb{R}$
$R_{cos} = [-1,1]$
period $= 2\pi$
amplitude $= 1$



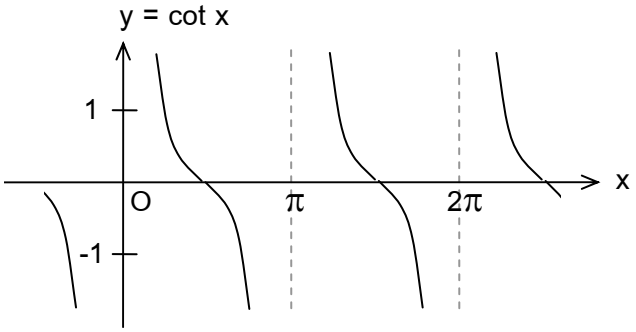
$D_{tan} = \mathbb{R} - \{\pi/2 \pm n\pi\}$
$R_{tan} = \mathbb{R}$
period $= \pi$



$D_{cosec} = \mathbb{R} - \{\pm n\pi\}$
$R_{cosec} = \mathbb{R} - (-1,1)$
period $= 2\pi$



$D_{sec} = \mathbb{R} - \{\pi/2 \pm n\pi\}$
$R_{sec} = \mathbb{R} - (-1,1)$
period $= 2\pi$



$D_{cot} = \mathbb{R} - \{\pm n\pi\}$
$R_{cot} = \mathbb{R}$
period $= \pi$

<u>โจทย์</u>

(45) ให้ $A = (-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2)$ ฟังก์ชันใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันลด บนเซต A

ก. $\sin x$ ข. $\cos x$ ค. $\text{cosec } x$ ง. $\sec x$

(46) กราฟของ $y = \sin x$ และ $y = \cos x$ เมื่อ $0 \le x \le 2\pi$ ตัดกันกี่จุด และจุดใดบ้าง

<u>เฉลย</u>

(1.1) $\sqrt{3}/2$ (1.2) -2 (2.1) $7/5$ (2.2) $7/5$ หรือ -1 (3.1) 1 (3.2) $1/2$ (4.1) 2 (4.2) 0 (5) $(1-a^2)/2$ (6) $\pm 2a/(1-a^2)$ (7) $20/9$ (8) $4/5, 3/5, 13.33, 10.67$ (9) $8\sqrt{3}$ ตารางหน่วย (10) $46°58'$ (11.1) 16 ซม. (11.2) $52\pi/3$ ซม. (12) 2 เรเดียน (13) 4 นิ้ว (14) $32/\pi$ ซม. (15) $-(3\sqrt{3}+1)/2$ (16) 0 (17.1) θ (17.2) เพิ่มขึ้นจาก 1 ถึง ∞ (18) เท็จทุกข้อ ยกเว้น (18.4) เป็นจริง (19.1) $-\sin\theta$ (19.2) 2 (20) $1/2$ (21) 1 (22.1) เป็น 3 เมื่อ $x = \pi/2, 3\pi/2$ (22.2) เป็น 3 เมื่อ $x = \pi$ (23) $\{0, -\sqrt{3}/2\}$ (24) 10 (25) $31/20$ (26) $-23/17$ (27) $7/13$ (28) $12/5$ (29) $-1/3$ (30.1) $\pi/6, 11\pi/6$ (30.2) $\pi/12, 11\pi/12, 13\pi/12, 23\pi/12$ (31) $4/5$ (32) $30/34$ (33) $1/2$ (34) $1/2$ (35) $-4/3$ (36) $3/2$ (37) $-(1+3\sqrt{15})/4$ (38) 19 (39) $\pi/4 \pm n\pi$ (40) $[\pi/4, 3\pi/4] \cup [5\pi/4, 7\pi/4]$ (41) $[3\pi/4, 7\pi/4]$ (42) 9 (43) 1+5=6 (44) ค. (45) ค. (46) 2 จุด คือ $(\pi/4, 1/\sqrt{2}), (5\pi/4, -1/\sqrt{2})$

ตรีโกณมิติและการประยุกต์ (Applied Trigonometry)

<u>ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวก และผลต่างมุม</u>

• โดยทั่วไปการคำนวณค่าตรีโกณมิติอาจเกี่ยวข้องกับมุมที่เกิดจากการบวกกัน หรือลบกัน ดังนั้นในหัวข้อนี้จะเป็นการสรุปสูตรที่สำคัญ เพื่อนำไปใช้ประโยชน์

• <u>สูตรชุดที่หนึ่ง</u> สูตรเบื้องต้น

เราสามารถพิสูจน์สูตรหลัก คือ $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ (วิธีพิสูจน์ไม่ได้แสดงไว้ในที่นี้) และจากนั้นถ้าแทน β ด้วย $-\beta$ จะได้สูตร $\cos(\alpha+\beta)$

รวมทั้งได้สูตร $\sin(\alpha+\beta)$ กับ $\sin(\alpha-\beta)$ จาก $\sin(\alpha+\beta) = \cos(90^\circ-(\alpha+\beta))$

(1) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

(2) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

(3) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

(4) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$$\begin{cases} \tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \\ \tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} \end{cases}$$

• <u>สูตรชุดที่สอง</u> สูตรผลคูณ

เกิดจากสมการที่ (1) บวกลบกับ (2) และสมการที่ (3) บวกลบกับ (4)

(5) $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$

(6) $-2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)$

(7) $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$

(8) $2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$

• <u>สูตรชุดที่สาม</u> สูตรผลบวก และผลลบ

มีที่มาเดียวกับสูตรชุดที่สอง คือสมการที่ (1) บวกลบกับ (2) และสมการที่ (3) บวกลบกับ (4) แต่ถ้าให้ $A = \alpha + \beta$ และ $B = \alpha - \beta$ จะได้ว่า

(9) $\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$

(10) $\cos A - \cos B = -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$

(11) $\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$

(12) $\sin A - \sin B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$

• <u>สูตรชุดที่สี่</u> สูตรมุมสองเท่า และมุมครึ่ง

สูตรสำหรับมุมสองเท่าได้จากสมการชุดที่หนึ่งเช่นกัน คือใช้มุมเป็น $\alpha + \alpha = 2\alpha$

$$\boxed{\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ หรือ $\boxed{\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$

$$\boxed{\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}}$$

สูตรสำหรับมุมครึ่ง ได้จากการย้ายข้างสมการ $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ โดยมองว่า α กลายเป็น $\alpha/2$ และ 2α กลายเป็น α

$$\sin(\alpha/2) = \pm\sqrt{(1-\cos\alpha)/2}$$

$$\cos(\alpha/2) = \pm\sqrt{(1+\cos\alpha)/2}$$

และ $\tan(\alpha/2) = \pm\sqrt{(1-\cos\alpha)/(1+\cos\alpha)}$

• นอกจากนี้ยังสามารถพิสูจน์สูตรมุมใดๆ ต่อไปอีก โดยอาศัยหลักการเดียวกันกับสี่ชุดข้างต้น เช่น อาจหาสูตรมุมสามเท่า $\sin(3\alpha), \cos(3\alpha), \tan(3\alpha)$ หรือใช้สูตรชุดที่หนึ่งช่วยในการลดรูปขนาดของมุม $\theta \pm n\pi$, $\theta \pm n\pi/2$ เป็นต้น

<u>โจทย์</u>

(1) ให้หาค่าของ $\sin(75°)$, $\cos(5\pi/12)$, และ $\tan(\pi/12)$

(2) กำหนด $\cot A = 2.4$ โดย $A \in (\pi, 3\pi/2)$ และ $\sin B = 0.6$ โดย $B \in (\pi/2, \pi)$

(2.1) $\cos(A+B)$ และ $\sin(A+B)$ มีค่าเท่าใด

(2.2) มุม $A+B$ อยู่ในควอดรันต์ใด

(3) จงหา $\cos A$ เมื่อ $\sin(A+B) = 1/5$, $\cos(A-B) = 2/5$ และ $\sin B = 3/5$

(4) จงหา $\cos B$ เมื่อ $A + B = 5\pi/4$ และ $\tan A = 1$ โดยที่ $0 \le B \le \pi$

(5) ให้หาค่าของ

(5.1) $2\cos 75°\cos 15°$

(5.2) $2\sin 25°\cos 5° - \sin 20°$

(5.3) $4\sin 75°\cos 15° + 2\cos 15°\cos 165°$

(5.4) $\sin 108°\cos 42° + \sin 42°\cos 108°$

(5.5) $\cos 68°\cos 78° + \cos 22°\cos 12° - \cos 10°$

(5.6) $2\cos 35°\cos 70° - \cos 35° + \cos 15°$

(6) ให้หาค่าของ

(6.1) $2\cos 3\theta\sin 2\theta - 2\cos 4\theta\sin\theta - 2\cos 2\theta\sin\theta$

(6.2) $\sin 3\theta\sin 6\theta + \sin\theta\sin 2\theta - \sin 4\theta\sin 5\theta$

(7) ให้หาค่าของ

(7.1) $\sin^2 A + \sin^2(60°+A) + \sin^2(60°-A)$

(7.2) $\cos^2 A + \cos^2(60°+A) + \cos^2(60°-A)$

(8) ให้หาค่าของ

(8.1) $\dfrac{\cos 10° + \sin 40°}{\sin 70°}$

(8.2) $\dfrac{\sin 75° - \sin 15°}{\cos 75° + \cos 15°}$

(8.3) $\dfrac{\tan 178° - \tan 108°}{1 + \tan 178° \tan 108°}$ เมื่อ $\tan 10° = B$

(8.4) $\left(\dfrac{\cot A}{1+\cot A}\right)\left(\dfrac{\cot B}{1+\cot B}\right)$ เมื่อ $A+B = 225°$

(8.5) $\dfrac{\sin 3\theta}{\sin \theta} - \dfrac{\cos 3\theta}{\cos \theta}$

(9) ให้หาค่าของ

(9.1) $\sin 50° + \sin 10° - \cos 20°$

(9.2) $\sin 10° + \cos 40° - \cos 20°$

(9.3) $\cos 20° + \cos 100° + \cos 140°$

(9.4) $\dfrac{\cos 10° + \cos 20° + \cos 40° + \cos 50°}{\sin 10° + \sin 20° + \sin 40° + \sin 50°}$

(10) ให้หาค่าของ $\sin 40° + \sin 20°$ ในรูปของ $\sin 5°$

(11) ให้หาค่าของ

(11.1) $\cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{3\pi}{5}$ [Hint: นำ $2\sin\dfrac{\pi}{5}$ คูณเศษและส่วน]

(11.2) $\cos\dfrac{\pi}{5} + \cos\dfrac{3\pi}{5}$

(11.3) $\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}$

(11.4) $\sin\dfrac{5\pi}{24}\cos\dfrac{\pi}{24}$

(11.5) $8\sin 70°\sin 50°\sin 10°$

(12) ให้หาค่าของ $\tan 9° - \tan 27° - \tan 63° + \tan 81°$

(13) กำหนด $4\sin^2 A + 3\cos 2B = -2$ และ $\sin 2A \sec A = \sin B$ เมื่อ $A, B \in [0, \pi/2]$ ให้หาค่าของ $2\cos(A+B)$

(14) ถ้า $3\cos A - 2\cos 2B = -3$ และ $\sin A - 2\sin B = 0$ เมื่อ $A, B \in [0, \pi/2]$ แล้ว ให้หาค่าของ $\sin(A+B)$

(15) กำหนด $\sin 3\theta + \sin\theta = 1 - 4\sin^3\theta$ จงหาค่าของ $\sec 2\theta + \cos(3\pi/2 + \theta)$

(16) ถ้า $\cos(\alpha+\beta) = \frac{3-4\sqrt{3}}{10}$ และ $\cos(\alpha-\beta) = \frac{3+4\sqrt{3}}{10}$ แล้ว จงหาค่า $\sin 2\alpha \sin 2\beta$

(17) ถ้า $\tan x = 2$ แล้ว จงหาค่า $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$

(18) จงหาค่า $\sin 4\theta$ เมื่อ $\tan\theta = 1/3$ และ $0 < \theta < \pi/2$

(19) ถ้า $\cos A = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ จงหา $\sin(A+B) - \sin(A-B) + \sin(2A-B) - \sin(2A+B)$

(20) ข้อใดต่อไปนี้ผิด

ก. $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y$

ข. $\sin(x+y)\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$

ค. $\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2 x - \sin^2 y$

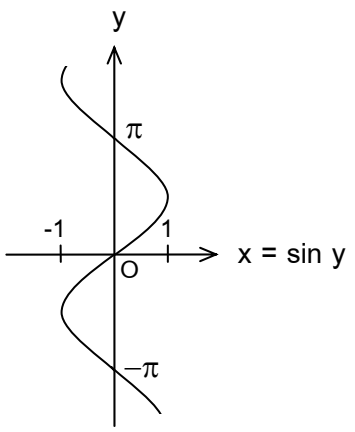
ง. $\cos 5x \cos x + \sin 5x \sin x = \cos 6x$

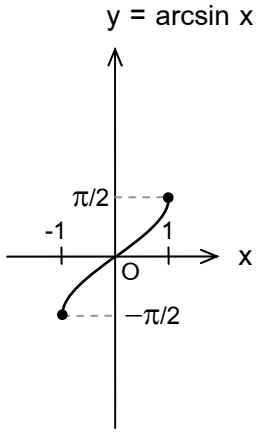
<u>ฟังก์ชันอินเวอร์สของตรีโกณมิติ</u>

• ฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้งหกฟังก์ชัน (เช่น $y = \sin x$) สามารถหาอินเวอร์สได้โดยสลับที่ระหว่างโดเมนและเรนจ์ตามปกติ (กลายเป็น $x = \sin y$) แต่อินเวอร์สที่ได้เหล่านี้ไม่เป็นฟังก์ชันเลย เนื่องจาก x ค่าเดียว ให้ค่า y ได้หลายค่าไม่สิ้นสุด ดังนั้นหากจะกำหนดอินเวอร์สให้เป็นฟังก์ชันด้วย เราจำเป็นต้องจำกัดช่วงของเรนจ์ และเราเรียกชื่อฟังก์ชันอินเวอร์สเหล่านี้โดยใช้คำว่า arc นำหน้า (เช่น อินเวอร์สของ $y = \sin x$ คือ $y = \arcsin x$)

<u>หมายเหตุ</u> **1.** ความหมายของ $x = \sin y$ ต่างจาก $y = \arcsin x$ เพราะเรนจ์ไม่เท่ากัน

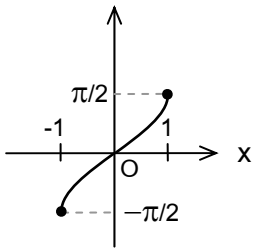
2. บางตำราใช้สัญลักษณ์ $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$, ... แทนคำว่า arc –



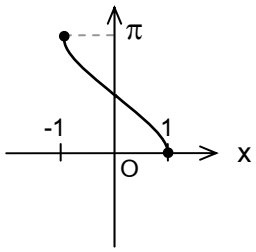


• ช่วงของเรนจ์ที่ใช้กันเป็นมาตรฐานสำหรับฟังก์ชัน arcsin, arccos, arctan จะแสดงไว้ในกราฟต่อไปนี้ โดยมีวงกลมหนึ่งหน่วยกำกับเพื่อช่วยในการจำ ส่วนฟังก์ชัน arccosec, arcsec, arccot จะไม่กล่าวถึงเนื่องจากไม่นิยมใช้

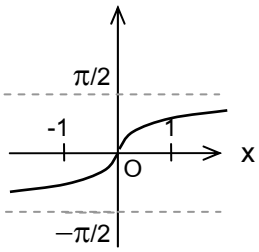
y = arcsin x



y = arccos x



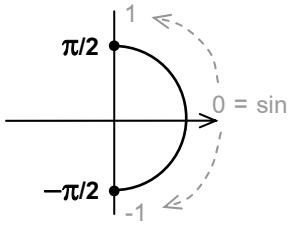
y = arctan x

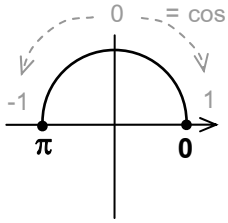


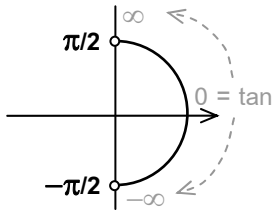
$D_{\arcsin} = [-1,1]$
$R_{\arcsin} = [-\pi/2, \pi/2]$

$D_{\arccos} = [-1,1]$
$R_{\arccos} = [0, \pi]$

$D_{\arctan} = \mathbb{R}$
$R_{\arctan} = (-\pi/2, \pi/2)$







ข้อสังเกต ฟังก์ชัน arcsin (กับ arctan) จะอยู่ในช่วงที่ cos เป็นบวกเสมอ ส่วนฟังก์ชัน arccos จะอยู่ในช่วงที่ sin เป็นบวกเสมอ

- ความสัมพันธ์ที่มีประโยชน์ในเรื่องอินเวอร์สของฟังก์ชัน คือ

$$\boxed{\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}}$$

ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้จากการใส่ฟังก์ชัน tan ทั้งสองข้างของสมการ
โดยความสัมพันธ์นี้ใช้ได้เมื่อ $\arctan x + \arctan y$ ยังอยู่ในช่วง $(-\pi/2, \pi/2)$

โจทย์

(21) ให้หาค่าของ $\arcsin(\sqrt{3}/2)$ และ $\arccos(-1/2)$

(22) ค่าของ $2\arcsin(-\sqrt{3}/2) + \arccos(1/\sqrt{2}) + \arccos(-1)$ เป็นเท่าใด

(23) ให้หาค่าของ $\cos(\arcsin(\cos\frac{2\pi}{7}) + \frac{2\pi}{7})$

(24) ให้หาค่าของ

(24.1) $\cos(\arccos(4/5) + \arccos(12/13))$

(24.2) $\sin(\arccos(3/5) + \arcsin(-4/5))$

(24.3) $\cos(2\arcsin(3/5))$

(24.4) $\tan(2\arccos(-1/\sqrt{5}))$

(25) ให้หาค่าของ $\sin(\frac{\pi}{2} + 2\arctan(\sqrt{2}-1))$

และ $\cos(3\pi/2 - 2\arctan x)$

(26) ให้หาค่าของ $A + 2B$ เมื่อกำหนด $\tan A = 1/7$ และ $\sin B = 1/\sqrt{10}$ โดยที่ $0 < A, B < \pi/2$

(27) จงหาค่า $7\tan(\pi/4 + A)$ เมื่อกำหนดให้ $\sin A = 1/3$ และ $\pi/2 < A < \pi$

(28) กำหนดให้ $\tan A = 1/2$, $\tan B = 1/5$, $\tan C = 1/8$ จงหาขนาด $A + B + C$ ที่เป็นมุมแหลม

(29) ให้แสดงว่า $\arccos(12/13) + \arcsin(16/65) = \arcsin(3/5)$

(30) ให้หาค่า x จากสมการต่อไปนี้

(30.1) $\arccos(4/5) - \arcsin(-3/5) = \arccos x$

(30.2) $\arctan(x^2/3 - x) = \arcsin(7/25) + \arccos(4/5)$

(30.3) $\arctan(1/7) + \arctan(1/8) + \arctan(1/18) = \operatorname{arccot} x$

(30.4) $\arctan(2x+1) + \arctan(2x-1) = \arccos(1/\sqrt{5})$

(30.5) $\arctan x + 2\arctan 1 = 3\pi/4$

(30.6) $\arctan(1+x) + \arctan(1-x) = \pi/4$

(30.7) $\arccos(-1/2) + (\pi/2) = \arcsin x$

(31) หาค่าของ $\tan\left(\dfrac{\arctan 3x + \arctan x}{2}\right)$ เมื่อ $\arctan 3x - \arctan x = \pi/6$

(32) ถ้า $4\cos^2(\arctan x) - 1 = 0$ และ $e^{1/x} < 1$ จงหา $x + \tan(\arctan(x/2))$

<u>เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ</u>

• สมการใดๆ ที่มีฟังก์ชันตรีโกณมิติปรากฏอยู่ จะเรียกว่า *สมการตรีโกณมิติ* การแก้สมการตรีโกณมิตินั้นมีข้อควรระวัง ซึ่งได้กล่าวไปในบทที่แล้วทั้งหมด และหากสมการตรีโกณมิตินั้นเป็นจริงเสมอสำหรับทุกๆ ค่า (ที่หาค่าฟังก์ชันได้) จะเรียกว่าเป็น *เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติ*

• เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติที่สำคัญมีหลายชุด ได้ศึกษาผ่านมาตั้งแต่บทที่แล้วจนถึงบทนี้ เช่น $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $\sin\theta = \cos(90° - \theta)$, $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\cos(\theta \pm \pi) = -\cos\theta$, $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$, $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$ ฯลฯ ซึ่งนอกจากนี้ยังมีเอกลักษณ์อีกมากมาย ดังจะได้ฝึกพิสูจน์เอกลักษณ์ในแบบฝึกหัดต่อไปนี้

<u>โจทย์</u>

(33) ให้หาคำตอบของสมการต่อไปนี้ ภายในช่วงที่กำหนดให้

(33.1) $\dfrac{1}{\sin x + 1} - \dfrac{1}{\sin x - 1} = 4$ $\qquad 0 \le x \le 2\pi$

(33.2) $\sin 4\theta + \sin 2\theta = 2\cos\theta$ $\qquad 0 \le \theta \le 2\pi$

(33.3) $2\sin 2\theta + 3\cot 2\theta - 3\operatorname{cosec} 2\theta = 0$ $\qquad 0 \le \theta \le \pi/2$

(33.4) $\cos^4 x - \sin^4 x = 1$ $0 \le x \le 2\pi$

(33.5) $4\sin^2 x - 6\tan x + 2\sec^2 x = 0$ $0 < x < \pi/2$

(33.6) $4\sin x\cos x + 2\sqrt{2}\cos x + 2\sin x + \sqrt{2} = 0$ $0 < x < 2\pi$

(33.7) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sec(x + \frac{\pi}{3})$ $0 \le x \le 2\pi$

(33.8) $2\sin^2 x + 1 = -\sin x + 2\sqrt{2\sin^2 x + \sin x}$ $0 \le x \le 2\pi$

(33.9) $\sin x - \sin 2x + \sin 3x = 0$ $0 \le x \le 2\pi$

(34) ให้หาช่วงคำตอบของอสมการต่อไปนี้

(34.1) $2\sin^4 x + 3\sin^2 x - 2 \ge 0$ $0 \le x \le 2\pi$

(34.2) $\sqrt{3}\sin x + \cos x < 1$ $0 \le x \le 2\pi$

(35) ให้หาคำตอบรูปทั่วไปของสมการ $\cos 2\theta = \sin\theta$

(36) จงแสดงว่าเอกลักษณ์ต่อไปนี้เป็นจริง

(36.1) $\tan(90° - A) = \cot A$

(36.2) $\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \tan^2\frac{x}{2}$

(36.3) $\frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \tan\frac{x+y}{2}$

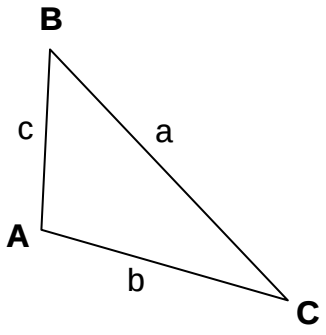
(36.4) $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x$

(36.5) $\left(\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}\right)^2 = 1 - \sin A$

(37) ถ้า A, B, C เป็นมุมในรูปสามเหลี่ยม จงแสดงว่า $\frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \cot\frac{C}{2}$

กฎของไซน์และกฎของโคไซน์

- กฎของไซน์ และกฎของโคไซน์ เป็นความสัมพันธ์ที่ใช้กับรูปสามเหลี่ยมใดๆ ที่ทราบบางส่วนประกอบ (ความยาวด้าน และขนาดมุม) เพื่อหาค่าของส่วนประกอบที่เหลือ มีประโยชน์กับการศึกษาเรขาคณิตวิเคราะห์ และเวกเตอร์



1. กฎของไซน์ (Law of Sine)

"อัตราส่วนของค่าไซน์ของมุมๆ หนึ่ง ต่อความยาวด้านตรงข้าม จะเท่ากันทั้งสามมุม"

$$\boxed{\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}}$$

โดยกฎของไซน์นี้พิสูจน์มาจาก พื้นที่สามเหลี่ยม

$(\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C)$

2. กฎของโคไซน์ (Law of Cosine)

"เราสามารถหาความยาวด้านที่เหลือ ได้จากความยาวด้านสองด้านและขนาดมุมตรงกลาง"

$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$

<u>ข้อสังเกต</u> ถ้ามุมตรงกลางนั้นเป็น $A = 90°$ กฎนี้จะกลายเป็นทฤษฎีบทปีทาโกรัส

<u>โจทย์</u>

(38) กำหนดสามเหลี่ยม ABC มีด้าน a ยาว 10 หน่วย, b ยาว $10\sqrt{3}$ หน่วย และ c ยาว 10 หน่วย ให้หาขนาดมุมทั้งสาม

(39) $\triangle ABC$ มีด้าน $a = 2\sqrt{5}$, $b = 4\sqrt{5}$ และ $c = 3\sqrt{5}$ ให้หาค่า $\sin(B/2)$

(40) สามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีอัตราส่วนความยาวด้านทั้งสามเป็น $a : b : c = 4 : 5 : 6$ ให้แสดงว่าสามเหลี่ยมรูปนี้มีมุมหนึ่งขนาดเป็นสองเท่าของอีกมุมหนึ่ง

(41) $\triangle ABC$ มีมุม $B = 65°$, ด้าน $a = 4$, $c = 8$ ให้หาความยาวด้าน b (กำหนด $\cos 65° = 0.422$)

(42) $\triangle ABC$ มีด้าน $c = 15$, $a = 12$ และ $A = 27°$, $\sin A = 0.454$ จงหามุม C

(43) $\triangle ABC$ มีมุม A ขนาด $45°$ และ $a = 2\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{3}$ จงหาขนาดของมุมที่เหลือ

(44) $\triangle ABC$ มีมุม $B = 30°$ และด้าน $c = 150$, $b = 50\sqrt{3}$ ให้พิจารณาว่าสามเหลี่ยมนี้เป็นสามเหลี่ยมชนิดใด

(45) $\triangle ABC$ มีมุม $A = 20°$, $B = 47°$ และด้าน $b = 12$ หน่วย ให้หาความยาวด้าน a (กำหนด $\sin 20° = 0.342, \sin 47° = 0.731$)

(46) สามเหลี่ยม ABC มีค่า $(a+b+c)(b+c-a) = 3bc$ จงหาขนาดของมุม A

(47) สามเหลี่ยม ABC มีค่า $(a+b+c)(a-b-c) = -3bc$ และ $4a^2 = 6b^2$ จงหาค่า $1 + 2\sin^2(3A-2B)$

(48) ถ้าความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมเป็น x, y, $\sqrt{x^2+xy+y^2}$ ตามลำดับ ให้บอกลักษณะของสามเหลี่ยมนี้

(49) เครื่องบินขับไล่สองลำบินในแนวราบ ออกจากฐานทัพพร้อมกัน โดยทิศทางการวิ่งทำมุมกัน $38°$ ถ้าเครื่องบินมีความเร็ว 320 และ 380 ไมล์ต่อชั่วโมง ตามลำดับ จงหาระยะทางระหว่างเครื่องบินสองลำนี้เมื่อเวลาผ่านไปหนึ่งชั่วโมง ($\cos 38° = 0.788$)

<u>การประยุกต์หาระยะทางและความสูง</u>

- ในชีวิตจริงการวัดระยะทางหรือความสูงของสิ่งต่างๆ ไม่สามารถใช้เครื่องมือวัดโดยตรงได้เสมอไป เราจึงใช้ความรู้เรื่องตรีโกณมิติในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากช่วยในการคำนวณ
- ศัพท์ที่ใช้เรียกมุมที่เกิดจากการสังเกตนั้น คือ *มุมก้ม* (Angle of Depression) และ *มุมเงย* (Angle of Elevation) โดยมุมก้มคือมุมที่วัดลงไปจากแนวราบ (ระดับสายตา) ส่วนมุมเงยคือมุมที่วัดขึ้นจากแนวราบ

โจทย์

(50) ชายคนหนึ่งอยู่ริมเขื่อนซึ่งสูงเหนือระดับน้ำทะเล 300 เมตร มองเห็นเรือ A กับ B อยู่ในระนาบเดียวกัน เป็นมุมก้ม $33°$ และ $20°$ ตามลำดับ เรือสองลำนี้อยู่ห่างกันเท่าใด (กำหนด $\sin 33° = 0.5446,\ \cos 33° = 0.8387,\ \sin 20° = 0.3430,\ \cos 20° = 0.9397$)

(51) หากมองจากจุด A ซึ่งอยู่ทางทิศใต้ของตึก จะเห็นยอดตึกเป็นมุมเงย $45°$ แต่หากมองจากจุด B ซึ่งอยู่ทางทิศตะวันออกของจุด A อีก 40 เมตร จะเห็นยอดตึกเป็นมุมเงย $30°$ แสดงว่าความสูงของตึกเป็นกี่เมตร

(52) สามเหลี่ยมมุมฉาก PQR และ PQS ซ้อนทับกันโดยมีมุม Q เป็นมุมฉากร่วมกัน และ $QR : RS = 1 : 3$ ให้หาค่า $\tan S\hat{P}Q$ เมื่อกำหนด $S\hat{P}R = \arctan 0.6$

[Hint: ใช้ความสัมพันธ์ $\arctan x + \arctan y$]

เฉลย

(1) $(\sqrt{3}+1)/2\sqrt{2}$, $(\sqrt{3}-1)/2\sqrt{2}$, $(\sqrt{3}-1)/(\sqrt{3}+1)$ (2.1) $63/65$, $-16/65$ (2.2) Q_4 (3) $5/7$ (4) ± 1 (5.1) $1/2$ (5.2) $1/2$ (5.3) $-\sqrt{3}/2$ (5.4) $1/2$ (5.5) 0 (5.6) $1/\sqrt{2}$ (6.1) 0 (6.2) 0 (7.1) $3/2$ (7.2) $3/2$ (8.1) $\sqrt{3}$ (8.2) $1/\sqrt{3}$ (8.3) $(\sqrt{3}+B)/(1-\sqrt{3}B)$ (8.4) $1/2$ (8.5) 2 (9.1) 0 (9.2) 0 (9.3) 0 (9.4) $\sqrt{3}$ (10) $1 - 2\sin^2 5°$ (11.1) $-1/4$ (11.2) $1/2$ (11.3) $-1/8$ (11.4) $(\sqrt{2}+1)/4$ (11.5) 1 (12) 4 (13) -1 (14) 1 (15) $39/28$ (16) $12\sqrt{3}/25$ (17) 2 (18) $24/25$ (19) $\sin B$ (20) ง. (21) $60°, 120°$ (22) $7\pi/12$ (23) 0 (24.1) $33/65$ (24.2) 0 (24.3) $7/25$ (24.4) $4/3$ (25) $1/\sqrt{2}$, $-2x/(1+x^2)$ (26) $\pi/4$ (27) $9-4\sqrt{2}$ (28) $\pi/4$ (29) ... (30.1) $7/25$ (30.2) $-1, 4$ (30.3) 3 (30.4) $1/2, -1$ (30.5) 1 (30.6) $\pm\sqrt{2}$ (30.7) ไม่มีคำตอบ (31) 1 (32) $-3\sqrt{3}/2$ (33.1) $\pi/4$ (33.2) $\pi/6, \pi/3, 5\pi/6, 3\pi/2$ (33.3) $\pi/6$ (33.4) $0, \pi, 2\pi$ (33.5) $\pi/4$ (33.6) $2\pi/3, 5\pi/4, 4\pi/3, 7\pi/4$ (33.7) $11\pi/12, 23\pi/12$ (33.8) $[\pi/6, 3\pi/2]$ (33.9) $0, \pi, 2\pi, \pi/2, 3\pi/2, \pi/3, 5\pi/3$ (34.1) $[\pi/4, 3\pi/4] \cup [5\pi/4, 7\pi/4]$ (34.2) $(2\pi/3, 2\pi)$ (35) $\pi/6 \pm 3n\pi/2$ (36) ... (37) ... (38) $30°, 120°, 30°$ (39) $\sqrt{7/8}$ (40) $C = 2A$ เนื่องจาก $\cos C = 2\cos^2 A - 1$ (41) 7.3 (42) $35°, 145°$ (43) $75°, 60°$ หรือ $15°, 120°$ (44) สามเหลี่ยมมุมฉาก $A = 90°$ หรือสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $A = 30°$ (45) 5.6 (46) $60°$ (47) 3 (48) เป็นสามเหลี่ยมที่มีมุมหนึ่งเป็นมุมป้าน $120°$ (49) 234.86 ไมล์ (50) 362.3 เมตร (51) $20\sqrt{2}$ (52) 1 หรือ 4

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล และลอการิทึม (Exponential & Logarithm)

• การเพิ่มขึ้นหรือลดลงของจำนวนประชากรตามธรรมชาติ ปริมาณรังสี หรือเงินฝากในธนาคาร โดยทั่วไปไม่ได้เป็นแบบเส้นตรง แต่เป็นแบบทวีคูณ (หรือหาร) ทำให้เราจำเป็นต้องศึกษาเกี่ยวกับเลขยกกำลัง รวมทั้งศึกษาฟังก์ชันที่เกี่ยวข้อง คือ ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล และฟังก์ชันลอการิทึม

<u>ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล และกฎของเลขยกกำลัง</u>

• เลขยกกำลังจะอยู่ในรูป a^n, เรียก a ว่าฐาน และเรียก n ว่าเลขชี้กำลัง
a^n ใช้แทน a คูณกันเป็นจำนวน n ตัว หรือ $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$
โดยมีนิยามให้ $a^0 = 1$ และ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ด้วย $(a \neq 0)$
และทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับเลขยกกำลังได้แก่

$$\bullet \begin{cases} a^m \cdot a^n = a^{m+n} \\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \end{cases} \qquad \bullet \begin{cases} (ab)^n = a^n \cdot b^n \\ (a/b)^n = a^n / b^n \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} (a^m)^n = a^{mn} \\ \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \end{cases} \qquad \bullet \begin{cases} \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \end{cases}$$

โดย n เป็นจำนวนจริงใดๆ (ไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนเต็ม) และกรณีกรณฑ์ $n \neq 0$

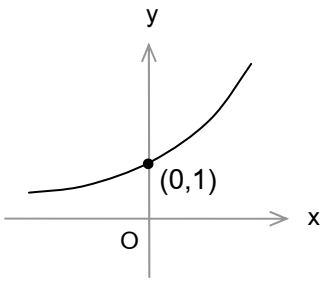
<u>หมายเหตุ</u> คำว่า รากที่สอง และเครื่องหมายกรณฑ์ ($\sqrt{\bullet}$ หรือ $\bullet^{1/2}$) มีความหมายต่างกัน
"รากที่สอง ของ 16" ได้แก่ 4 และ -4
แต่ "$\sqrt{16}$ หรือ $16^{1/2}$" มีค่าเท่ากับ 4 อย่างเดียวเท่านั้น

• การหารากที่สองของ $M \pm \sqrt{N}$ มีหลักการดังนี้
พิจารณา $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = (a+b) + 2\sqrt{ab}$ และ $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = (a+b) - 2\sqrt{ab}$
ดังนั้น ถ้าเราให้ $a+b = M$ และ $4ab = N$ แล้วแก้ระบบสมการหาค่า a, b ก็จะได้คำตอบ
<u>สรุป</u> รากที่สองของ $M+\sqrt{N}$ ได้แก่ $\pm(\sqrt{a}+\sqrt{b})$
รากที่สองของ $M-\sqrt{N}$ ได้แก่ $\pm(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ เมื่อ $a+b = M$ และ $4ab = N$

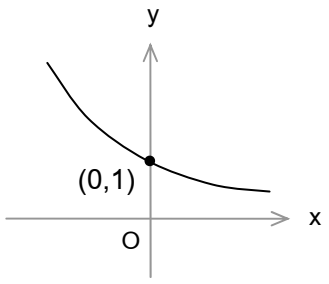
เช่น รากที่สองของ $6-\sqrt{35}$ หาได้จาก $a+b = 6$ และ $4ab = 35$
นั่นคือ $a, b = 3.5, 2.5$ จึงได้คำตอบว่า $\sqrt{3.5}-\sqrt{2.5}$ และ $\sqrt{2.5}-\sqrt{3.5}$

รากที่สองของ $\sqrt{72}+\sqrt{40}$ หาได้จาก $a+b = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ และ $4ab = 40$
นั่นคือ $a, b = 5\sqrt{2}, \sqrt{2}$ จึงได้คำตอบว่า $\sqrt{5\sqrt{2}}+\sqrt{\sqrt{2}}$ และ $-\sqrt{5\sqrt{2}}-\sqrt{\sqrt{2}}$

• ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล คือฟังก์ชันเลขยกกำลัง กำหนดรูปทั่วไปเป็น $\boxed{f(x)=a^x}$ โดยค่าของฐาน a อยู่ในช่วง $(0,1)$ หรือ $(1,\infty)$ เท่านั้น นำมาเขียนกราฟได้ดังนี้



$y=a^x,\quad a>1$
ฟังก์ชันเพิ่ม



$y=a^x,\quad 0<a<1$
ฟังก์ชันลด

<u>ข้อสังเกต</u> **1.** ค่า x เป็นอะไรก็ได้ แต่ค่า y เป็นบวกเสมอ ... $D_{exp}=\mathbb{R}$, $R_{exp}=\mathbb{R}^+$
2. ในที่นี้กราฟผ่านจุด $(0,1)$ เสมอ ... เนื่องจาก $a^0=1$ ทุกๆ ค่า a ที่ไม่ใช่ศูนย์
3. จากการเลื่อนแกนทางขนาน จะได้สมการเอกซ์โพเนนเชียลเป็น $y-k=a^{x-h}$

<u>โจทย์</u>

(1) จงทำให้เป็นรูปอย่างง่าย

(1.1) $32^7\cdot 4^{-17}$

(1.2) $(x^{-3}y^{-2}z^0)^{-2}$

(1.3) $\left(\dfrac{4x^{-2}-4x^{-1}+1}{2x^{-2}-x^{-1}}\right)$

(1.4) $\left(\dfrac{729^n+81^{2n}}{27^n+243^n}\right)^{\frac{1}{n}}$

(1.5) $\left(\dfrac{4^n\cdot 9^{n+1}+3^{2n}\cdot 2^{2n+1}}{9^n\cdot 2^{2n+2}+4^n\cdot 3^{2n+1}}\right)$

(2) จงทำให้เป็นรูปอย่างง่าย

(2.1) $\left(\sqrt{\dfrac{3}{5}}\,a+\dfrac{a}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{75}}{3}a+\dfrac{4a}{\sqrt{3}}\right)^2$

(2.2) $\left(\dfrac{2}{x^2-\sqrt{x^4+2x^2+1}}\right)$

(3) ให้หาค่าของ

(3.1) $\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{9}}\right)$

(3.2) $\left(\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\right)$

(3.3) $\left(\sqrt{18+\sqrt{320}}\right)$

(3.4) $\left(\sqrt{10+\sqrt{84}}-\sqrt{10-\sqrt{84}}\right)$

(3.5) $\left(\frac{2}{\sqrt{12-2\sqrt{35}}}+\frac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}}-\frac{5}{\sqrt{9-2\sqrt{14}}}\right)$

(3.6) $\left(\frac{(6+\sqrt{35})^{3/2}-(6-\sqrt{35})^{3/2}}{13\sqrt{10}}\right)$

(4) ตอบคำถามต่อไปนี้

(4.1) ให้หาค่าของ $x^2-4xy+y^2$ เมื่อ $x=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$ และ $y=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$

(4.2) ให้เรียงลำดับจำนวนจากน้อยไปมาก

ก. $3^{25\sqrt{3}}$ ข. $5^{20\sqrt{3}}$ ค. $7^{15\sqrt{3}}$ ง. $9^{10\sqrt{3}}$

(4.3) ถ้า $\frac{2.44\times 7.17}{3.9\times 8}=0.56$ แล้ว ให้หาค่าของ $\frac{0.0244\times 71.7}{390\times 0.008}$

(5) ข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

(5.1) ถ้า $a^x>1$ และ $0<a<1$ แล้ว $x>0$

(5.2) ถ้า $x<0$ และ $a>1$ แล้ว $0<a^x<1$

(5.3) $\sqrt{5}^{\sqrt{2}}<\sqrt{5}^{\sqrt{3}}$

(5.4) $(\sin 1°)^{\sqrt{3}}<(\sin 1°)^{\sqrt{2}}$

(5.5) $(\tan 46°)^{\sqrt{2}}<(\tan 46°)^{\sqrt{3}}$

<u>การแก้สมการที่เป็นเอกซ์โพเนนเชียล หรือมีเครื่องหมายกรณฑ์</u>

(1) สมการที่มี $\sqrt{ax+b}$ บวกลบกันอยู่หลายพจน์ ควรย้ายข้างให้จำนวนพจน์เท่าๆ กัน และสัมประสิทธิ์หน้า x รวมเท่าๆ กันที่สุด จากนั้นจึงยกกำลังทั้งสองข้างไปจนกว่าเครื่องหมายกรณฑ์จะหมดไป ... การยกกำลังเช่นนี้ มักทำให้ได้คำตอบเกิน ดังนั้นต้องตรวจคำตอบเสมอ

(2) หากสิ่งที่อยู่ในเครื่องหมายกรณฑ์นั้นยาวมาก ให้สมมติสิ่งนั้นเป็นตัวแปร A ไปก่อน แล้วทำตัวแปรที่เหลือในสมการให้อยู่ในรูป A ทั้งหมด เพื่อให้สมการสั้นลงและคำนวณสะดวกขึ้น

(3) สมการในรูป $a^{f(x)}=b^{g(x)}$ จะต้องแปลงฐานทั้งสองข้างให้เท่ากัน เพื่อกำจัดฐานทิ้งไปตามสมบัติที่ว่า $a^M=a^N \leftrightarrow M=N$

(4) ถ้ามีพจน์เลขยกกำลังฐานเดียวกัน บวกลบกันอยู่ เช่น a^x, a^{2x} อาจสมมติเป็นตัวแปร A, A^2 เพื่อให้คำนวณสะดวกขึ้นเช่นเดิม (ฐานมักจะเป็นจำนวนเฉพาะ) แต่ถ้ามีฐานอื่นอยู่ด้วยจะใช้ตัวแปร B อีกอันก็ได้ และเมื่อจัดกลุ่มเลขยกกำลังเป็นพวกๆ แล้ว จึงทำการคำนวณต่อไป

(5) อสมการ ใช้สมบัติของฟังก์ชันเพิ่ม/ฟังก์ชันลด ในการกำจัดฐาน คือ $a^M>a^N \leftrightarrow M>N$ เมื่อ $a>1$ (ฟังก์ชันเพิ่ม) และ $a^M>a^N \leftrightarrow M<N$ เมื่อ $0<a<1$ (ฟังก์ชันลด)

โจทย์

(6) ให้หาคำตอบของสมการ

(6.1) $x^{1/2} - x^{1/4} - 6 = 0$

(6.2) $\sqrt{2x+1} = \sqrt{x} + 1$

(6.3) $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-3} = 2$

(6.4) $\sqrt{2x-3} + \sqrt{x+2} = \sqrt{7x-5}$

(6.5) $x^2 + 6\sqrt{x^2-2x+5} = 11 + 2x$

(6.6) $(x+1)^2 = 5(\sqrt{x^2+2x+2} - 1)$

(6.7) $\sqrt{x^2+3x+15} + \sqrt{x^2+3x+6} = 9$

(6.8) $\sqrt{2x^2-6x-27} - \sqrt{x^2-6x-2} = x - 5$

(6.9) $\sqrt[3]{6(5x+6)} - \sqrt[3]{5(6x-11)} = 1$

(7) ให้หาคำตอบของสมการ

(7.1) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$

(7.2) $10^{1+x^2} = 100^{2x}$

(7.3) $\left(\frac{3}{2}\right)^{|2x+1|} = \left(\frac{8}{27}\right)^{-4}$

(7.4) $\left(\frac{4}{9}\right)^x \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = 1$

(7.5) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}} \cdot 2^{\sqrt{2x+1}} = 1$

(7.6) $18^{8-4x} = (54\sqrt{2})^{3x-2}$

(7.7) $(5+2\sqrt{6})^x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

(8) ให้หาคำตอบของสมการ

(8.1) $4^{x+1} + 64 = 2^{x+5}$

(8.2) $4^{x+2} - 2(4^{x+1}) = 2^{4x}$

(8.3) $2^{2x+2} - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$

(8.4) $2^{2x+1} - 9 \cdot 2^{x-1} + 1 = 0$

(8.5) $3^{2x+2} - 3^{x+3} - 3^x + 3 = 0$

(8.6) $3^{2x+3} - 55 = 28(3^x - 2)$

(8.7) $6(2^{5x}) + 11(2^{3x}) - 3(2^x) = 2^{5x+1}$

(8.8) $3^{1+\sqrt{x^2+x-2}} + 9(3^{-\sqrt{x^2+x-2}}) = 28$

(9) ให้หาคำตอบของสมการ

(9.1) $3(3^x + 3^{-x}) = 10$

(9.2) $3(3^{2x} + 3^{-2x}) = 10$

(9.3) $\left(\frac{4}{3}\right)^x + \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{25}{12}$

(9.4) $\sqrt{\frac{x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{x}} = \frac{13}{6}$

(10) ให้หาคำตอบของสมการ

(10.1) $5^{2x+1} - 25^{x} = 4^{x+(1/2)} + 2^{2x+3}$

(10.2) $4^{x} - 3^{x-(1/2)} = 3^{x+(1/2)} - 2^{2x-1}$

(10.3) $6(3^{2x}) - 13(6^{x}) + 6(2^{2x}) = 0$

(10.4) $25(16^{x}) - 40(20^{x}) + 16(5^{2x}) = 0$

(10.5) $3^{x^2+2x} - 3^{x^2+1} - 9^{x+1} + 27 = 0$

(11) ให้หาช่วงคำตอบของอสมการ

(11.1) $10^{x+1} \le 1/10^{x+1}$

(11.2) $2^{x^2-5} > 1/16$

(11.3) $(0.5)^{x^2-3x} < (0.5)^{x-3}$

(11.4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2x+8} < \left(\frac{1}{4}\right)^{x+12}$

(11.5) $(\sin 1°)^{x+5} > (\sin 1°)^{2}$

(11.6) $(\cot 1°)^{x+5} < (\cot 1°)^{2}$

(11.7) $(\cos 45°)^{|x+2|} < (\sin 45°)^{5}$

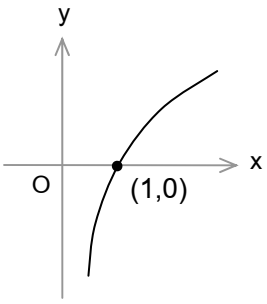
(11.8) $a^{x^2+7} < a^{8(x-1)}$

ฟังก์ชันลอการิทึม และกฎของลอการิทึม

• ฟังก์ชันลอการิทึม เป็นอินเวอร์สของเอกซ์โพเนนเชียล เขียนได้ในรูป $\boxed{f(x) = \log_a x}$

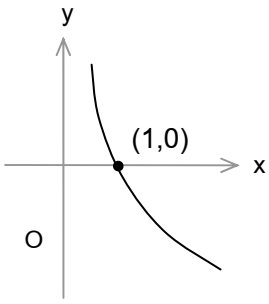
ความสัมพันธ์ระหว่างเอกซ์โพเนนเชียลและลอการิทึมคือ $x = a^y \leftrightarrow y = \log_a x$

โดยค่าของฐาน a จะต้องอยู่ในช่วง $(0,1)$ หรือ $(1,\infty)$ ซึ่งนำมาเขียนกราฟได้ดังนี้



$y = \log_a x, \quad a > 1$

ฟังก์ชันเพิ่ม



$y = \log_a x, \quad 0 < a < 1$

ฟังก์ชันลด

ข้อสังเกต **1.** ค่า x ต้องเป็นบวกเสมอ ส่วนค่า y เป็นอะไรก็ได้ ... $D_{\log} = \mathbb{R}^{+}$, $R_{\log} = \mathbb{R}$

2. ในที่นี้กราฟผ่านจุด $(1,0)$ เสมอ ... แสดงว่า $\log_a 1 = 0$ ทุกๆ ค่า a ที่ไม่ใช่ศูนย์

3. จากการเลื่อนแกนทางขนาน จะได้สมการลอการิทึมเป็น $y-k = \log_a(x-h)$

4. $\log_a x$ อ่านว่า “ล็อก x ฐาน a” หรือ “ลอการิทึม x ฐาน a”

• กฎของลอการิทึมได้แก่

- $\begin{cases} \log_a 1 = 0 \\ \log_a a = 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} \log_a (mn) = \log_a m + \log_a n \\ \log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n \end{cases}$
- $\log_{a^p} b^q = \frac{q}{p} \log_a b$
- $\begin{cases} m^{\log_a n} = n^{\log_a m} \\ a^{\log_a n} = n \end{cases}$
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{1}{\log_b a}$

<u>หมายเหตุ</u> $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}^+$ โดยที่ $a, b, c \neq 1$ และ $p, q \in \mathbb{R}$

• หากลอการิทึมมีฐานเป็น 10 เรียกว่า *ลอการิทึมสามัญ* (Common Logarithm) อาจละไว้ไม่ต้องเขียนฐานกำกับ คือเขียนเพียง $\boxed{\log x}$ ก็ได้ นอกจากนั้น ลอการิทึมที่มีฐานเป็นค่าคงที่ทางวิทยาศาสตร์ e (≈ 2.718) จะเรียกว่า *ลอการิทึมธรรมชาติ* (Natural Logarithm หรือ Napierian Logarithm) และใช้สัญลักษณ์ $\boxed{\ln x}$ แทน $\log_e x$

• การหาค่าลอการิทึมสามัญโดยใช้ตาราง มีหลักการดังนี้
หากต้องการหาค่า $\log N$ เราจะต้องเขียนจำนวน N เป็นรูป $N_0 \times 10^n$ เมื่อ $1 \leq N_0 < 10$ และใช้กฎของลอการิทึม ว่า $\log N = \log (N_0 \times 10^n) = \log N_0 + n$
เนื่องจากในตารางระบุเพียงค่า $\log 1$ จนถึง $\log 9.99$ เท่านั้น

ตัวอย่างเช่น $\log 1{,}150$ มีค่าเท่ากับ $\log (1.15 \times 10^3)$ หรือ $\log (1.15) + 3$
จากตารางพบว่า $\log (1.15) \approx 0.0607$ ดังนั้น $\log 1{,}150 \approx 3.0607$

<u>หมายเหตุ</u> **1.** หากค่า N_0 ในตารางไม่ละเอียดพอ จะต้องใช้วิธีประมาณโดยเทียบสัดส่วน
2. เราเรียก n ว่า *แคแรกเทอริสติก* (Characteristic) ของ $\log N$ (เป็นจำนวนเต็มเสมอ) และเรียก $\log N_0$ ว่า *แมนทิสซา* (Mantissa) ของ $\log N$ (มีค่าระหว่าง 0 ถึง 1 เสมอ)
3. ตารางที่กำหนดให้เป็นค่าลอการิทึมสามัญ (ฐาน 10) เท่านั้น ถ้าต้องการหาค่าลอการิทึมฐานอื่นๆ ต้องอาศัยกฎของลอการิทึมช่วยแปลงฐาน นั่นคือ $\log_a b = \log b \div \log a$ และ $\ln b = \log b \div \log e$ $(\log e \approx 0.4343)$

• การหาค่าแอนติลอการิทึมโดยใช้ตาราง มีหลักการดังนี้
จากตัวอย่างที่แล้ว เราทราบว่าค่า $\log$ ของ $1{,}150$ เป็น 3.0607 (โดยประมาณ) สามารถกล่าวแบบย้อนกลับได้ว่า ค่า antilog ของ 3.0607 เป็น $1{,}150$

ตัวอย่างเช่น ต้องการหาค่า M ที่ทำให้ $\log M = 3.0607$ เราต้องทำ 3.0607 ให้อยู่ในรูปผลบวกของแคแรกเทอริสติกกับแมนทิสซาก่อน นั่นคือ $3 + 0.0607$ จากนั้นเปิดตารางได้เป็น $\log 10^3 + \log 1.15$ หรือ $\log (1.15 \times 10^3)$ ดังนั้น $M \approx 1{,}150$

หมายเหตุ ต้องทำให้แมนทิสซาเป็นบวกเสมอ เช่น $\log M = -3.0607$ ไม่ควรทำเป็น $-3 - 0.0607$ แต่ต้องทำเป็น $-4 + 0.9393$ เพื่อให้เปิดค่าจากตารางได้

โจทย์

(12) ให้หาค่าของ

(12.1) $\log 0.01 + \log_2 0.25 + \log_5 0.04 + \log_{50} 0.0004$

(12.2) $\log_2 \cos 60° + 7\log_3 \tan 30° - \log_8 \sin 90° + \log_4 \sin 30°$

(12.3) $\log_{\frac{1}{2}} 8 + \log_{\frac{1}{8}} 2 + \log_2 \frac{1}{8} + \log_8 \frac{1}{2}$

(12.4) $\log (20) + 7\log\left(\frac{15}{16}\right) + 5\log\left(\frac{24}{25}\right) + 3\log\left(\frac{80}{81}\right)$

(12.5) $\frac{2}{\log_5 50} + \frac{2}{\log 50} + \frac{2}{\log_2 50}$

(12.6) $\frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$

(12.7) $\log_2 1 \cdot \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_4 5$

(12.8) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots \cdot \log_n (n+1) \cdot \log_{31} 32$

(12.9) $\log_4 (\log 81) - \log_4 (\log 3)$

(12.10) $7^{\log_7 52} + 5\log_2 4^{-3} - 2\log_9 3^3$

(13) ให้หาค่าของ

(13.1) $49^{1-0.25\log_7 25}$

(13.2) $81^{(\frac{1}{2}+8\log_{81} 5+\log_9 4+\log_3 5)} / 9$

(13.3) $3^{\log_{4096} 64} - \sqrt{2}^{\log_3 9}$

(13.4) $25^{1-\log_5 4} \cdot 64^{1-\log_8 2} \cdot 36^{1-\log_6 2} \cdot 4^{2-\log_2 5}$

(13.5) $\left(\frac{16^{1-\log_4 3} \cdot 36^{1-\log_6 3}}{25^{1-\log_5 3} \cdot 49^{-\log_7 3}}\right)^{1/2}$

(14) ให้เขียน $\frac{1}{1+\log_a bc} + \frac{1}{1+\log_b ca} + \frac{1}{1+\log_c ab}$ เป็นรูปอย่างง่าย

(15) ตอบคำถามต่อไปนี้

(15.1) ให้หาค่า $(gof)(2)$ เมื่อกำหนด $g(x) = \log_3 x$ และ $f(x) = \log_2 x$

(15.2) ให้หาค่า $g(2b)$ เมื่อกำหนด $g(x) = \log_{2b} x^x$

(15.3) ให้หาค่า $\log 5$ เมื่อทราบว่า $\log_8 3 = p$ และ $\log_3 5 = q$

(15.4) ถ้า $x = \log\sqrt[3]{(9^{-1})(27^{-4/3})}$ และ $y = \log\frac{25}{8} - 2\log\frac{5}{3} + \log\frac{24}{9}$ แล้ว ให้หาค่าของ $x + y$

(15.5) ถ้า $\log_7(11-6\sqrt{2}) = a$ และ $\log_7(45+29\sqrt{2}) = b$ แล้ว ให้หาค่าของ $3a + 2b$

(15.6) ถ้า $\log_a x = 1$, $\log_b x = 1/10$, $\log_c x = 1/100$, $\log_d x = 1/1000$ แล้ว ให้หาค่าของ $\log_{abcd} x$

(15.7) ถ้า $p = \frac{\log_b(\log_b a)}{\log_b a}$ เมื่อ $a, b > 1$ แล้ว ให้หาค่าของ a^p

(15.8) ถ้า $2\log_2 a - 3\log_2 b = 4$ และ $3\log_2 a - 4\log_2 b = 6$ แล้ว ให้หาค่าของ $\left(a^{2b} + \log_{2a} b\right)^{1/2}$

(15.9) ถ้า $\log_a(x-m) = \log_{\sqrt{a}} x - \log_{\sqrt{a}} m$ แล้วให้หาค่าของ $x^2 - m^2x + m^3$

(16) ให้หาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(16.1) $y = \log_6(2-x)$

(16.2) $y = \log_{1/3}(-x)$

(16.3) $y = |\log x|$

(16.4) $y = \log_2|x-3|$

(16.5) $y = -\log_5(3x^2-2)$

(17) ให้หาแมนทิสซาและแคแรกเทอริสติกของค่าต่อไปนี้

(17.1) $\log 257$

(17.2) $\log 0.024$

(17.3) 3.3010

(17.4) -2.3010

(18) จำนวน 875^{15} มีกี่หลัก

[Hint : ถ้า $\log N = c_{\text{haracteristic}} + m_{\text{antissa}}$ จะได้ว่า N นั้นมีจำนวน $c+1$ หลัก]

<u>การแก้สมการที่เป็นลอการิทึม</u>

(1) สมการเรื่องลอการิทึม มักจะแก้ปัญหาโดยใช้กฎของลอการิทึม เช่น การทำให้ฐานเท่ากันเพื่อกำจัด $\log$ ทิ้งไป ตามสมบัติที่ว่า $\log_a M = \log_a N \leftrightarrow M = N$

(2) ถ้ามีพจน์คล้ายกันปรากฏอยู่ อาจสมมติเป็นตัวแปร A เพื่อให้คำนวณสะดวกขึ้น

(3) เมื่อได้คำตอบแล้ว ควรตรวจสอบว่าใช้ได้หรือไม่ (เช่น ภายใน $\log$ ต้องไม่ติดลบ)

(4) อสมการ ใช้สมบัติของฟังก์ชันเพิ่ม/ฟังก์ชันลด ในการกำจัดฐาน คือ

$\log_a M > \log_a N \leftrightarrow M > N$ เมื่อ $a > 1$ (ฟังก์ชันเพิ่ม) และ

$\log_a M > \log_a N \leftrightarrow M < N$ เมื่อ $0 < a < 1$ (ฟังก์ชันลด)

โจทย์

(19) ให้หาคำตอบของสมการ

(19.1) $x + 8 = 10^{\log 8}$

(19.2) $x^{\log (2/3)} = 2/3$

(19.3) $x^{3\log x} = \sqrt[3]{10,000}$

(19.4) $9^x - 3^{x+\log_3 2} = -1$

(19.5) $\log_4 \log_3 \log_2 7^{\log_7 (x^2+2x)} = 0$

(19.6) $\log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{6}} \sqrt{\frac{1}{x^2-x+4}} = 0$

(19.7) $\log_{x+4}(x^2-1) = \log_{x+4}(5-x)$

(20) ให้หาคำตอบของสมการ

(20.1) $\log (2x-5) + \log (x+1) = \log (x^2-x+3)$

(20.2) $\log (2x-1) + \log (x+1) = 2 \log \sqrt{x^2+1}$

(20.3) $\log 2 + \log (4-5x-6x^2) = 3 \log \sqrt[3]{2x-1}$

(20.4) $x^2 \log_2(x^2+2x-6) - 2x \log_2(x^2+2x-6) = x^2-2x$

(20.5) $3\log_{16}(\sqrt{x^2+1}+x) + \log_2(\sqrt{x^2+1}-x) = \log_{16}(4x+1) - 0.5$

(21) ให้หาคำตอบของสมการ

(21.1) $(\log x)^2 = \log x^2$

(21.2) $\log \sqrt{x} = \sqrt{\log x}$

(21.3) $\log_2 x + 4\log_x 2 = 5$

(21.4) $\log_3 x + \frac{5}{2}\log_x 3 = \frac{7}{2}$

(22) ให้หาคำตอบของ

(22.1) สมการ $3^{2(x+7)} - 6(3^{x+7}) + 8 = 0$

(22.2) ระบบสมการ $5^x = 4^{-y}$ และ $5^{2+y} = 4^{2-x}$

(23) ให้หาช่วงคำตอบของอสมการ

(23.1) $(x^3)^x < (x)^{x^2}$

(23.2) $e^{x^2 \ln 2} < 2^x$

(23.3) $\log_{x-2}(2x-3) > \log_{x-2}(24-6x)$

(23.4) $\log_a 5 > \log_5 a$

(23.5) $\log_{100} x < 1 - \log \sqrt{x+15}$

(23.6) $\log_{\sqrt{x-1}}(x^4-8x^2-2x+1) > 4$

เฉลย

(1.1) 2 (1.2) x^6y^4 (1.3) $2-x$ (1.4) 27 (1.5) $11/7$ (2.1) $3a^2/5$ (2.2) -2 (3.1) 2 (3.2) $14/3$ (3.3) $\sqrt{10}+\sqrt{8}$ (3.4) $2\sqrt{3}$ (3.5) $2\sqrt{5}$ (3.6) 1 (4.1) 30 (4.2) ง-ก-ค-ข (4.3) 0.56 (5) ถูกทุกข้อ ยกเว้น (5.1) ผิด (6.1) 81 (6.2) $0, 4$ (6.3) $4, 12$ (6.4) $2, 5/2$ (6.5) 1 (6.6) $-1, -1\pm\sqrt{15}$ (6.7) $-5, 2$ (6.8) $-3, 9$ (6.9) $6, -161/30$ (7.1) 3 (7.2) $2\pm\sqrt{3}$ (7.3) $11/2, -13/2$ (7.4) 3 (7.5) ไม่มีคำตอบ (7.6) $22/17$ (7.7) $1/2$ (8.1) 2 (8.2) $3/2$ (8.3) $-2, 1$ (8.4) $-2, 1$ (8.5) $-2, 1$ (8.6) $-3, 0$ (8.7) -1 (8.8) $-3, 2$ (9.1) $-1, 1$ (9.2) $-1/2, 1/2$ (9.3) $-1, 1$ (9.4) $4/13, 9/13$ (10.1) $1/2$ (10.2) $3/2$ (10.3) $-1, 1$ (10.4) 1 (10.5) $1/2, \pm\sqrt{2}$ (11.1) $(-\infty, -1)$ (11.2) $\mathbb{R}-[-1,1]$ (11.3) $\mathbb{R}-[1,3]$ (11.4) $\mathbb{R}-[-4,4]$ (11.5) $(-\infty, -3)$ (11.6) $(-\infty, -3)$ (11.7) $\mathbb{R}-[-7,3]$ (11.8) $(3,5)$ เมื่อ $0<a<1$ และ $\mathbb{R}-(3,5)$ เมื่อ $a>1$ (12.1) -8 (12.2) -5 (12.3) $-20/3$ (12.4) 1 (12.5) $4/(1+\log 5)$ (12.6) 3 (12.7) 0 (12.8) 5 (12.9) 1 (12.10) 19 (13.1) $49/5$ (13.2) $2^4\cdot 5^{12}$ (13.3) $\sqrt{3}-2$ (13.4) 144 (13.5) 4.8 (14) 1 (15.1) 0 (15.2) $2b$ (15.3) $3pq/(1+3pq)$ (15.4) $-\log 3$ (15.5) 6 (15.6) $1/1111$ (15.7) $\log_b a$ (15.8) 4 (15.9) 0 (16.1) $(-\infty, 2)$ กับ $\mathbb{R}$ (16.2) $\mathbb{R}^-$ กับ $\mathbb{R}$ (16.3) $\mathbb{R}^+$ กับ $[0,\infty)$ (16.4) $\mathbb{R}-\{3\}$ กับ $\mathbb{R}$ (16.5) $(-\infty, -\sqrt{2/3})\cup(\sqrt{2/3}, \infty)$ กับ $\mathbb{R}$ (17.1) แมนทิสซา $\log 2.57$ แคแรกเทอริสติก 2 (17.2) แมนทิสซา $\log 2.4$ แคแรกเทอริสติก -2 (17.3) แมนทิสซา 0.3010 แคแรกเทอริสติก 3 (17.4) แมนทิสซา 0.6990 แคแรกเทอริสติก -3 (19.1) 0 (19.2) 10 (19.3) $10^{\pm 2/3}$ (19.4) 0 (19.5) $-4, 2$ (19.6) $-1, 2$ (19.7) 2 (20.1) 4 (20.2) 1 (20.3) $-3/2$ (20.4) $-4, 2$ (20.5) $5/12$ (21.1) $1, 100$ (21.2) $1, 10^4$ (21.3) $2, 16$ (21.4) $3, 3^{5/2}$ (22.1) $2\log_3 2-7, \log_3 2-7$ (22.2) $x=4\log 2/(1+\log 2)$ และ $y=2(\log 2-1)/(1+\log 2)$ (23.1) $\mathbb{R}-[1,3]$ (23.2) $(0,1)$ (23.3) $(2,3)\cup(27/8,4)$ (23.4) $(0,1/5)\cup(1,5)$ (23.5) $(0,5)$ (23.6) $(1,2)\cup(3,\infty)$

เมตริกซ์ (Matrix)

• เมตริกซ์ เป็นกลุ่มของจำนวนที่เรียงตัวกันเป็นสี่เหลี่ยม ภายในเครื่องหมาย ( ) หรือ [ ] เรียกจำนวนแต่ละจำนวนที่อยู่ในเมตริกซ์ ว่า *สมาชิก* (Element) ของเมตริกซ์

ตัวอย่างเมตริกซ์ เช่น $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

ขนาดของเมตริกซ์ เรียกว่า *มิติ* (Dimension) (คิดจาก จำนวนแถว; row คูณ หลัก; column) ในตัวอย่างเป็นเมตริกซ์ที่มีมิติ 3×2, 1×3, 2×2 ตามลำดับ

• การเรียกชื่อเมตริกซ์นิยมใช้ตัวพิมพ์ใหญ่ เช่น A, B, C และอาจเขียนมิติกำกับเป็นตัวห้อยไว้ เช่น $A_{3\times2}$, $B_{1\times3}$, $C_{2\times2}$ โดยจะเรียกชื่อสมาชิกเป็นตัวพิมพ์เล็ก ที่มีตัวห้อยบอกตำแหน่งแถวและหลัก ในรูป a_{ij} (แถวที่ i และหลักที่ j) เช่น

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \end{bmatrix}$$

$a_{11} = 7 \qquad a_{21} = 6 \qquad b_{13} = -2 \quad \ldots$

• เมตริกซ์สองเมตริกซ์ จะเท่ากันได้ก็ต่อเมื่อ “มีมิติเดียวกัน” (แปลว่า ขนาดเท่ากัน) และสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันต้องเท่ากัน ทุกๆ ตำแหน่ง

• *ทรานสโพส* (เมตริกซ์สลับเปลี่ยน; Transpose) *ของเมตริกซ์* A *ใช้สัญลักษณ์* A^t *หรือ* A^T คือการเปลี่ยนแถวเป็นหลัก (หรือเปลี่ยนหลักเป็นแถว) เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} 7 & 6 & -5 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

<u>ข้อสังเกต</u> เมตริกซ์มิติ $m \times n$ เมื่อทำการทรานสโพส จะกลายเป็นมิติ $n \times m$

• เมตริกซ์ที่ควรรู้จัก

1. *เมตริกซ์จัตุรัส* (Square Matrix) คือเมตริกซ์ที่มีจำนวนแถว เท่ากับจำนวนหลัก สมมติว่ามี n หลัก และ n แถว ($n \times n$) เรียกสมาชิกในแนว 11, 22, 33, .. จนถึง nn ว่า *เส้นทแยงมุมหลัก* (Main Diagonal) และสมาชิกตัวอื่นที่เหลือ จะเป็นรูปสามเหลี่ยม เรียกว่า *สามเหลี่ยมบน* (Upper Triangle) และ*สามเหลี่ยมล่าง* (Lower Triangle)

$$\begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}_{1\times1} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2} \quad \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

2. *เมตริกซ์ศูนย์* (Zero Matrix; $\underline{0}$) คือเมตริกซ์ที่สมาชิกทุกตัวเป็นเลข 0 (จัตุรัสหรือไม่ ก็ได้)

$$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. *เมตริกซ์หนึ่งหน่วย* (Unit Matrix; I) คือเมตริกซ์จัตุรัส ที่มีสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลักเป็น 1 และสมาชิกตัวอื่นที่เหลือทั้งหมดเป็น 0 อาจเขียนขนาดกำกับเป็นตัวห้อยเพียง 1 ตัว

$$I_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>การบวก, ลบ, และคูณเมตริกซ์</u>

- การบวกเมตริกซ์คู่หนึ่ง จะทำได้ก็ต่อเมื่อ เมตริกซ์ทั้งสองมีมิติเดียวกัน

ผลบวกที่ได้ จะมีมิติเดิม และสมาชิกของผลลัพธ์เกิดจากสมาชิกตำแหน่งเดียวกันนั้นบวกกัน (สำหรับการลบก็เช่นกัน; สมาชิกผลลัพธ์ เกิดจากสมาชิกตำแหน่งเดียวกันลบกัน)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 \\ -7 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

<u>ข้อสังเกต</u> เอกลักษณ์การบวกของเมตริกซ์ ก็คือ เมตริกซ์ $\underline{0}$

- การคูณเมตริกซ์ด้วยสเกลาร์ ผลที่ได้จะเป็นการคูณสมาชิกทุกตัวด้วยสเกลาร์นั้น

$$2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -10 & 14 \end{bmatrix}$$

- ส่วนการคูณเมตริกซ์คู่หนึ่ง จะทำได้เมื่อ จำนวนหลักของตัวตั้ง เท่ากับจำนวนแถวของตัวคูณ และผลคูณที่ได้จะมีจำนวนแถวเท่าตัวตั้ง จำนวนหลักเท่าตัวคูณ

เขียนง่ายๆ ได้ดังนี้ $\boxed{A_{m\times n} \times B_{n\times r} = C_{m\times r}}$

วิธีการหาสมาชิกของผลลัพธ์ ขอให้สังเกตจากตัวอย่าง (ยึดแถวตัวตั้ง ยึดหลักตัวคูณ)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

จะได้ $AB = \begin{bmatrix} 2\cdot0+3\cdot3 & 2\cdot1+3\cdot2 \\ -1\cdot0+4\cdot3 & -1\cdot1+4\cdot2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 12 & 7 \end{bmatrix}$

$$BC = \begin{bmatrix} 0\cdot1+1\cdot(-1) & 0\cdot3+1\cdot0 & 0\cdot2+1\cdot(-2) \\ 3\cdot1+2\cdot(-1) & 3\cdot3+2\cdot0 & 3\cdot2+2\cdot(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

<u>ข้อสังเกต</u> เอกลักษณ์การคูณของเมตริกซ์ ก็คือ เมตริกซ์ I

สมบัติการบวกและการคูณ

การบวกเมตริกซ์

- $A+B=B+A$
- $(A+B)+C=A+(B+C)$
- $A^t+B^t=(A+B)^t$
- $A+\underline{0}=\underline{0}+A=A$
- $A+(-A)=\underline{0}$

การคูณด้วยสเกลาร์

- $(kA)^t=k\cdot A^t$
- $k_1(k_2A)=k_2(k_1A)=(k_1k_2)\,A$
- $k(A+B)=kA+kB$

การคูณด้วยเมตริกซ์

- $AB\neq BA$ or $AB=BA$ * *
- $(AB)C=A(BC)$
- $A(B+C)=AB+AC$
- $(A+B)C=AC+BC$
- $(AB)^t=B^tA^t$ * *
- $AI=IA=A$

AB = BA เมื่อใดบ้าง?

โจทย์

(1) $A=\begin{bmatrix}2&3&-1\\4&0&8\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-3&2\\5&4\end{bmatrix}$ จงหาค่าของ $a_{11}+b_{22}$ และ $2a_{12}-3b_{21}$

(2) ให้เมตริกซ์ A มีมิติ 3×3 โดยที่ $a_{ij}=\begin{cases}i+j & ,i>j\\1 & ,i=j\\i-j & ,j>i\end{cases}$ จงเขียนเมตริกซ์ A นั้น

(3) $A=\begin{bmatrix}2&-4\\2^0+1&5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}\text{cosec }30^\circ&\log 10^{-4}\\\sqrt{4}&\sqrt{25}\end{bmatrix}$ ถามว่า $A=B$ หรือไม่

(4) $x^2-x+1=0$ และ $A=\begin{bmatrix}x^2&x-x^2\\0&x\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}x-1&1\\0&x^2+1\end{bmatrix}$, $A=B$ หรือไม่

(5) จงหาค่าของ

(5.1) $\begin{bmatrix}1&3&2\\0&1&5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&6&1\\4&1&2\end{bmatrix}$

(5.2) $\begin{bmatrix}6&2\\8&4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&5\\-1&3\end{bmatrix}$

(5.3) $5\begin{bmatrix}2&1\\4&3\\-2&8\end{bmatrix}$

(6) $A=\begin{bmatrix}2&3\\-1&4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&1\\3&2\end{bmatrix}$ จงหา $A+B$, A^t+B^t, $(A+B)^t$, $A+\underline{0}$

(7) $A=\begin{bmatrix}2&-1&4\\3&0&1\end{bmatrix}$ จงหา A^t, $2A$, $-A$

(8) $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\end{bmatrix}$ จงเขียนเมตริกซ์ AB

(9) จงหาค่า x, y เมื่อกำหนดให้

(9.1) $A_{2\times5}\times B_{5\times3}=C_{x\times y}$

(9.2) $A_{3\times5}\times B_{x\times y}=C_{3\times4}$

(9.3) $A_{x\times2}\times B_{2\times5}=C_{7\times y}$

(9.4) $A_{2\times x}\times B_{y\times5}=C_{2\times5}$

(10) $A_{3\times2}, B_{2\times4}$ จงหามิติของ AB และ BA

(11) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ จงหา AB, BA

(12) $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 2\end{bmatrix}, \ B=\begin{bmatrix}3 & -4\\ -1 & 5\end{bmatrix}$ จงหา $AB, BA, (A+B)^2, A^2+2AB+B^2$

(13) $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}, \ B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ จงหา $A^t \times (B \times A)$

(14) ถ้า $\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 4 & 2\end{bmatrix}=C$ จงหาค่า c_{22}

(15) $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ จงหา A^n

(16) กำหนด $A=\begin{bmatrix}x+y & 2\\ 3 & z\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & y\\ -2 & y\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ถ้า $AB=C$ จงหาค่า a

(17) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & x\\ 1 & y\\ z & 1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}5 & 7\\ 7 & 5\end{bmatrix}$ ถ้า $AB=C$ จงหาค่า $x+y-z$

(18) ถ้า $X=\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & -b\end{bmatrix}$ และ $X^2+2X+I=\underline{0}$ จงหา a, b

(19) $A=\begin{bmatrix}a & 4\\ 2 & b\end{bmatrix}$ ถ้า $A^2+4A-5I=\underline{0}$ จงหา a, b

(20) $A=\begin{bmatrix}x & -1 & x^2\\ y^2 & 1 & 3\\ 3 & x^2 & y\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 4\\ 0 & 2 & 4\\ 4 & 4 & 2\end{bmatrix}$ ถ้า $A^t+A=B$ แล้ว x, y เป็นเท่าใด

(21) [Ent'39] $A=\begin{bmatrix}3 & 7\\ -7 & -4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}$ เซตของจุด (x, y) ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $BAB^t=\begin{bmatrix}12\end{bmatrix}$ เป็นกราฟรูปอะไร

<u>ดีเทอร์มินันต์ (ตัวกำหนด; Determinant)</u>

ดีเทอร์มินันต์ เป็นคุณสมบัติของเมตริกซ์จัตุรัสเท่านั้น และ ดีเทอร์มินันต์มีค่าเป็นตัวเลข

เครื่องหมายแสดง "ดีเทอร์มินันต์ของเมตริกซ์ A" คือ $|A|$ *หรือ* $\det(A)$

<u>วิธีหาดีเทอร์มินันต์</u>

เมตริกซ์ 1×1

ถ้า $A=\begin{bmatrix}a\end{bmatrix}$

จะได้ว่า $\boxed{\det(A)=a}$

เมตริกซ์ 2×2

ถ้า $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ จะได้ว่า $\boxed{\det(A)=ad-bc}$

เมตริกซ์ 3×3 ใช้หลักว่า คูณเฉียงขึ้นใส่ลบ คูณเฉียงลงเครื่องหมายเดิม แล้วรวมกัน

ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $\boxed{\det(A) = -gec - ahf - bdi + aei + gbf + hdc}$

ส่วนเมตริกซ์ $n \times n$ ใดๆ จะใช้วิธีโคแฟกเตอร์ (ใช้ได้กับทุกขนาด ตั้งแต่ 2×2 ขึ้นไป)

$\boxed{\det(A) = \text{สมาชิก 1 แนว คูณกับโคแฟกเตอร์ของแนวนั้น (ตำแหน่งเดียวกันคูณกันแล้วรวม)}}$

คำว่า แนว ในที่นี้หมายถึง แถว หรือ หลัก ก็ได้

นิยาม :

1. *ไมเนอร์* (Minor) ของเมตริกซ์ A *ใช้สัญลักษณ์ว่า* $M_{ij}(A)$

คือ ค่า $\det$ ของสับเมตริกซ์ (เมตริกซ์ย่อย; Submatrix) ที่ตำแหน่งนั้น..

(ตัดแถว ตัดหลัก แล้วหา $\det$)

2. *โคแฟกเตอร์* (ตัวประกอบร่วมเกี่ยว; Cofactor) ของเมตริกซ์ A *ใช้สัญลักษณ์ว่า* $C_{ij}(A)$ *หรือ* $\text{Cof}(A)$

คือ ไมเนอร์ $M_{ij}(A)$ ที่นำมาใส่เครื่องหมาย บวกหรือลบ สลับกันตามรูปแบบ

$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ (ตำแหน่งแรกสุดใส่บวก, แล้วเติมเครื่องหมายบวกลบสลับกันไป)

ตัวอย่างเช่น ต้องการหาเมตริกซ์โคแฟกเตอร์ของ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

เริ่มจากหาค่าตัวเลขไมเนอร์ให้ครบทุกตำแหน่ง

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 0,\ M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 11,\ \ldots,\ M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$\therefore M(A) = \begin{bmatrix} 0 & 11 & 0 \\ 8 & 21 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Cof}(A) = \begin{bmatrix} +0 & -11 & +0 \\ -8 & +21 & -(-5) \\ +1 & -4 & +(-2) \end{bmatrix}$$

จากเมตริกซ์โคแฟกเตอร์ที่ได้ ทำให้หาค่า $\det(A)$ ได้ดังนี้

$\det(A) = 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-11) + (-1) \cdot 0 = -11$ (คิดจากแถวที่ 1)

$\det(A) = 5 \cdot 1 + 0 \cdot (-4) + 8 \cdot (-2) = -11$ (คิดจากแถวที่ 3)

$\det(A) = 1 \cdot (-11) + 0 \cdot 21 + 0 \cdot (-4) = -11$ (คิดจากหลักที่ 2)

จะพบว่า ไม่ว่าจะคิดจากแถว หรือหลักใด ก็จะได้ค่า $\det(A)$ เท่าเดิมเสมอ แต่โจทย์ข้อนี้คิดจากหลักที่ 2 จะง่ายที่สุด เพราะพจน์ที่สองกับสาม เป็น 0 ไม่จำเป็นต้องหาค่าโคแฟกเตอร์

$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32} \\ &= -a_{12}M_{12} + \cancel{a_{22}}^{=0}M_{22} - \cancel{a_{32}}^{=0}M_{32} \\ &= -1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} \qquad = -11\end{aligned}$$

<u>โจทย์</u>

(22) $A = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -5 \end{bmatrix}$ จงหา $\det(A), \det(B), \det(\underline{0}_1)$

(23) $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ จงหา $\det(A), \det(B)$

(24) $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x & x \\ -1 & x \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ จงหาค่า x ที่ทำให้

$\det(A) < \det(B) < \det(C)$

(25) $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -5 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา $\det(A), M_{11}(A), M_{32}(A), C_{11}(A), C_{32}(A)$

(26) จงหา $\det(A)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ โดยใช้วิธีโคแฟกเตอร์

(27) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -5 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา $\det(A)$ โดยใช้วิธี $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$, คูณทแยง

(28) [Ent'40] ให้ $A = \begin{bmatrix} x & y & 4 \\ -3 & 8 & 0 \\ x & -y & -1 \end{bmatrix}$ โดยโคแฟกเตอร์ของ a_{21} คือ -6, โคแฟกเตอร์ของ a_{23} คือ 4 แล้ว จงหาโคแฟกเตอร์ของ a_{33}

(29) [Ent'39] $A = \begin{bmatrix} a & -1 & 0 \\ b & 1 & 1 \\ c & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ถ้า $C_{12}(A) = 1$ และ $\det(A) = -5$ จงหาค่า a

(30) $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา $\begin{vmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{32} & C_{44} \end{vmatrix}$

(31) จงหาค่า $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{vmatrix}$ และ $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$ และ $\begin{vmatrix} n & n+1 & n+2 \\ n+1 & n+2 & n+3 \\ n+2 & n+3 & n+4 \end{vmatrix}$

สมบัติของดีเทอร์มินันต์

- $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^t) = \det(A)$
- $\det(A^n) = (\det(A))^n \quad , n \in I^+, I^-$
- $\det(kA) = k^n \cdot \det(A) \quad , n = \text{size of } A \quad **$
- $\det(I) = 1$
- $\det(\underline{0}) = 0$

หมายเหตุ เมตริกซ์ที่ค่า det เป็นศูนย์ เรียกว่า *เมตริกซ์เอกฐาน* (Singular Matrix) เช่น
- เมตริกซ์ที่มีแนวใดแนวหนึ่งเป็น 0 ทุกตัว
- เมตริกซ์ที่มี 2 แนว ซ้ำกัน หรือเป็น k เท่าของกันและกัน

ข้อสังเกต เมตริกซ์ที่มีสามเหลี่ยมล่างหรือบน เป็น 0 ทุกตัว (เรียกว่า*เมตริกซ์สามเหลี่ยม* หรือ Triangular Matrix) จะมีค่า det เป็น "ผลคูณของสมาชิกในเส้นทแยงมุมหลัก"

โจทย์

(32) [Ent'36] ถ้า $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ จงหาค่า $\det(-2A^3A^t(A+A^t))$

(33) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา $\det(-2A^nA^t(A+A^t))$ เมื่อ $n \in I^+$

(34) กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$
ถ้า $AXB = CD$ จงหา $|X|$

(35) จงหา $\det(X)$ เมื่อกำหนดให้ $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 10 \\ 0 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(36) ให้ A, B เป็น non-singular matrix โดย $|A| = \frac{1}{4}, B = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ x & y \end{bmatrix}, AB + 4A = 2I$
จงหา $x + y$

(37) A, B, C, I มีมิติ 2×2 และ $|-A^3| = |2\sqrt{2}\, I|, |C^{-1}| = 4, AB^tC = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$
จงหา $|B|$

(38) $A = \begin{bmatrix} \sin x & 2\cos x \\ -\cos x & 2\sin x \end{bmatrix}$ จงหาค่า x ที่ทำให้ A เป็นเมตริกซ์เอกฐาน

(39) จงหาจำนวนจริง x ทั้งหมดที่ทำให้ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x^2 \\ 2 & 1 & 0 \\ x & 3 & 5 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์เอกฐาน

(40) จงหาค่า x ที่ทำให้ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & x & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์เอกฐาน

(41) $A = \begin{bmatrix} \log 2^x & -2x \\ \log 2^{x-1} & x \end{bmatrix}$ จงหาค่า x ที่ทำให้ A ไม่เป็นเมตริกซ์เอกฐาน

(42) [Ent'34] ข้อใดถูกหรือผิดบ้าง เมื่อ A เป็นเมตริกซ์จัตุรัส มิติ 2×2

ก. ถ้า $A = -A^t$ แล้ว สมาชิกในแนวทแยงมุมบนซ้ายถึงล่างขวาของ A เป็น 0 หมด

ข. ถ้า $A^2 = B$ และ B เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์แล้ว A เป็นนอนซิงกูลาร์ด้วย

<u>อินเวอร์สการคูณ (เมตริกซ์ผกผัน; Inverse Matrix)</u>

เรื่องเมตริกซ์ไม่มีการหาร มีแต่การคูณด้วยอินเวอร์ส

และ *อินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์* A *ใช้สัญลักษณ์* A^{-1}

โดยนิยามให้ $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ (เปรียบเสมือน $A^{-1} = \frac{I}{A}$)

<u>วิธีหาอินเวอร์สการคูณ</u>

เมตริกซ์ 1×1

ถ้า $A = [a]$

จะได้ว่า $\boxed{A^{-1} = \left[\frac{1}{a}\right]}$

เมตริกซ์ 2×2

ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$

ส่วนเมตริกซ์ $n \times n$ ใดๆ ตั้งแต่ 2×2 ขึ้นไป จะใช้<u>วิธีโคแฟกเตอร์</u>เช่นเดิม

$\boxed{A^{-1} = \frac{(\text{Cof}(A))^t}{\det(A)}}$ และเรียก $(\text{Cof}(A))^t$ ว่า $\text{adj } A$ ก็ได้

<u>นิยาม</u> : $\text{adj } A$ *หรือ* $\text{Adj}(A)$ *คือ เมตริกซ์ผูกพันของ* A (ย่อมาจาก Adjoint Matrix)

<u>สมบัติของอินเวอร์สการคูณ</u>

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ * *
- $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} \cdot A^{-1}$
- $\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1} = \frac{1}{|A|}$
- $(A^{-1})^n = (A^n)^{-1} = A^{-n}$
- $(A^{-1})^{-1} = A$

และจะสังเกตได้ว่า เมตริกซ์ที่จะหาอินเวอร์สการคูณได้ ต้องเป็น *เมตริกซ์ไม่เอกฐาน* (Non-Singular Matrix) คือ $\det \neq 0$ เท่านั้น

ข้อควรระวังในสมการเมตริกซ์

1. เมื่อทำการย้ายข้างตัวคูณ ไปเป็นอินเวอร์สอยู่อีกฝั่ง ต้องคำนึงถึงลำดับด้วย เพราะการคูณไม่มีสมบัติการสลับที่.. เช่น $AB = C$ กลายเป็น $B = A^{-1}C$ ได้.. แต่เป็น $B = CA^{-1}$ ไม่ได้

2. ตรวจสอบเสมอว่า สมการยังเป็นเมตริกซ์ทั้งสองข้างหรือไม่ (หากย้ายข้างเมตริกซ์ ไปเป็นอินเวอร์สจนหมด อย่าลืมเหลือเมตริกซ์ I ไว้ด้วย..) เช่น จาก $AB = 2C$ หากย้ายข้างเป็น $ABC^{-1} = 2$ แบบนี้ผิด เพราะฝั่งขวากลายเป็นตัวเลข.. ที่ถูกต้องเป็น $ABC^{-1} = 2I$

3. สมการเมตริกซ์สามารถคูณเข้าทั้งสองข้างได้เสมอ แต่การตัดออกทั้งสองข้างบางครั้งใช้ไม่ได้

เช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ พบว่า $AB = AC$ แต่ $B \neq C$

4. ใส่เครื่องหมาย $\det$ ทั้งสองข้างได้เสมอ แต่การตัดออกทั้งสองข้างก็มักจะใช้ไม่ได้

เช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ พบว่า $\det(A) = \det(B)$ แต่ $A \neq B$

5. ถ้า $AB = \underline{0}$ แล้ว ไม่จำเป็นที่ A หรือ B ต้องเป็น $\underline{0}$

เช่น $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ก็พบว่า $AB = \underline{0}$ ได้เช่นกัน

โจทย์

(43) $A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$ จงหา $A^{-1}, B^{-1}, \underline{0}_2^{-1}, I_2^{-1}$

(44) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ จงหา $(AB)^{-1}, B^{-1}A^{-1}$

(45) จงหาอินเวอร์สการคูณของ

(45.1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (45.2) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ (45.3) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(46) [Ent'41] $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา $2A^{-1}B^t$

(47) $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$ และ B เป็นเมตริกซ์ที่สอดคล้องกับสมการ $BA^{-1} = A^t$ จงหา B

(48) $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}X + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ จงหาเมตริกซ์ X

(49) ถ้า $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ จงหา A

(50) ถ้า $A\begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 36 & 64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1}

(51) $AB = I, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา $A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(52) [Ent'40] กำหนด $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ และ $AX + B = A$ จงหา $b + c$

(53) [Ent'38] $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ถ้า $X = (B + C)A$ จงหา X^{-1}

(54) [Ent'37] ถ้า $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ และ $AB - AC - \frac{1}{2}I = \underline{0}$ จง หา A^{-1}

* (55) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ จงหา $\text{adj } A, A(\text{adj } A), (\text{adj } A)A, \det(A), A^{-1}$

(56) จงหาอินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์ A เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 6 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

(57) [Ent'41] $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 30 & 18 \\ 12 & 8 \end{bmatrix}$, B เป็นเมตริกซ์ที่ทำให้ $AB = C$ ข้อใดถูก

ก. $\det(B^{-1}) = 12$ ค. $\det(2B^t) = 24$

ข. $\det(B^{-1}A^{-1}) = 24$ ง. $\det(A^2B) = 48$

(58) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ จงหา $\det(A^t)^{-1}$

(59) $2A^{-1} = B$ และ $\det(A) \cdot \det(B) = 16$ จงหามิติของเมตริกซ์ B

(60) A มีมิติ 3×3 และ $\det(A) = 4$, ถ้า $A^2 - 3A + I = \underline{0}$ และ $B = \frac{1}{2}A^{-1} - \frac{3}{2}I$ จงหา $\det(B)$

(61) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, C = 2AB^{-1} + B^{-1}$ จงหาค่า x เมื่อ $\det(C) = 1$

(62) $A = \begin{bmatrix} c & -1 \\ 1 & -c \end{bmatrix}$ และ $\det(2A^2) + (1-c^2)^3 \det(A^{-1})^t = 45$ จงหา c

(63) $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 1-a & -a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ จงหาค่า a ที่ทำให้ $a\det(A^{-1})^t + \frac{1}{4a}\det(2A) + 4 = 0$

(64) [Ent'35] ข้อใดถูก

ก. ถ้าเมตริกซ์ $U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ แล้ว เมตริกซ์ $3UV - 2XY = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$

ข. ถ้า $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ a^2 & a \end{bmatrix}$ เป็นซิงกูลาร์เมตริกซ์แล้ว $a = 2$

ค. ถ้า A, B เป็นเมตริกซ์จัตุรัสที่มีมิติเดียวกัน และ $\det(AB) = 0$ แล้ว $\det(A) = 0$ หรือ $\det(B) = 0$

ง. ถ้า A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์มิติ 2×2 แล้ว $\det((2A)^{-1}) = \det(2A^{-1})$

(65) [Ent'41] $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} x & -x \\ 3/7 & x+3 \end{bmatrix}$ จงหาเซตจำนวนจริง x ที่ทำให้ $\det(M) = \det((2A + A^t)A^{-1})$

(66) [Ent'36] กำหนด A, B เป็น non-singular matrix โดย $\det(A^{-1}) = -\frac{1}{2}$ และ $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ x & y \end{bmatrix}$ จงหา $x + y$ ถ้า $AB + 3A = 2I$

* (67) [Ent'39] ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ถ้า $AB = BA = I$ จงหาค่า $\det(\text{adj}\, B^{-1})$

* (68) [Ent'37] ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $AB = BA = I$ จงหาเมตริกซ์ผูกพันของ B

ก. $\frac{1}{3}A$ ข. $-3A$ ค. $\frac{1}{3}A^t$ ง. $-3A^t$

* (69) A, B มีมิติ 4×4 โดย $A(\text{adj}\, A) - BA = I$ ถ้า $\det(B) = 0$ จงหา $\det(A)$

<u>หมายเหตุ</u> จากข้อ 55, 67, 68, 69 ซึ่งเป็นการคำนวณเกี่ยวกับ $\text{adj}\, A$ นั้น เราสามารถพิสูจน์ความสัมพันธ์จากสมการ $\boxed{A^{-1} = \frac{\text{adj}\, A}{\det(A)}}$ ก่อน เพื่อความสะดวกในการคำนวณ

เช่น $A \cdot A^{-1} = \frac{A(\text{adj}\, A)}{\det(A)} \rightarrow I = \frac{A(\text{adj}\, A)}{\det(A)} \rightarrow \boxed{\det(A) \cdot I = A(\text{adj}\, A)}$

ส่วนความสัมพันธ์อื่น ก็หาได้จาก $\boxed{A^{-1} = \frac{\text{adj}\, A}{\det(A)}}$ เหมือนกัน เช่น $\text{adj}\, A^{-1} = \frac{A}{\det(A)}$, $\det(\text{adj}\, A) = (\det(A))^{n-1}$ ฯลฯ

การดำเนินการตามแถว (Row Operation)

นำไปใช้ประโยชน์ในการหาอินเวอร์สการคูณ (A^{-1}) ได้

ซึ่งการดำเนินการตามแถวนั้น สามารถกระทำได้ 3 แบบ คือ

a) นำค่าคงที่ k (ที่ไม่ใช่ 0) ไปคูณไว้แถวใดแถวหนึ่ง

b) นำค่าคงที่ k ไปคูณแถวใดแถวหนึ่ง แล้วเอาไปบวกไว้ที่แถวอื่น

c) สลับแถวกัน 1 ครั้ง

หมายเหตุ : การดำเนินการตามแถวทั้งสามแบบ ส่งผลต่อค่า $\det$ ดังนี้

a) $\det_{new} = k \cdot \det_{old}$

b) $\det_{new} = \det_{old}$ ($\det$ไม่เปลี่ยน, ใช้ช่วยในการหา $\det$ ได้)

c) $\det_{new} = -\det_{old}$

ทั้งนี้ การดำเนินการตามหลัก ก็ให้ผลเช่นเดียวกัน เนื่องจากสมบัติ $\det(A^t) = \det(A)$

การหาอินเวอร์สการคูณ (A^{-1}) โดยดำเนินการตามแถว มีหลักอยู่ว่า พยายามหาขั้นตอนทำ A ให้กลายเป็น I, แล้ววิธีเดียวกันนั้นจะทำ I ให้กลายเป็น A^{-1} ได้

เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า $\boxed{\left[\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|c} I & A^{-1} \end{array}\right]}$

และเรียกเมตริกซ์ที่ขยายขนาดแล้ว ว่า *เมตริกซ์แต่งเติม* (Augmented Matrix)

ตัวอย่างเช่น ต้องการหา A^{-1} เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -8 & 3 \end{bmatrix}$

เราจะเริ่มจาก เขียน A กับ I ไว้ในแถวเดียวกัน แล้วพยายามแปลง A ทางซ้ายมือ ให้เป็น I

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 1 & 0 \\ -8 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{2R_1+R_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{\frac{1}{7}R_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/7 & 1/7 \end{array}\right]$$

$$\overset{-2R_2+R_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & -3/7 & -2/7 \\ 0 & 1 & 2/7 & 1/7 \end{array}\right]$$

$$\overset{\frac{1}{4}R_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3/28 & -1/14 \\ 0 & 1 & 2/7 & 1/7 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} I & A^{-1} \end{array}\right]$$

เมื่อแปลง A ทางซ้ายมือ ให้เป็น I เรียบร้อยแล้ว, I ทางขวามือจะกลายเป็น A^{-1}

ดังนั้น $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3/28 & -1/14 \\ 2/7 & 1/7 \end{bmatrix}$

ข้อสังเกต 1. เราใช้เครื่องหมาย $\sim$ แทนการดำเนินการแต่ละขั้นตอน และเขียนวิธีกำกับไว้

2. นิยมเขียนแถวที่ถูกดำเนินการ ไว้ด้านหลัง เช่น $2R_1+R_2$ แสดงว่า R_2 จะเปลี่ยนไป

3. เทคนิคการทำให้เป็น I โดยเร็วที่สุดคือ ทำให้เป็น 0 ทั้งหมดทีละสามเหลี่ยม (ล่าง หรือบน)

4. หากต้องการสลับที่ระหว่างแถว R_1, R_2 ก็จะใช้สัญลักษณ์กำกับว่า $R_1 \leftrightarrow R_2$ หรือ R_{12}

โจทย์

(70) ถ้า $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} d & f & e \\ 2a & 2c & 2b \\ g & i & h \end{bmatrix}$ ถามว่า $|B|$ เป็นกี่เท่าของ $|A|$

(71) ถ้า $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix}$, $\det(A)=3$, $B=\begin{bmatrix} 4x & 4y & 4z \\ 2a & 2b & 2c \\ -p & -q & -r \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} p & -a+x & x \\ q & -b+y & y \\ r & -c+z & z \end{bmatrix}$

จงหา $\det(3B^{-1})$ และ $\det(2C^{-1})$

(72) [Ent'38] ให้ A เป็นเมตริกซ์จัตุรัส 4×4 และ $M_{23}(A)=5$ จงหา $M_{32}(2A)^t$

(73) [จากข้อ 43,55,56] จงหาอินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์ A, B, C, D โดยใช้วิธีดำเนินการตามแถว เมื่อ $A=\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & -1 \end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 6 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

<u>การใช้เมตริกซ์แก้ระบบสมการเชิงเส้น</u>

ระบบสมการเชิงเส้น ที่มีจำนวนตัวแปรเท่ากับจำนวนสมการ เราจะเขียนให้อยู่ในรูปสมการเมตริกซ์ได้ เป็น $AX=B$ (เรียก A ว่า เมตริกซ์สัมประสิทธิ์, X เป็นเมตริกซ์ตัวแปร, และ B เป็นเมตริกซ์ค่าคงที่) สิ่งที่เราต้องการหาก็คือเมตริกซ์ X

เช่น ระบบสมการ $\begin{cases} 4x+2y-z=0 \\ x-y=3 \\ 5x-3y+2z+1=0 \end{cases}$ มี 3 สมการ และมี 3 ตัวแปร

แปลงเป็นสมการเมตริกซ์ $AX=B$ ได้ว่า $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

วิธีแก้สมการเมตริกซ์นี้ มี 3 แบบ

1. วิธีอินเวอร์ส $\boxed{AX=B \;\rightarrow\; X=A^{-1}B}$ เป็นวิธีทำแบบตรงๆ

นั่นคือ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ ก็ต้องหาอินเวอร์สก่อน แล้วคูณกันได้เป็นคำตอบ

2. กฎของคราเมอร์ (Cramer's Rule) $\boxed{x_i=\dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}}$

เมื่อ A_i คือนำ B มาแทนหลักที่ i ของ A

เช่น จากตัวอย่าง จะได้ $x=\dfrac{\begin{vmatrix} \boxed{0} & 2 & -1 \\ \boxed{3} & -1 & 0 \\ \boxed{-1} & -3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}}$, $y=\dfrac{\begin{vmatrix} 4 & \boxed{0} & -1 \\ 1 & \boxed{3} & 0 \\ 5 & \boxed{-1} & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}}$, $z=\dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & \boxed{0} \\ 1 & -1 & \boxed{3} \\ 5 & -3 & \boxed{-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}}$

3. การดำเนินการตามแถว (Row Operation) $\boxed{\left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|c} I & X \end{array}\right]}$

มีหลักอยู่ว่า พยายามหาขั้นตอนทำ A ให้กลายเป็น I , แล้ววิธีเดียวกันนั้นจะทำ B ให้กลายเป็น X ได้

จากตัวอย่างก็ต้องเริ่มจาก $\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 5 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right]$ แล้วทำให้เป็น $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \end{array}\right]$

<u>โจทย์</u>

(74) จงหาคำตอบของระบบสมการต่อไปนี้ โดยใช้วิธีอินเวอร์ส

(74.1) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$ (74.2) $\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ 3x - 7y = 2 \end{cases}$

(75) จงหาคำตอบของระบบสมการ $\begin{cases} 4x + 3x + 2z = 5 \\ 3x - y - z = 6 \\ -x + 2y + z = 1 \end{cases}$ โดยใช้วิธีอินเวอร์ส

(76) จงหาคำตอบของระบบสมการ $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ -4x + y = 14 \end{cases}$ โดยใช้กฎของคราเมอร์

(77) จงหาคำตอบระบบสมการนี้โดยใช้กฎของคราเมอร์

(77.1) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ -x + 4y = -2 \end{cases}$ (77.3) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - 4z = 9 \\ x - y + 2z = -2 \end{cases}$

(77.2) $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - 2y - 3z = 1 \\ 3x + 2y + 4z = 5 \end{cases}$

(78) [Ent'38] กำหนดระบบสมการเชิงเส้น $\begin{cases} 2x + 4y + z = 1 \\ x + 2y = -2 \\ -x - 3y + 2z = 3 \end{cases}$ จงหาค่า x

(79) จงหาคำตอบระบบสมการต่อไปนี้ โดยการดำเนินการตามแถว

(79.1) $\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 3x + z = 13 \\ y + 2x - z - 9 = 0 \end{cases}$ (79.2) $\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = -3 \\ x - 3y - 3z = -2 \end{cases}$

(80) จงหาคำตอบของระบบสมการ

(80.1) $\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ 4x + 3y + 2z = -5 \\ -2x + 4y + 2z = -4 \end{cases}$ (80.2) $\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ 4x + 3y + 2z = -5 \\ -2x + 4y + 2z = -2 \end{cases}$

(81) จงหาคำตอบของระบบสมการ

(81.1) $\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{1}{z}=0 \\ \frac{4}{x}+\frac{2}{y}=4 \\ \frac{3}{y}+\frac{1}{z}=2 \end{cases}$ (81.2) $\begin{cases} \frac{2}{x}+3\sqrt{y}+z=3 \\ \frac{1}{x}+2\sqrt{y}+z=1 \\ -\frac{1}{x}+4\sqrt{y}=-2 \end{cases}$

(82) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ จงหาค่า y

(83) ให้หาค่า x และ y จากระบบสมการต่อไปนี้ ถ้า s เป็นค่าคงที่

$s(x+y)-s=-x-2y$ ___(1)

$s(x+y)-y=0$ _____(2)

(84) [Ent'40] ให้ $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ และ $X=\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$ ถ้า $A^2(\text{adj } A)X=\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ จงหาค่า p

(85) [Ent'41] ให้ $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & -1 & a \end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ a ที่ทำให้ $AX=B$ หา

คำตอบได้

(86) [Ent'40] ให้ $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 3 & b \\ -1 & 0 & c \end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ถ้า $AX=B$ และ

$A\sim\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}R_2-2R_1$ แล้ว x มีค่าเท่าใด

<u>เฉลย</u>

(1) 6 และ -9 (2) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ (3) เท่ากัน (4) เท่ากัน (5.1) $\begin{bmatrix} 3 & 9 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ (5.2)

$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$ (5.3) $\begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 20 & 15 \\ -10 & 40 \end{bmatrix}$ (6) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ (7)

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & -2 & 8 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (8) ... (9.1) 2 และ 3 (9.2) 5 และ 4

(9.3) 7 และ 5 (9.4) $x=y$ และเป็นจำนวนนับ (10) $(AB)_{3\times4}$, BA ไม่มี (11)

$\begin{bmatrix}5&2\\-3&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&6\\0&2\end{bmatrix}$ (12) $\begin{bmatrix}3&-4\\10&-6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-13&-8\\19&10\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&-44\\33&37\end{bmatrix},\begin{bmatrix}20&-40\\24&21\end{bmatrix}$ (13) $\begin{bmatrix}12&18\\12&27\end{bmatrix}$ (14) 2 (15) $\begin{bmatrix}2^n&\frac{n}{2}\cdot 2^n\\0&2^n\end{bmatrix}$ (16) $\frac{2}{3}$ (17) $3+2-2=3$ (18) -1 และ 1 (19) $(-1,-3)$ หรือ $(-3,-1)$ (20) -1 และ 1 (21) กราฟไฮเพอร์โบลา $3x^2-4y^2=12$ (22) $2,-5,0$ (23) $8,0$ (24) $x\in(-5,-4)\cup(3,4)$ (25) $-2,-2,-9,-2,9$ (26) -34 (27) 60 (28) 14 $(x=1,y=2)$ (29) 2 (30) $\begin{vmatrix}-7&0\\51&-4\end{vmatrix}=28$ (31) $-360,0,0$ (32) $(-2)^2(-2)^4(-12)=-768$ (33) $(-2)^2(1)^n(1)(3)=12$ (34) -5 (35) $(12\cdot-5\cdot1)/(-2\cdot3\cdot5)=2$ (36) $(\frac{1}{4})(2x+2y+8)=4\rightarrow x+y=4$ (37) 16 (38) ไม่มี (39) $\left\{1,\frac{5\pm3\sqrt{5}}{2}\right\}$ (40) 4 (41) $x\neq0,2/3$ (42) ก.ถูก, ข.ถูก (43) $\begin{bmatrix}1&1\\-2&-3/2\end{bmatrix}$, ไม่มี, ไม่มี, $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ (44) $\begin{bmatrix}-4&27/4\\3&-5\end{bmatrix}$ (45.1) $\begin{bmatrix}-3&2\\2&-1\end{bmatrix}$ (45.2) $\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$ (45.3) ไม่มี (46) $\begin{bmatrix}2&-10\\2&-7\end{bmatrix}$ (47) $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ (48) $\begin{bmatrix}-9&-6\\-4&-2\end{bmatrix}$ (49) ไม่มี (50) $\begin{bmatrix}1&4\\9&16\end{bmatrix}$ (51) $\begin{bmatrix}2\\6\\3\end{bmatrix}$ (52) $6+5=11$ (53) $\begin{bmatrix}-2&-1\\1&1\end{bmatrix}$ (54) $\begin{bmatrix}2&0&4\\0&2&-2\\-4&-2&-2\end{bmatrix}$ (55) $\begin{bmatrix}0&-11&0\\3&6&-6\\18&-8&-3\end{bmatrix}$, $-33\,I$, $-33\,I$, -33, $\frac{1}{-33}\begin{bmatrix}0&-11&0\\3&6&-6\\18&-8&-3\end{bmatrix}$ (56) $\begin{bmatrix}-1/4&1/4&1/2\\1/2&-1/6&-1\\3/2&-1/2&-2\end{bmatrix}$ (57) ง. (58) -111 (59) 4×4 (60) $-\frac{1}{2}$ (61) 3 (62) 2 or -2 (63) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ (64) ค. (65) $\left\{\frac{11}{7},-5\right\}$ (66) -4 (67) 36 (68) ก. (69) 1 (70) 2 (71) $-9/8,8/3$ (72) 40 (73) see prob.44, 56, 57 (74.1) $1,-2$ (74.2) $3,1$ (75) $5/4,9/2,-27/4$ (76) $-2,6$ (77.1) $2,0,-1$ (77.2) $1,-3,2$ (77.3) $13/9,7/9,-4/3$ (78) -20 (79.1) $25/7,29/7,16/7$ (79.2) $2,1,-1$ (80.1) ไม่มีคำตอบ (80.2) มีคำตอบหลายชุด (81.1) $2,1,-1$ (81.2) $1/2,0,-1$ (82) 0 (83) $-\frac{s(s-1)}{2s+1},\frac{s^2}{2s+1}$ (84) $1/2$ (85) $a\neq-1,2$ (86) $-2/3$ $(a=3,b=5,c=2)$

<u>โจทย์ทบทวน</u>

ประโยคต่อไปนี้ถูกหรือผิด

__x__ (1) $A + B \neq B + A$

_____ (2) $A^t + B^t \neq (A + B)^t$

_____ (3) $A^tB^t \neq (AB)^t$

_____ (4) $A^{-1}B^{-1} \neq (AB)^{-1}$

_____ (5) $A + 0 = A$

_____ (6) $A \times 1 = A$

_____ (7) $A \times I = A$

_____ (8) $AB = BA$

_____ (9) $k(A + B) \neq kA + kB$

_____ (10) $(A + B)C = AC + BC$

_____ (11) $A(B + C) = AC + AB$

_____ (12) $(AB)C = C(BA)$

_____ (13) $I^2 = I$

_____ (14) $AI = IA$

_____ (15) $|AB| = |A| \cdot |B|$

_____ (16) $|A^n| = |A|^n$

_____ (17) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

_____ (18) $|A^t| = |A|^t$

_____ (19) $|kA| = k|A|$

_____ (20) $|I| = 0$

_____ (21) $|\underline{0}| = 0$

_____ (22) $|2I| = 2$

_____ (23) $A^2 + 5A + 6I = (A + 2I)(A + 3I)$

_____ (24) $A^2 + 5AB + 6B^2 = (A + 2B)(A + 3B)$

_____ (25) $(A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$

_____ (26) $(A^{-1})^{-1} = A$

_____ (27) $(3A)^{-1} = 3A^{-1}$

_____ (28) $\text{adj } A = \dfrac{(\text{Cof}(A))^t}{\det(A)}$

_____ (29) $|A| \cdot A^{-1} = \text{adj } A$

_____ (30) $|A| = (\text{adj } A) \cdot A$

_____ (31) $|\text{adj } A| = |A|^n$ เมื่อ A มีมิติ $n \times n$

_____ (32) $|2A^tA^{-1}| = 8$ เมื่อ A มีมิติ 3×3

_____ (33) $|A^{-1}A^tBA^t| = 3$ เมื่อ $AB = I_3$

_____ (34) $\left|\cos\theta \cdot \begin{bmatrix} 1 & \tan\theta \\ -\tan\theta & 1 \end{bmatrix}\right| = 1$

_____ (35) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 0$

_____ (36) ถ้า $|AB| = 0$ แล้ว

$|A| = 0$ หรือ $|B| = 0$

_____ (37) ถ้า $AB = \underline{0}$ แล้ว

$A = \underline{0}$ หรือ $B = \underline{0}$

<u>เฉลย</u> ข้อที่ถูก คือ

(3), (4), (6), (7), (10), (11), (13)

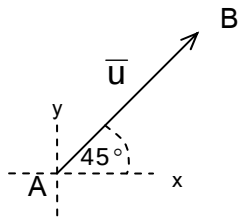
(14), (15), (16), (17), (21), (23)

(25), (26), (29), (32), (34), (36)

เวกเตอร์ (Vector)

• ปริมาณในโลกมีสองชนิด คือ *ปริมาณสเกลาร์* (Scalar Quantity) และ*ปริมาณเวกเตอร์* (Vector Quantity) โดยที่ปริมาณสเกลาร์นั้นระบุเฉพาะขนาด เช่น ระยะเวลา มวล ราคาสิ่งของ แต่ปริมาณเวกเตอร์นั้นจะระบุทั้งขนาดและทิศทาง เช่น แรง ความเร็ว ความเร่ง โมเมนตัม

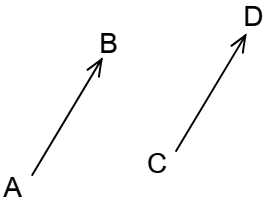
• การเขียนปริมาณเวกเตอร์จะใช้ลูกศร ให้ความยาวลูกศรแทนขนาด และหัวลูกศรแทนทิศทาง เช่น จากภาพ เวกเตอร์มี *"ขนาด"* 4 หน่วย
และมี *"ทิศทาง"* ทำมุม 45° กับแกน x ในทิศทวนเข็มนาฬิกา



• เขียนชื่อเวกเตอร์ ตามจุดเริ่มและจุดสิ้นสุดของลูกศร เช่น $\overrightarrow{AB}$ หรือใช้ตัวพิมพ์เล็ก (ที่เติมขีดด้านบน) ก็ได้ เช่น $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$

• ขนาดของเวกเตอร์ $\overline{u}$ เขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า $|\overline{u}|$

• เวกเตอร์สองอันจะเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ มีขนาดเท่ากัน และมีทิศทางเดียวกัน (ไม่จำเป็นต้องมีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเดียวกัน เช่น $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ก็ได้ ถ้ามีขนาดเท่ากันและทิศเดียวกัน ดังภาพ)

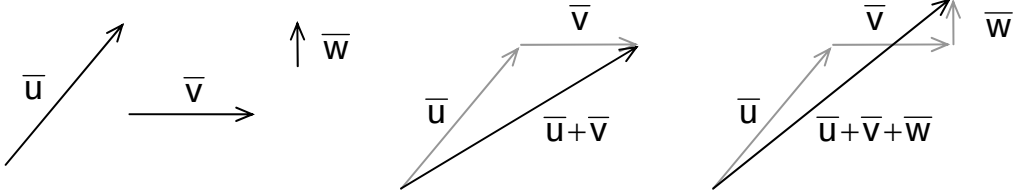


<u>การบวกและลบเวกเตอร์</u>

• เวกเตอร์บวกกัน สามารถหาผลลัพธ์ได้สองวิธี คือ หัวต่อหาง และหางต่อหาง

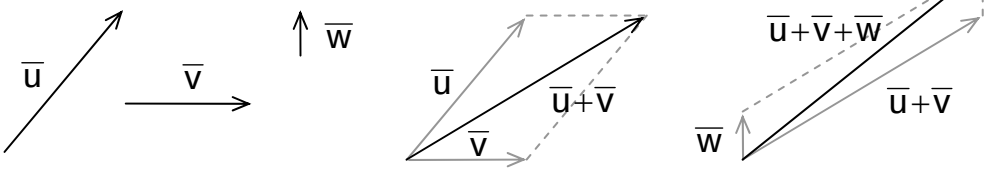
1. *หัวต่อหาง* ให้นำเวกเตอร์มาเขียนต่อกัน โดยเอาหางลูกศรใหม่มาวางต่อที่หัวลูกศรเดิม เวกเตอร์ลัพธ์ที่ได้ คือเวกเตอร์ที่ลากจากหางแรกสุด ไปถึงหัวลูกศรปลายสุด

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ในสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD



2. *หางต่อหาง* ให้นำหางเวกเตอร์ชนกัน แล้วต่อเติมรูปให้กลายเป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน เวกเตอร์ลัพธ์ที่ได้ คือเวกเตอร์ที่ลากจากหางที่ชนกัน ไปสุดแนวทแยงมุมสี่เหลี่ยมด้านขนาน

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ ในสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD



• การบวกเวกเตอร์ มีสมบัติเหมือนการบวกจำนวนจริงทุกประการ ได้แก่
สมบัติปิด, สมบัติการสลับที่, สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม, การมีเอกลักษณ์, และการมีอินเวอร์ส

$\overline{u}+\overline{v} = \overline{v}+\overline{u}$ $\qquad$ $(\overline{u}+\overline{v})+\overline{w} = \overline{u}+(\overline{v}+\overline{w})$

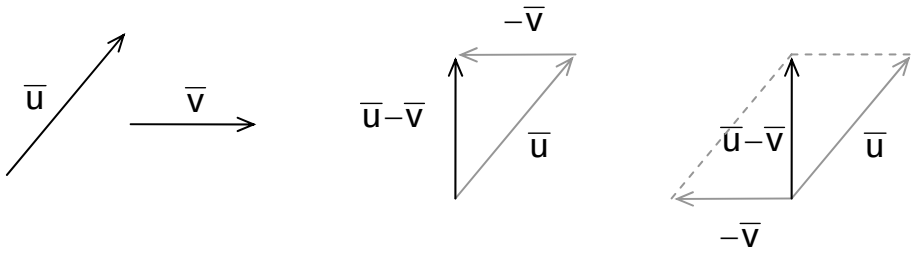
เอกลักษณ์การบวกของเวกเตอร์ คือ เวกเตอร์ศูนย์ ($\overline{0}$) เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาด 0 หน่วย

$\overline{u}+\overline{0} = \overline{u}$ $\qquad$ $\overline{u}+(-\overline{u}) = \overline{0}$

"นิเสธของ $\overline{u}$ *"* หรืออินเวอร์สการบวก เขียนสัญลักษณ์ว่า $-\overline{u}$ หมายถึง เวกเตอร์ขนาดเท่ากัน แต่ทิศตรงข้ามกับ $\overline{u}$ หรือกล่าวว่า $\boxed{-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}}$ นั่นเอง

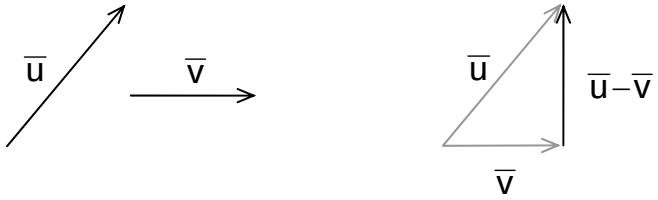
• การลบเวกเตอร์ เป็นการบวกด้วยนิเสธ $\qquad \boxed{\overline{u}-\overline{v} = \overline{u}+(-\overline{v})}$

ดังนั้นสามารถหาเวกเตอร์ลัพธ์ได้จากวิธีการบวก ทั้งสองวิธี คือหัวต่อหาง และหางต่อหาง



หรือหาได้จากวิธีหางต่อหางแบบใหม่ ให้เขียนเวกเตอร์ตัวตั้งและตัวลบแบบหางชนกัน เวกเตอร์ลัพธ์ที่ได้ จะลากจากปลายลูกศรของตัวลบ มายังปลายลูกศรของตัวตั้ง

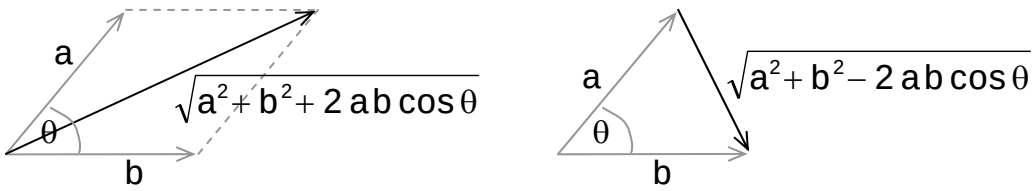
$\boxed{\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}}$ ในสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD



• ขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์ หาได้จากกฎของโคไซน์ในเรื่องตรีโกณมิติ ซึ่งสรุปได้ดังนี้
(และสามารถนำขนาดที่ได้ไปคำนวณหาทิศทาง โดยกฎของไซน์กับรูปสามเหลี่ยม)

$$\boxed{\begin{aligned}|\overline{u}+\overline{v}| &= \sqrt{|\overline{u}|^2+|\overline{v}|^2+2|\overline{u}||\overline{v}|\cos\theta}\\ |\overline{u}-\overline{v}| &= \sqrt{|\overline{u}|^2+|\overline{v}|^2-2|\overline{u}||\overline{v}|\cos\theta}\end{aligned}}$$

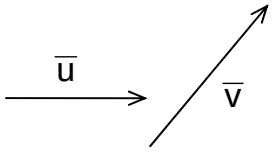
เมื่อ θ คือ มุมระหว่าง $\overline{u}$ กับ $\overline{v}$



<u>หมายเหตุ</u> มุม θ ระหว่าง $\overline{u}$ กับ $\overline{v}$ ต้องวัดระหว่างหางกับหางเสมอ
และใช้มุมที่แคบกว่าอีกด้าน (คือมีขนาดไม่เกิน $180°$)

โจทย์

(1) กำหนดเวกเตอร์ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ดังภาพ ให้วาดรูปหา $\bar{u}+\bar{v}$ และ $\bar{u}-\bar{v}$ โดยวิธีหัวต่อหาง และหางต่อหาง (สี่เหลี่ยมด้านขนาน)



(2) ให้เขียนเวกเตอร์แสดงการเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 40 กม.ต่อ ชม. ไปทางทิศตะวันออก และ 60 กม.ต่อ ชม. ไปทางทิศตะวันตกเฉียงใต้

(3) ให้เขียนเวกเตอร์ขนาด 10 หน่วย ทิศ 030°, เวกเตอร์ 12 หน่วย ทิศ 135°, และเวกเตอร์ 5 หน่วย ทิศ 330°

หมายเหตุ การบอกมุมในระบบ 3 หลัก (Three Figure System) จะให้ทิศเหนือเป็น 000 องศา และเพิ่มขึ้นในทิศตามเข็มนาฬิกา (เช่น 090 องศา แทนทิศตะวันออก, 180 องศา แทนทิศใต้)

(4) ถ้า $\bar{u}$ แทนระยะทาง 50 กม. ในทิศ 170° จะได้ว่า $-\bar{u}$ คืออะไร

(5) นาย ก ออกเดินทางไปในทิศ 030° เป็นระยะทาง 1,000 กม. แล้วเดินทางต่อในทิศ 150° เป็นระยะทาง 500 กม. จงหาว่าเขาอยู่ทางทิศใดของจุดเริ่มต้น และอยู่ห่างเท่าใด

(6) เครื่องบินบินไปทางทิศเหนือด้วยความเร็ว 240 กม.ต่อ ชม. ในบริเวณที่มีพายุพัดไปในทิศตะวันออกด้วยความเร็ว 180 กม.ต่อ ชม. ถามว่า ความเร็วจริงๆ ของเครื่องบินจะเป็นเท่าใด

(7) เครื่องบินบินด้วยความเร็ว 200 กม.ต่อ ชม. ไปในทิศ 030° ถ้ากระแสลมพัดด้วยความเร็ว 50 กม.ต่อ ชม. ไปในทิศ 330° จงหาอัตราเร็วที่แท้จริงของเครื่องบิน

(8) ชายคนหนึ่งพายเรือในน้ำนิ่งได้อัตราเร็ว 4 กม.ต่อ ชม. ถ้าเขาต้องการเดินทางไปทางทิศเหนือ ขณะที่กระแสน้ำไหลไปทางทิศตะวันออกด้วยอัตราเร็ว 3 กม.ต่อ ชม. แล้ว เขาต้องออกแรงพายเรือไปในทิศใด ด้วยอัตราเร็วเท่าใด จึงได้อัตราเร็วเท่ากับการพายปกติในน้ำนิ่ง

(9) เวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ มีขนาด 6 หน่วย ขนานแกน x โดยมีทิศทางไปในแนว $+x$ และเวกเตอร์ $\overrightarrow{AC}$ ทำมุม 60° กับเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ โดยมีขนาดเท่ากัน จงหาขนาดและทิศทางที่เป็นไปได้ของเวกเตอร์ $\bar{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ และ $\bar{v}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

(10) จงหา $|\bar{u}+\bar{v}|$ เมื่อ $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ ทำมุมกัน 0°, 90°, 180°

(11) จงหา $|\bar{u}-\bar{v}|$ เมื่อ $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ ทำมุมกัน 0°, 90°, 180°

(12) ถ้า $\bar{u}+\bar{v}+\bar{w}=\bar{0}$ และ $|\bar{u}|=2$, $|\bar{v}|=4$, $|\bar{w}|=2$ จงหา $|\bar{u}-\bar{v}|$ และ $|\bar{u}+\bar{v}|$

(13) กำหนดให้ $|\bar{u}|=1$, $|\bar{v}|=2$, $|\bar{w}|=3$, $\bar{w}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ และมีทิศเดียวกับ $\bar{u}$ จงหาค่า $|\bar{u}+\bar{v}+\bar{w}|$

(14) กำหนด $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ

ถ้า $|\bar{u}|=4$, $|\bar{v}|=3$, $|\bar{u}-\bar{v}|=\sqrt{25+12\sqrt{3}}$ จงหามุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$

(15) ถ้า $|\bar{u}|=10$, $|\bar{v}|=5$, $|\bar{u}+\bar{v}|=12$ จงหา $|\bar{u}-\bar{v}|$

(16) ถ้า $|\overline{u}| = 4$, $|\overline{v}| = 3$, $|\overline{u}+\overline{v}| = 6$ จงหา $|\overline{u}-\overline{v}|$

(17) ถ้า $|\overline{u}| = |\overline{v}|$ จงหามุมระหว่าง $\overline{u}$ กับ $\overline{v}$ ที่ทำให้ $|\overline{u}+\overline{v}| = 2|\overline{u}-\overline{v}|$

(18) ถ้า $|\overline{u}| = 4$, $|\overline{v}| = 5$, และ $\overline{u}$ ตั้งฉากกับ $\overline{v}$ จงหา $2|\overline{u}+\overline{v}|+3|\overline{u}-\overline{v}|$

(19) [Ent'37] เวกเตอร์ $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ มีสมบัติว่า $|\overline{u}| = |\overline{w}|$ และ $|\overline{u}-\overline{v}| = |\overline{v}+\overline{w}|$
ถ้ามุมระหว่าง $\overline{u}$ กับ $\overline{v}$ เป็น $\frac{\pi}{5}$ แล้ว มุมระหว่าง $\overline{v}$ กับ $\overline{w}$ เป็นเท่าใด

(20) กำหนด ABCDEF เป็นรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า มี O เป็นจุดกึ่งกลาง และ $|\overrightarrow{AO}| = 2$ ซม. เวกเตอร์ใดต่อไปนี้ยาวกว่า 4 ซม.

ก. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{FD}$ ข. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}$ ค. $\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{DO}$ ง. $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}$

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

• ผลที่ได้จากการคูณเวกเตอร์ $\overline{u}$ ด้วยสเกลาร์ a เป็นดังนี้

1. ถ้า $a = 0$ จะได้ $a\overline{u} = \overline{0}$

2. ถ้า $a > 0$ จะได้ $a\overline{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีทิศเดียวกันกับ $\overline{u}$ แต่มีขนาดเป็น $|a| \cdot |\overline{u}|$

3. ถ้า $a < 0$ จะได้ $a\overline{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีทิศตรงข้ามกับ $\overline{u}$ และมีขนาดเป็น $|a| \cdot |\overline{u}|$

หมายเหตุ การคูณด้วยสเกลาร์ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม และการแจกแจง เช่นเดียวกับจำนวนจริง นั่นคือ $a(b\overline{u}) = (ab)\overline{u}$, $(a+b)\overline{u} = a\overline{u}+b\overline{u}$, และ $a(\overline{u}+\overline{v}) = a\overline{u}+a\overline{v}$

• ความสัมพันธ์ของ "การคูณด้วยสเกลาร์" และ "การขนานกันของเวกเตอร์"
เมื่อ $\overline{u} \neq \overline{0}$ และ $\overline{v} \neq \overline{0}$ จะได้ทฎษฎีว่า

1. $\overline{u}$ จะขนานกับ $\overline{v}$ ก็ต่อเมื่อ มีค่า $\boxed{a \neq 0}$ ที่ทำให้ $\overline{u} = a\overline{v}$

2. ถ้า $\overline{u}$ ไม่ขนานกับ $\overline{v}$, หาก $a\overline{u}+b\overline{v} = \overline{0}$ แสดงว่า $\boxed{a = 0}$ และ $\boxed{b = 0}$

โจทย์

(21) กำหนดให้ $\overline{u}+4\overline{v} = 3\overline{v}-2\overline{w}$ และ $3\overline{v}-4\overline{w} = 2\overline{w}+5\overline{u}$
ถ้า $|\overline{w}| = 12$ จงหาค่า $|\overline{u}|+|\overline{v}|+|\overline{w}|$

(22) $\overline{u} = 2\overline{v}-\overline{w}$ โดยที่ $|\overline{v}| = |\overline{w}| = 1$ และมุมระหว่าง $\overline{v}$ กับ $\overline{w}$ เป็น $120°$
จงหามุม θ ระหว่าง $\overline{u}$ กับ $\overline{v}$

(23) กำหนดให้ $\overline{u} \neq \overline{0}$, $\overline{v} \neq \overline{0}$ และ $\overline{u}$ ขนานกับ $\overline{v}$
จงหาค่า x ที่ทำให้ $(x^2+6x-2)\overline{u}-\overline{v} = (x-2x^2)\overline{u}+x\overline{v}$

(24) กำหนดให้ $\overline{u} \neq \overline{0}$, $\overline{v} \neq \overline{0}$ และ $(x^2-5)\overline{u}-\overline{v} = (1-x)\overline{u}-3\overline{v}$ แล้ว
$\overline{u}$ จะขนานกับ $\overline{v}$ เมื่อ x มีค่าเท่าใด

(25) กำหนดให้ $\overline{u} \neq \overline{0}$, $\overline{v} \neq \overline{0}$ และ $(x^2-5)\overline{u} - \overline{v} = (1-x)\overline{u} - 3\overline{v}$ แล้ว $\overline{u}$ กับ $\overline{v}$ จะมีทิศทางเดียวกัน เมื่อ x มีค่าเท่าใด

(26) $\overline{u}$ กับ $\overline{v}$ มีทิศทางเดียวกัน ถ้า $\frac{2}{5}\overline{u} + (6-3x^2)\overline{v} = 100\overline{u} + \frac{2}{3}\overline{v}$ จงหาค่า x

(27) กำหนดให้ $\overline{u} \neq \overline{0}$, $\overline{v} \neq \overline{0}$ และ $\overline{u}$ ไม่ขนานกับ $\overline{v}$ จงหาค่า x และ y ที่สอดคล้องกับสมการ $x\overline{u} + (x-8)\overline{v} = (2+2y)\overline{u} - y\overline{v}$

(28) $\overline{u} \neq \overline{0}$, $\overline{v} \neq \overline{0}$ และ $\overline{u}$ กับ $\overline{v}$ ไม่ขนานกัน ถ้า $3\overline{u} + 8\overline{v} = a(3\overline{u} + \overline{v}) + b(\overline{u} - 2\overline{v})$ จงหาค่า a และ b

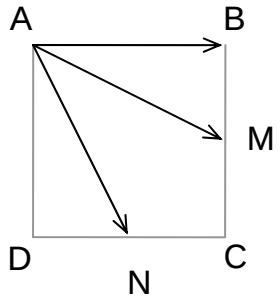
(29) ถ้า $\overline{u}$ ไม่ขนานกับ $\overline{v}$ และ $\overline{w} = (a+4b)\overline{u} + (2a+b+1)\overline{v}$, $\overline{s} = (b-2a+2)\overline{u} + (2a-3b-1)\overline{v}$ จงหาค่า a กับ b ที่ทำให้ $3\overline{w} = 2\overline{s}$

เวกเตอร์กับเรขาคณิต

- เราสามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ พิสูจน์ส่วนประกอบของรูปเรขาคณิตหลายเหลี่ยมได้ รวมทั้งแก้โจทย์ปัญหาประเภท “เขียนเวกเตอร์ที่กำหนด ในรูปผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์อื่น”

ตัวอย่าง [Ent'35] สี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD มีจุด M และ N อยู่ที่กึ่งกลางด้าน BC และ CD ตามลำดับ จงหา $\overrightarrow{AB}$ ในเทอมของ $\overrightarrow{AM}$ กับ $\overrightarrow{AN}$

วิธีคิด วาดภาพตามโจทย์ได้ดังรูป



- เริ่มต้น เขียน $\overrightarrow{AB}$ ในเทอมของเวกเตอร์ใดๆ ก่อน เช่น $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$ _____ (1)

จากนั้นพยายามเปลี่ยน $\overrightarrow{MB}$ ให้เป็น $\overrightarrow{AM}$ หรือ $\overrightarrow{AN}$ ให้ได้

- จากรูป เราเชื่อม $\overrightarrow{MB}$ กับ $\overrightarrow{AN}$ ได้ดังนี้

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CB}$$
$$= \overrightarrow{AN} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{MB}$$

หรือจัดรูปสมการได้ว่า $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$ _____ (2)

เมื่อแทนค่าจากสมการ (2) ลงใน (1) ก็จะได้คำตอบ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + (\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AN})$

$$= \frac{4}{3}\overrightarrow{AM} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AN}$$ ตอบ

- เทคนิคที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาแบบนี้ คือ .. (ดูตัวอย่างประกอบ)

1. เขียนเวกเตอร์ที่กำหนด ในรูปผลรวมของเวกเตอร์อื่น แบบใดก็ได้ก่อน
2. พยายามเปลี่ยนเวกเตอร์ที่ไม่ต้องการ เป็นผลรวมของเวกเตอร์ที่ต้องการ ไปทีละขั้นๆ
3. เมื่อเหลือเพียงเวกเตอร์ที่ต้องการแล้ว ก็จัดเป็นรูปอย่างง่าย แล้วจึงตอบ
4. บางครั้งเราต้องอาศัยสมการเวกเตอร์อื่น เพื่อช่วยแปลงให้เป็นเวกเตอร์ที่ต้องการ

โจทย์

(30) สี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD มีจุด P เป็นจุดที่เส้นทแยงมุมตัดกัน จุด Q อยู่บนด้าน AB โดย $AQ : QB = 3 : 5$ ถ้า $\overrightarrow{AB} = \bar{u}$ และ $\overrightarrow{AD} = \bar{v}$ จงหา $\overrightarrow{PQ}$ ในเทอมของ $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$

(31) จากภาพ $\left|\overrightarrow{EF}\right| : \left|\overrightarrow{FB}\right| = 2 : 1$ จงหา $\overrightarrow{AF}$ ในรูปผลรวมของ $\bar{a}$ กับ $\bar{b}$

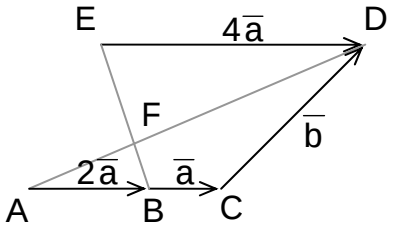


Fig. (31)

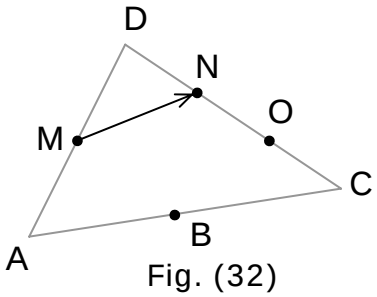


Fig. (32)

(32) จากภาพ จุด B แบ่งครึ่งด้าน $\overline{AC}$, จุด M แบ่งครึ่งด้าน $\overline{AD}$, และจุด N กับ O แบ่งด้าน $\overline{DC}$ ออกเป็นสามส่วนเท่าๆ กัน ถ้า $\overrightarrow{AB} = \bar{a}$ และ $\overrightarrow{BD} = \bar{a} + \bar{b}$ จงหา $\overrightarrow{MN}$ ในรูปของ $\bar{a}$ กับ $\bar{b}$

(33) สามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ ให้ $\overrightarrow{AB} = \bar{a}$ และ $\overrightarrow{AC} = \bar{b}$ ถ้า $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CF}$ คือมัธยฐานของสามเหลี่ยม ตัดกันที่จุด O จงเขียน $\overrightarrow{DO}$ ในรูปของ $\bar{a}$ กับ $\bar{b}$

(34) สี่เหลี่ยม ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน จุด E อยู่บน $\overline{CB}$ โดย $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$, จุด F เป็นจุดตัดของ $\overrightarrow{AC}$ กับ $\overrightarrow{DE}$, หาก $\overrightarrow{EF} = a\,\overrightarrow{ED}$ และ $\overrightarrow{CF} = b\,\overrightarrow{CA}$ จงหาค่า a กับ b

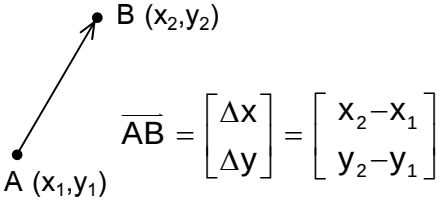
(35) ให้ D เป็นจุดแบ่งด้าน AC ของสามเหลี่ยม ABC โดยที่ $\left|\overrightarrow{AD}\right| : \left|\overrightarrow{DC}\right| = m : n$ จงหา $\overrightarrow{BD}$ ในเทอมของ $\overrightarrow{BA}$ กับ $\overrightarrow{BC}$

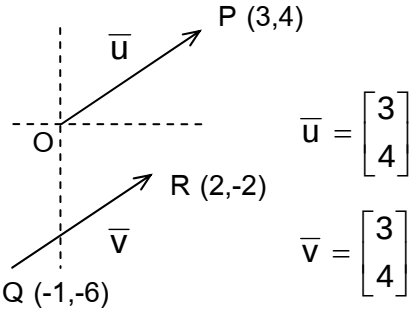
(36) สามเหลี่ยม ABC มีจุด D กับ E เป็นจุดกึ่งกลางด้าน $\overline{AB}$ กับ $\overline{AC}$ ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า (36.1) $\overrightarrow{DE}$ ขนานกับ $\overrightarrow{BC}$ (36.2) $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

(37) ในสี่เหลี่ยมคางหมูรูปหนึ่ง จงพิสูจน์ว่า ส่วนของเส้นตรงที่ลากเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านที่ไม่ขนานกันนั้น จะขนานกับฐาน และยาวเป็นครึ่งหนึ่งของผลบวกด้านคู่ขนาน

<u>เวกเตอร์ในระบบแกนพิกัดฉาก</u>

- เวกเตอร์ที่กล่าวถึงที่ผ่านมาทั้งหมด เป็นการมองในพิกัดเชิงขั้ว (Polar Coordinate หรือ $r-\theta$) คืออ้างถึงเวกเตอร์ใดๆ ด้วยค่า ขนาด (ความยาว) และทิศทาง (มุมที่วัดทวนเข็มนาฬิกาจากแกน +x) แต่นอกจากนั้นเรายังสามารถอ้างถึงเวกเตอร์เหล่านี้ในพิกัดฉาก (Cartesian Coordinate หรือ $x-y$) ได้ ด้วยค่าทิศทางในแนวนอน (Δx) และแนวตั้ง (Δy) ดังภาพ





- ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดเชิงขั้ว กับพิกัดฉาก

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta x &= r\cos\theta\\ \Delta y &= r\sin\theta\end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} r &= \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\\ \tan\theta &= (\Delta y/\Delta x) = \text{slope}\end{aligned}}$$

- เวกเตอร์สองอันจะเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ Δx เท่ากัน และ Δy เท่ากัน เช่น ในภาพ $\overline{u} = \overline{v}$
- เวกเตอร์สองอันจะขนานกัน ($\overline{u} \,//\, \overline{v}$) ก็ต่อเมื่อความชันเท่ากัน

(มีทั้งแบบทิศเดียวกัน และทิศตรงข้ามกัน)

และเวกเตอร์สองอันจะตั้งฉากกัน ($\overline{u} \perp \overline{v}$) ก็ต่อเมื่อความชันคูณกันได้ -1

- การบวกลบเวกเตอร์ และการคูณด้วยสเกลาร์ จะได้ผลเช่นเดียวกับเมตริกซ์ นั่นคือ

$$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a+c\\b+d\end{bmatrix} \qquad k\cdot\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ka\\kb\end{bmatrix}$$

<u>หมายเหตุ</u> บางตำราใช้ $[a,b]$ แทน $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$

<u>โจทย์</u>

(38) จงเขียน $\overrightarrow{PQ}$ ให้อยู่ในระบบแกนฉาก เมื่อกำหนดจุดดังนี้

(38.1) $P(2,4), Q(3,7)$ (38.2) $P(-2,3), Q(4,-5)$

(39) ถ้า $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}$ ให้หา

(39.1) จุดเริ่มต้น เมื่อสิ้นสุดที่ $Q(-2,-5)$

(39.2) จุดสิ้นสุด เมื่อเริ่มต้นที่ $P(4,-6)$

(40) คู่อันดับ $A(3,-4), B(6,3), C(7,-1)$ จงหาเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$ พร้อมขนาด

(41) $\overline{u} = \begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}, \overline{v} = \begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}, \overline{w} = \begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}$ จงหา $\left|2\overline{u} - 3\overline{v} + \overline{w}\right|$ และ $\left|2\overline{u}\right| - \left|3\overline{v}\right| + \left|\overline{w}\right|$

(42) เวกเตอร์ในแต่ละข้อ ขนานกันหรือไม่ ถ้าขนานให้บอกว่ามีทิศเดียวกันหรือตรงข้ามกัน

(42.1) $\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}$ กับ $\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}$ (42.2) $\begin{bmatrix}-4\\0\end{bmatrix}$ กับ $\begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix}$

(42.3) $\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$ กับ $\begin{bmatrix}-3\\0\end{bmatrix}$ (42.4) $\begin{bmatrix}7\\-14\end{bmatrix}$ กับ $\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$

(43) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\bar{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ จงเขียน $\bar{w}$ ในรูปของ $a\bar{u} + b\bar{v}$

(44) ให้เขียนเวกเตอร์ $\bar{w} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$ ในรูปผลรวมเชิงเส้นของ $\bar{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

(45) สี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD มี $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ จงหาผลบวกของกำลังสองของความยาวเส้นทแยงมุมทั้งสองเส้น

<u>เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit Vector)</u>

- เวกเตอร์หนึ่งหน่วยก็คือเวกเตอร์ที่มีขนาดเป็น 1

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่สำคัญในระบบพิกัดฉาก มีอยู่ 2 ตัว ได้แก่ $\bar{i}$ กับ $\bar{j}$
โดย $\bar{i}$ แทนเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง +x และ $\bar{j}$ แทนเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง +y
นั่นคือ $\bar{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\bar{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

- จากนี้ เราสามารถเขียนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ใดๆ ในรูป "ผลรวมเชิงเส้นของ $\bar{i}$ กับ $\bar{j}$" ได้เสมอ

หรือ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\bar{i} + b\bar{j}$ นั่นเอง ซึ่งการเขียนในรูปแบบ $a\bar{i} + b\bar{j}$ นั้นก็เป็นที่นิยมกว่า $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

- ส่วนเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของ $\overrightarrow{AB}$ ใดๆ (ที่ไม่ใช่ $\bar{0}$) สามารถสร้างได้จากการนำขนาดของ $\overrightarrow{AB}$ มาหาร (เพื่อทำให้ขนาดเหลือเพียง 1 หน่วย) เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$

<u>โจทย์</u>

(46) กำหนดให้ $\bar{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\bar{w} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ในรูป $\bar{i}$ กับ $\bar{j}$

(46.1) $\bar{u}$ (46.2) $\bar{v}$ (46.3) $\bar{w}$

(46.4) $\bar{u} + \bar{v}$ (46.5) $2\bar{u} - \bar{w}$

(47) กำหนดคู่อันดับ $A(-1,2)$, $B(-4,-2)$, $C(-3,4)$, $D(2,-16/3)$ จงหา

(47.1) $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CD}$ ในรูป $\bar{i}$ กับ $\bar{j}$ (47.2) $\left|2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CD}\right|$

(48) กำหนดให้ $\bar{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \end{bmatrix}$ จงหา

(48.1) เวกเตอร์หนึ่งหน่วย ที่มีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$

(48.2) เวกเตอร์หนึ่งหน่วย ที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{v}$

(48.3) เวกเตอร์ขนาด 3 หน่วย ที่มีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}+\bar{v}$

(48.4) เวกเตอร์ขนาดเท่ากับ $\left|\bar{u}-\bar{v}\right|$ และมีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}+\bar{v}$

(49) ถ้า $\bar{u} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$ ขนานกับ $\overline{PQ}$ ซึ่งมีขนาด 15 หน่วย, จุด P คือ $(2,4)$ จงหาจุด Q

(50) กำหนดจุด $P(c, d)$ และ $Q(c+a, d+b)$ จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยทิศตรงข้ามกับ $\overrightarrow{PQ}$

(51) จงหาเวกเตอร์ขนาด $3\sqrt{2}$ หน่วย ทำมุม $45°$ กับ $\bar{j}$ และตั้งฉากกับ $-\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}$

การคูณเวกเตอร์

• การคูณเวกเตอร์คู่หนึ่ง จะเกิดผลลัพธ์ได้ 2 แบบ คือ หนึ่ง *การคูณแบบดอท* (Dot Product) $\boxed{\bar{u} \cdot \bar{v}}$ ให้ผลลัพธ์เป็นสเกลาร์ (ตัวเลข) อาจเรียกว่าผลคูณเชิงสเกลาร์ (Scalar Product) และสอง *การคูณแบบครอส* (Cross Product) $\boxed{\bar{u} \times \bar{v}}$ ยังคงให้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์ อาจเรียกว่าผลคูณเชิงเวกเตอร์ (Vector Product) ซึ่งในที่นี้เราจะศึกษาเฉพาะการคูณแบบแรก (ดอท) เท่านั้น

นิยาม $\boxed{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = (a\bar{i}+b\bar{j}) \cdot (c\bar{i}+d\bar{j}) = ac+bd}$ เป็นการคูณแบบดอท ในพิกัดฉาก

นอกจากนั้น ยังมีสมบัติเพิ่มเติม เมื่อมองในพิกัดเชิงขั้ว ว่า $\boxed{\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta}$

เราสามารถใช้สมการทั้งสองร่วมกัน ในการคำนวณเกี่ยวกับมุม θ ระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ ได้

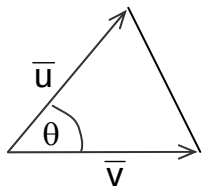
ข้อสังเกต การหาขนาดผลรวมเวกเตอร์ด้วยกฎของโคไซน์ อาจเขียนใหม่ได้ว่า

$$|\bar{u}+\bar{v}| = \sqrt{|\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 + 2(\bar{u} \cdot \bar{v})}$$
$$|\bar{u}-\bar{v}| = \sqrt{|\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 - 2(\bar{u} \cdot \bar{v})}$$

เมื่อ θ คือ มุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$

สมบัติของการคูณเวกเตอร์แบบดอท

- $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$
- $\bar{u} \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{w}$
- $a(\bar{u} \cdot \bar{v}) = a\bar{u} \cdot \bar{v}$
- $\bar{u} \cdot \bar{u} = |\bar{u}|^2$
- $\bar{0} \cdot \bar{u} = 0$
- $\boxed{\bar{u} \cdot \bar{v} = 0 \leftrightarrow \bar{u} \perp \bar{v}}$



• สูตรในการหาพื้นที่สามเหลี่ยม
เมื่อมีด้านประกอบเป็นเวกเตอร์ $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$
และมุมระหว่างเวกเตอร์เป็น θ คือ $\boxed{\frac{1}{2}|\bar{u}||\bar{v}|\sin\theta}$

โจทย์

(52) จงหา $\bar{u} \cdot \bar{v}$ เมื่อ

(52.1) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ (52.2) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -10 \end{bmatrix}, \bar{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

(52.3) $\bar{u} = 3\bar{i}-5\bar{j}$, $\bar{v} = -4\bar{i}+2\bar{j}$ (52.4) $\bar{u} = \frac{3}{4}\bar{i}-\frac{4}{5}\bar{j}$, $\bar{v} = 2\bar{i}-5\bar{j}$

(53) กำหนดคู่อันดับ $A(3,-2), B(-3,5), C(2,4)$ จงหา

(53.1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ (53.2) $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC})$

(54) จงหามุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ เมื่อกำหนด

(54.1) $\bar{u} = 2\bar{i}-2\sqrt{3}\bar{j}$, $\bar{v} = \sqrt{3}\bar{i}+\bar{j}$

(54.2) $\bar{u} = 2\sqrt{3}\bar{i}+2\bar{j}$, $\bar{v} = -3\sqrt{3}\bar{i}+3\bar{j}$

(54.3) $\bar{u} = 2\bar{i}+3\bar{j}$, $\bar{v} = -3\bar{i}+2\bar{j}$

(55) จงแสดงว่าสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยอาศัยการคูณเวกเตอร์ เมื่อกำหนดคู่อันดับดังนี้ $A(2,2), B(6,4), C(10,-14)$ และให้บอกว่ามุมใดเป็นมุมฉาก

(56) $\bar{u} = -\bar{i}+\bar{j}$ และ $\bar{v} = 2\bar{i}+x\bar{j}$ ถ้ามุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ เป็น 135° จงหาค่าของ x

(57) ถ้า $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ ทำมุมกัน 60° และ $|\bar{u}| = 2$, $|\bar{v}| = 3$ จงหามุมระหว่าง $\bar{v}-\bar{u}$ กับ $\bar{u}$

(58) $\bar{u} = 3\bar{i}-4\bar{j}$ และ $\bar{u}(\bar{u}-\bar{v}) = 24$ จงหา $|\bar{v}|\cos\theta$ เมื่อ θ คือ มุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$

(59) $\overrightarrow{OP} = 3\bar{i}-4\bar{j}$, $\overrightarrow{OQ} = 12\bar{i}+5\bar{j}$ ลากเวกเตอร์ $\overrightarrow{QR}$ ตั้งฉาก $\overrightarrow{OP}$ ที่จุด R จงหา $\overrightarrow{OR}$

(60) กำหนดให้ $A(1,1), B(-1,-2), C(7,3), D(6,5)$ เป็นจุดยอดของสี่เหลี่ยม $ABCD$ ให้หาขนาดของมุมแหลม ที่เกิดจากเส้นทแยงมุมตัดกัน

(61) จงหาพื้นที่สามเหลี่ยมตามที่กำหนด

(61.1) สามเหลี่ยม OAB เมื่อ $\overrightarrow{OA} = 3\bar{i}+5\bar{j}$, $\overrightarrow{OB} = 8\bar{i}+2\bar{j}$

(61.2) สามเหลี่ยมมุมฉาก ABC เมื่อ $\overrightarrow{AB} = 2\bar{i}+2\bar{j}$, $\overrightarrow{AC} = -3\bar{i}+3\bar{j}$

(61.3) สามเหลี่ยมที่มี $\bar{u}+\bar{v}$ กับ $\bar{u}-\bar{v}$ เป็นด้านสองด้าน เมื่อ $\bar{u} = 2\bar{i}-\bar{j}$, $\bar{v} = \bar{i}+\bar{j}$

(62) $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน มีพื้นที่ 24 ตารางหน่วย และ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 3$ จงหาค่า $\tan(D\hat{A}B)$ เมื่อ $\hat{A}$ เป็นมุมแหลม

(63) [Ent'36] $\bar{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ถ้า $\bar{u} \cdot \bar{w} = -11$ และ $\bar{v} \cdot \bar{w} = 8$ จงหา $|\bar{w}-\bar{v}|$

(64) กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม ที่มี $\overrightarrow{AB} = \bar{u}$, $\overrightarrow{BC} = \bar{v}$, $\overrightarrow{CA} = \bar{w}$ โดย $|\bar{u}| = 7$, $|\bar{w}| = 15$ และ $\bar{u} \cdot \bar{v} = 28$ จงหาค่า $\bar{w}(\bar{v} - 2\bar{u})$

(65) ให้นิยาม $\bar{u} * \bar{v} = (ac + bd)\bar{i} - (bc - ad)\bar{j}$ เมื่อ $\bar{u} = a\bar{i}+b\bar{j}$, $\bar{v} = c\bar{i}+d\bar{j}$ ถ้า $\bar{a} = 3\bar{i}-4\bar{j}$, $\bar{b} = 2\bar{i}-3\bar{j}$, $\bar{c} = 3\bar{i}+2\bar{j}$ จงหา $\left|\bar{a} \cdot (\bar{b} * \bar{c})\right|$

(66) ถ้า $\bar{u}+\bar{v}+\bar{w} = \bar{0}$, $|\bar{u}| = 2$, $|\bar{v}| = 3$, $|\bar{w}| = 4$ จงหา $\bar{u} \cdot \bar{v}$

(67) $\bar{a} = x\bar{i}+y\bar{j}$, $\bar{b} = 4\bar{i}-3\bar{j}$, $\bar{c} = -5\bar{i}+5\bar{j}$ ถ้า $\bar{a} \perp \bar{b}$ และ $|\bar{a}| = 3$, $\bar{a} \cdot \bar{c} > 0$ จงหาค่า $x + y$

(68) $\bar{u} = 3\bar{i}-4\bar{j}$, $\bar{v} = 2\bar{i}-3\bar{j}$ ถ้า $\bar{a}$ เป็น unit vector ที่ตั้งฉากกับ $\bar{u}$ จงหาค่า $\bar{v}\cdot\bar{a}$

(69) เวกเตอร์ใดประกอบกันเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ก. $3\bar{i}+2\bar{j}$, $\bar{i}+5\bar{j}$, $2\bar{i}+3\bar{j}$ ข. $3\bar{i}-2\bar{j}$, $\bar{i}-5\bar{j}$, $2\bar{i}+3\bar{j}$

ค. $3\bar{i}-2\bar{j}$, $-\bar{i}-5\bar{j}$, $2\bar{i}+3\bar{j}$ ง. $3\bar{i}-2\bar{j}$, $2\bar{i}+3\bar{j}$, $-3\bar{i}+2\bar{j}$

(70) ข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

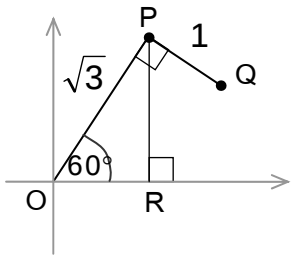
ก. ถ้า $\cos^2\theta = 1$ โดย θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ แล้ว $\bar{u}\ //\ \bar{v}$

ข. $2\bar{i}+\bar{j}$ ตั้งฉากกับ $-\frac{6}{\sqrt{5}}\bar{i}+\frac{12}{\sqrt{5}}\bar{j}$

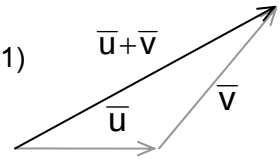
ค. $(\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}+\bar{v}) = \bar{u}\cdot\bar{u}+2\,\bar{u}\cdot\bar{v}+\bar{v}\cdot\bar{v}$

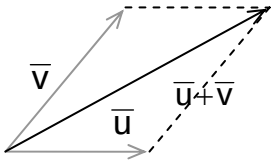
ง. ถ้า $\bar{u} = 3\bar{i}-4\bar{j}$, $\bar{v} = 2\bar{i}+\bar{j}$ แล้วมุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ เป็น $\arccos(2/5\sqrt{5})$

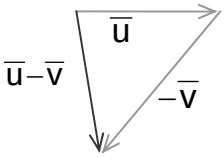
(71) จากภาพ จงหา $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{RQ}$

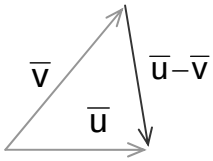


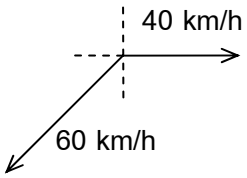
<u>เฉลย</u>

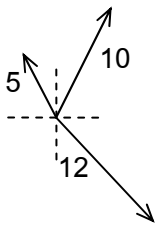
(1) 







(2) 

(3) 

(4) ระยะทาง 50 กม. ทิศ $350°$ (5) ทิศ $060°$ ระยะทาง $500\sqrt{3}$ กม. (6) 300 กม.ต่อ ชม. ในทิศ $037°$ โดยประมาณ (7) $50\sqrt{21}$ กม.ต่อ ชม. (8) ทิศ $323°$ โดยประมาณ ด้วยอัตราเร็ว 5 กม.ต่อ ชม. (9) $\bar{u}$ มีขนาด $6\sqrt{3}$ หน่วย ทิศ $60°$ หรือ $120°$ และ $\bar{v}$ มีขนาด 6 หน่วย ทิศ $30°$ หรือ $150°$ (10) $|\bar{u}|+|\bar{v}|$, $\sqrt{|\bar{u}|^2+|\bar{v}|^2}$, และ $\big||\bar{u}|-|\bar{v}|\big|$ (11) $\big||\bar{u}|-|\bar{v}|\big|$, $\sqrt{|\bar{u}|^2+|\bar{v}|^2}$, และ $|\bar{u}|+|\bar{v}|$ (12) 6, 2 (13) $\sqrt{20}$ (14) $150°$ (15) $\sqrt{106}$ (16) $\sqrt{14}$ (17) $\arccos(3/5)$ (18) $5\sqrt{41}$ (19) $4\pi/5$ (20) ก. เพราะ $\overline{AD}$ ยาว 4 ซม. (21) $18+6+12 = 36$ (22) $\arcsin(\sqrt{3}/2\sqrt{7})$ (23) $x \neq -1, -2, 1/3$ (24) $x \neq -3, 2$ (25) $-3 < x < 2$ (26) $-4/3 < x < 4/3$

(27) $x = 6$ และ $y = 2$ (28) $a = 2$ และ $b = -3$ (29) $a = 2$ และ $b = -1$ (30) $-\frac{1}{8}\bar{u} - \frac{1}{2}\bar{v}$ (31) $\bar{a} + \frac{1}{3}\bar{b}$ (32) $\bar{a} + \frac{1}{6}\bar{b}$ (33) $-\frac{1}{6}(\bar{a}+\bar{b})$ (34) $a = b = 1/4$ (ใช้เทคนิค Δ คล้าย ADF กับ CEF) (35) $\frac{n\overrightarrow{BA} + m\overrightarrow{BC}}{n+m}$ (36) ... (37) ... (38) $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}6\\-8\end{bmatrix}$ (39) $P(1,-7)$, $Q(1,-4)$ (40) $\begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix} \to \sqrt{58}$, $\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} \to 5$, $\begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix} \to \sqrt{17}$ (41) $\sqrt{13}$, $15 - 6\sqrt{2}$ (42.1) ขนานกัน ทิศตรงข้าม (42.2) ขนานกัน ทิศเดียวกัน (42.3) ไม่ขนานกัน (42.4) ขนานกัน ทิศเดียวกัน (43) $\frac{3}{11}\bar{u} - \frac{10}{11}\bar{v}$ (44) $\bar{w} = \bar{u} + 2\bar{v}$ (45) $50+26 = 76$ (46.1) $3\bar{i}-2\bar{j}$ (46.2) $-4\bar{i}+\bar{j}$ (46.3) $5\bar{i}-3\bar{j}$ (46.4) $-\bar{i}-\bar{j}$ (46.5) $\bar{i}-\bar{j}$ (47.1) $-21\bar{i}+20\bar{j}$ (47.2) $\sqrt{21^2 + 20^2}$ (48.1) $\frac{3}{5}\bar{i} - \frac{4}{5}\bar{j}$ (48.2) $\frac{1}{\sqrt{17}}(\bar{i}-4\bar{j})$ (48.3) $\frac{3}{\sqrt{17}}(\bar{i}+4\bar{j})$ (48.4) $\frac{13}{\sqrt{17}}(\bar{i}+4\bar{j})$ (49) $(11,16)$ หรือ $(-7,-8)$ (50) $\frac{-a\bar{i} - b\bar{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (51) $3\bar{i}+3\bar{j}$ (52) 18, -28, -22, $-5/2$ (53) -37, 11 (54) $30°$, $60°$, $90°$ (55) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \bar{0}$ และมุม A เป็นมุมฉาก (56) 0 (57) $\arccos(-1/2\sqrt{7})$ (58) $1/5$ (59) $\frac{16}{25}(3\bar{i}-4\bar{j})$ (60) $\arccos(2/\sqrt{5})$ (61.1) 17 ตารางหน่วย (61.2) 6 ตารางหน่วย (61.3) 3 ตารางหน่วย (62) 8 (63) $\sqrt{2}$ (64) 6 (65) 52 (66) $3/2$ (67) $9/5 + 12/5 = 21/5$ (68) $\pm\frac{1}{5}$ (69) ข. (70) ถูกทุกข้อ (71) $\frac{1}{4}$

จำนวนเชิงซ้อน (Complex Number)

• ระบบจำนวนที่ศึกษาเป็นส่วนมาก คือระบบ *จำนวนจริง* (Real Number; $\mathbb{R}$) แต่เราพบว่าสมการบางอย่างไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนจริง เช่น $x^2+4=0$ หรือ $x^2+x+2=0$ ฯลฯ จึงได้มีการสมมติค่าจำนวนแบบใหม่ขึ้นมาใช้เพิ่มเติม เพื่อให้ทุกปัญหามีคำตอบเสมอ จำนวนแบบใหม่นี้เรียกว่า *จำนวนจินตภาพ* (Imaginary Number; Im) อยู่ในรูป bi โดย $b \in \mathbb{R}$ และนิยามให้ $\boxed{i=\sqrt{-1}}$ เช่น สมการ $x^2+4=0$ จะได้ $x=\pm\sqrt{-4}$ นั่นคือ $x=2i,-2i$
สมการ $x^2+x+2=0$ ใช้สูตรหาคำตอบจะได้ $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{-7}}{2}$ นั่นคือ $x=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}i$

• ระบบจำนวนที่ใหญ่ที่สุด ซึ่งประกอบด้วยส่วนจริงและส่วนจินตภาพ ในรูป $a+bi$ (โดย $a,b\in\mathbb{R}$) เรียกว่า *จำนวนเชิงซ้อน* (Complex Number; $\mathbb{C}$) มี a เป็นส่วนจริง (Real Part) และ b เป็นส่วนจินตภาพ (Imaginary Part) และมักแทนตัวแปรที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนด้วย z

<u>หมายเหตุ</u> **1.** จาก $z=a+bi$ บางทีเขียนว่า $a=\mathrm{Re}(z)$ และ $b=\mathrm{Im}(z)$ ก็ได้
2. สามารถใช้คู่อันดับ (a,b) แทนจำนวนเชิงซ้อน $z=a+bi$ ได้ และทำให้แผนภาพเปลี่ยนจากเส้นจำนวนในแกนนอน 1 มิติ กลายเป็นระนาบ 2 มิติ (คือมี*แกน*จริง; Real Axis กับ*แกน*จินตภาพ; Imaginary Axis) เรียกว่า *ระนาบเชิงซ้อน* (Complex Plane)
3. บางตำราใช้ $j=\sqrt{-1}$ แทน i เพื่อป้องกันการสับสนกับตัวแปรอื่น เช่น กระแสไฟฟ้า
4. ข้อสังเกต ... $i^2=-1$ ... $i^3=-i$ ... $i^4=1$
$i^5=i$ ... $i^6=-1$ ... $i^7=-i$ ... $i^8=1$ ... กำลังของ i มี 4 แบบหมุนเปลี่ยนกัน

• <u>นิยาม</u> ในการคำนวณเราปฏิบัติเหมือนกับ i เป็นตัวแปรหนึ่ง (ซึ่ง $i^2=-1$) เพียงเท่านั้น

1. การเท่ากัน $a+bi=c+di$ ก็ต่อเมื่อ $a=c$ และ $b=d$
หรือเขียนเป็นคู่อันดับ $(a,b)=(c,d)$ ก็ต่อเมื่อ $a=c$ และ $b=d$

2. การบวก $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$
หรือเขียนเป็นคู่อันดับ $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

3. การคูณ $(a+bi)\times(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$
หรือเขียนเป็นคู่อันดับ $(a,b)\times(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$

• สมบัติของจำนวนเชิงซ้อน เหมือนกับสมบัติของจำนวนจริงทุกประการ (เพราะจำนวนจริงก็คือจำนวนเชิงซ้อนประเภทหนึ่ง) นั่นคือ มีสมบัติปิด, การสลับที่การบวกและคูณ, การเปลี่ยนกลุ่มการบวกและคูณ, การแจกแจง, และการมีเอกลักษณ์กับอินเวอร์ส โดยเอกลักษณ์การบวกก็คือ 0 หรือ $0+0i$ หรือ $(0,0)$ และเอกลักษณ์การคูณคือ 1 หรือ $1+0i$ หรือ $(1,0)$ เช่นเดียวกับในระบบจำนวนจริง

• ดังนั้น อินเวอร์สการบวกของ $z = a + bi$ ก็คือ $-z = -a - bi$

และอินเวอร์สการคูณของ $z = a + bi$ คือ $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi}$ ซึ่งสามารถทำให้อยู่ในรูปปกติ ได้โดยนำ $a - bi$ คูณทั้งเศษและส่วน จะได้ $\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) - \left(\frac{b}{a^2+b^2}\right)i$

และมีทฎษฎีบทว่า $(z_1 z_2)^{-1} = z_1^{-1} z_2^{-1}$ และ $(z^n)^{-1} = (z^{-1})^n = z^{-n}$

• <u>หมายเหตุ</u> ในระบบจำนวนเชิงซ้อนจะไม่มีการเปรียบเทียบมากกว่า, น้อยกว่า

<u>โจทย์</u>

(1) $z_1 = (2,-3)$, $z_2 = (-4,-1)$, $z_3 = (-2,1)$ จงหาค่า

(1.1) $z_1 + z_2$ (1.4) $z_1 z_2$

(1.2) $z_1 - z_3$ (1.5) $z_1 z_3$

(1.3) $2z_1 + 3z_2$ (1.6) $z_1 (z_2 + z_3)$

(2) จงหาอินเวอร์สการบวก และอินเวอร์สการคูณ ของ

(2.1) $z_1 = (2,-3)$ (2.3) $z_3 = (-2,1)$

(2.2) $z_2 = (-4,-1)$ (2.4) $z_4 = (1,0)$

(3) จงหาค่าของ

(3.1) $(6,4) - (3,5)$ (3.4) $(3,-2) \div (5,4)$

(3.2) $(-3,-2) - (-4,2)$ (3.5) $(7,2) \div (0,3)$

(3.3) $(-4,3) - (5,-6)$ (3.6) $(6,3) \div (3,0)$

(4) จงหาค่าจำนวนจริง x และ y เมื่อ

(4.1) $(x,y) + (-2,4) = (-4,-1)$

(4.2) $(x,y) \times (2,-3) = (-5,-3)$

(4.3) $(3,1) \div (x,y) = (1,-2)$

(4.4) $x - 2yi = \frac{1+i}{i} + \frac{2+i}{i}$

(5) $x^2 + y^2 + 2xyi - 1 - i = 0$ จงหาค่า x และ y

(6) ถ้า $z_1 = (2,-3)$ จงหาค่า $2z_1^{-2}$

(7) จงหาค่าของ

(7.1) $\frac{2+3i}{4-2i}$

(7.2) $\frac{2+i}{2-i} + \frac{3+4i}{1+2i}$

(7.3) $\frac{-14+23i}{3+4i} + \frac{16+12i}{4i}$

(8) จงหาค่าของ $\left(\frac{3+4i}{3-4i}-\frac{3-4i}{3+4i}\right)^3$

(9) ให้หาค่าต่อไปนี้

(9.1) i^{29} (9.3) i^{451}

(9.2) i^{42} (9.4) $i^{4,040}$

(10) จงหาค่า $i^{135}+i^{136}+i^{137}+i^{138}$ และ $i^{135}\,i^{136}\,i^{137}\,i^{138}$

(11) [Ent'มี.ค.44] กำหนดให้ $z=i^9+i^{10}+\ldots+i^{126}$ เมื่อ $i^2=-1$ แล้ว จงหาค่า $2z^{-1}$

(12) จงหาอินเวอร์สของ $\frac{(1+i)^4}{1-i}$

(13) จงหาค่าของ

(13.1) $(1+i)^{12}$

(13.2) $\frac{(1+i)^2+(1+i)+1}{1+i}$

(13.3) $\frac{(1+i)^{16}}{(1-i)^{10}}$

(14) จงหาค่า $m\in I^+$ ที่น้อยที่สุด ที่ทำให้ $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{5m}=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^m$

<u>สังยุค และค่าสัมบูรณ์</u>

• ในเศษส่วนหนึ่งๆ เมื่อมีจำนวนเชิงซ้อน $a+bi$ เป็นตัวส่วน จะนำ *สังยุค* (conjugate) ของ $a+bi$ คือ $a-bi$ มาคูณทั้งเศษและส่วน เพื่อให้ตัวส่วนกลายเป็นเลขจำนวนจริง (a^2+b^2) สัญลักษณ์ที่ใช้แทนสังยุคของ $z=a+bi$ คือ $\boxed{\overline{z}=a-bi}$

• *ค่าสัมบูรณ์* (absolute value) ของจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อนใดๆ คือระยะห่างจากจุดนั้นไปถึงจุดกำเนิด $(0,0)$ ดังนั้น $\boxed{|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}}$

• สมบัติของสังยุคและค่าสัมบูรณ์

1. $z=\overline{z}$ ก็ต่อเมื่อ z เป็นจำนวนจริงเท่านั้น และ $\overline{\overline{z}}=z$ เสมอ
2. $\overline{(z^{-1})}=(\overline{z})^{-1}$ และ $|z^{-1}|=|z|^{-1}$
3. $\overline{(z^n)}=(\overline{z})^n$ และ $|z^n|=|z|^n$ $n\in I^+$
4. $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z}_1\pm\overline{z}_2$
5. $\overline{z_1z_2}=\overline{z}_1\overline{z}_2$ และ $\overline{z_1\div z_2}=\overline{z}_1\div\overline{z}_2$
6. $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$ และ $|z_1\div z_2|=|z_1|\div|z_2|$
7. $|z|$ มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 เสมอ และ $z\cdot\overline{z}=|z|^2$
8. $|z|=|-z|=|\overline{z}|$

โจทย์

(15) $z_1 = 2 + 3i,\ z_2 = 3 - 4i$ จงหาค่าของ

(15.1) $\overline{z_1 + z_2}$ (15.4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$

(15.2) $\overline{z_1 - z_2}$ (15.5) $\overline{(z_1^2)}$

(15.3) $\overline{z_1 z_2}$

(16) ถ้า $z_1 = 3 + 4i$ และ $\overline{z_1 z_2} + \overline{z_2} - 4 = 0$ จงหาค่า z_2^{-1}

(17) จงหาค่า z ที่สอดคล้องกับสมการ $z + i + 3 - 2\overline{z} = 1 + 2i$

(18) จงหาค่าของ

(18.1) $|3 + 4i|$ (18.4) $|-4 + 0i|$

(18.2) $|-5 + 12i|$ (18.5) $|(0, -5)|$

(18.3) $|-7i|$

(19) จงหาค่า $|z|$ เมื่อ z คือ

(19.1) $\frac{(1+\sqrt{3}\,i)^2(\sqrt{3}-i)^4}{(1-\sqrt{3}\,i)^2}$ (19.3) $\frac{(3+4i)^4}{(1+i)^{16}}$

(19.2) $\frac{-2i(1+\sqrt{3}\,i)^5}{(1+\sqrt{2}\,i)^6}$ (19.4) $((1,1)^{-1})^4$

(20) จงหาค่าของ $\left|\frac{(2-i)(3+2i)(4-3i)(5+4i)}{(1+2i)(2-3i)(-4-5i)}\right|^3$

(21) ถ้า $z = (1+\sqrt{3}\,i)(\sqrt{3}-i)(1+i)$ จงหาค่า $|z^{-1}|$

(22) ถ้า $z_1 + z_2 = 0$ และ $|z_1| = |z_2| = 1$ จงหาค่า $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$

(23) จงหาค่า z เมื่อ

(23.1) $\left|\frac{z+1}{z+3-2i}\right| = 1$ และ $|z| = \sqrt{149}$

(23.2) $\left|\frac{z+1}{z+(3-2i)}\right| = 1$ และ $z\overline{z} = 29$

(23.3) $\left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1$ และ $\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3}$

(24) ถ้า $|z+12| = 2|z+3|$ จงหาค่า $|z|$

(25) เมื่อ $z \neq 1$ จงหาค่า $\mathrm{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$

(26) [Ent'ต.ค.41] ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $(i+1)(\overline{z+1}) = -1$ แล้ว จงหาส่วนจริงของจำนวนเชิงซ้อน $z(z-\overline{z})^{15}$

(27) ข้อใดไม่ใช่กราฟวงกลม

ก. $z\bar{z} = 1$ ค. $z + \bar{z} = |z|^2$

ข. $z + \bar{z} = |z|$ ง. $|3z+i| = |z+3i|$

(28) จงเขียนกราฟของ

(28.1) $|z-(2+3i)| = 1$

(28.2) $|z+2| = 3|z-2+4i|$

(28.3) $|z+2i| + |z-2i| = 10$

<u>หมายเหตุ</u> โจทย์ข้อนี้อาจเปลี่ยนเป็น “จงหาค่า z ที่สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้” ก็ได้ และคำตอบจะมีได้มากมาย (ทุกๆ จุดในกราฟ) เพราะตัวแปร z นั้น สมการเดียวไม่เพียงพอ

<u>รูปเชิงขั้ว (Polar Form)</u>

• การอ้างถึงพิกัด (a,b) ของจำนวนเชิงซ้อน อาจจะกล่าวได้อีกแบบเป็น (r,θ) โดยที่ r แทน “ระยะห่างจากจุดกำเนิด” (modulus) และ θ แทน “ทิศทาง” (argument) (มุมวัดทวนเข็มจากแกน $+x$) เรียกรูปแบบนี้ว่า *รูปเชิงขั้ว* ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างสองระบบนี้เป็นดังนี้

$a = r\cos\theta$ $r = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$

$b = r\sin\theta$ $\tan\theta = (b/a)$

เราอาจเขียนรูปทั่วไปของ $z = a + bi$ ได้ใหม่ว่า $z = (r\cos\theta) + (r\sin\theta)i$

หรือ $\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$

<u>หมายเหตุ</u> **1.** จาก $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ บางทีเขียนว่า $r = Abs(z)$ และ $\theta = Arg(z)$

2. บางตำราใช้สัญลักษณ์ $z = r\angle\theta$ หรือ $z = r\,cis\,\theta$ เพื่อความสะดวกในการเขียน, คำนวณ

• รูปเชิงขั้วสามารถนำมาใช้ประโยชน์ในการคูณ หาร ยกกำลัง และถอดรากของจำนวนเชิงซ้อนได้สะดวก โดยมีทฤษฎีอยู่ดังนี้

ถ้า $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ และ $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ แล้ว

1. $z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$

2. $z_1/z_2 = (r_1/r_2)(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2))$

3. $z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) \rightarrow$ *ทฤษฎีบทของเดอมัวฟ์* (De Moivre’s Theorem)

4. รากที่ n ของ z มีอยู่ n คำตอบเสมอ เพราะมาจากสมการ $?^n = z$

คำตอบแรก คือ $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos(\frac{\theta}{n}) + i\sin(\frac{\theta}{n}))$ และคำตอบที่เหลือจะมีขนาดเท่ากันแต่มุมต่างๆ กัน หาค่ามุมได้จากการแบ่งวงกลม $360°$ ออกเป็น n ส่วนเท่าๆ กันโดยมีมุม θ/n นี้เป็นจุดๆ หนึ่งในบรรดาคำตอบ หรือเขียนเป็นสูตรว่า

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos(k\frac{360°}{n} + \frac{\theta}{n}) + i\sin(k\frac{360°}{n} + \frac{\theta}{n})) \quad \text{โดย } k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$$

โจทย์

(29) ให้เขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้เป็นรูปเชิงขั้ว

(29.1) $-1-\sqrt{3}\,i$ (29.4) -5

(29.2) $(4,-4)$ (29.5) $4i$

(29.3) $(10,0)$ (29.6) $-3i$

(30) ถ้า $z_1 = 4(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$ และ $z_2 = 3(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ)$ จงหาค่า $z_1 z_2$ ในรูป $a+bi$

(31) ถ้า $z_1 = 2(\cos 18^\circ + i\sin 18^\circ)$, $z_2 = -3(\cos 72^\circ + i\sin 72^\circ)$ และ $z_3 = -4(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$ จงหาค่า $z_1 z_2 z_3$ และ $\frac{z_1 z_2}{z_3}$ ในรูป $a+bi$

(32) ถ้า $z_1 = 2(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)$, $z_2 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})$ จงหาค่า z_1^6 และ z_2^8 ในรูป $a+bi$

(33) จงหาค่า $(\sqrt{3}+i)^8$ โดยวิธียกกำลังโดยตรง และวิธีแปลงเป็นเชิงขั้วก่อน

(34) [Ent'ต.ค.42] ถ้า $z = -2+2\sqrt{3}\,i$ เมื่อ $i^2 = -1$ แล้ว z^{17} อยู่ในควอดรันต์ใด

(35) จงหาค่า z^0 และ z^{-10} เมื่อ $z = -1+\sqrt{3}\,i$

(36) จงหาค่าของ

(36.1) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{50}$

(36.2) $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^{-8}+\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^{-8}$

(36.3) $\frac{(1+i)^{30}}{(\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i)^{10}}$

(37) [Ent'มี.ค.44] ถ้า $2z^3 = 1+\sqrt{3}\,i$ และ $\frac{z^{18}}{i-z^{27}} = a+bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง จงหาค่า $a+b$

(38) [Ent'ต.ค.43] กำหนดให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ $2z_1\bar{z}_2 = 1+\bar{z}_2$ และ $z_1 = (\cos\frac{\pi}{18}+i\sin\frac{\pi}{18})^6$ จงหาอินเวอร์สการคูณของ z_2

(39) จงหาค่า

(39.1) รากที่สี่ของ $-8+8\sqrt{3}\,i$

(39.2) รากที่สามของ $8i$ ในรูป $a+bi$

(39.3) รากที่สามของ $-8i$

(39.4) รากที่สองของ $-4+4\sqrt{3}\,i$

(39.5) รากที่สองของ $-2\sqrt{3}-2i$

(39.6) รากที่สองของ $-15-8i$

(40) จงหารากที่สองของ $3+4i$ โดยวิธีสมมติคำตอบ $(x+yi)^2 = 3+4i$

[Hint : สูตรลัดในการหารากที่สองคือ $\sqrt{a \pm bi} = \sqrt{\frac{r+a}{2}} - \sqrt{\frac{r-a}{2}}\,i$]

(41) ถ้าสมการ $x^2 = -2-2\sqrt{3}i$ มีคำตอบเป็น z_1 และ z_2 แล้ว จงหาค่า $|z_1|^2+|z_2|^2$

สมการพหุนาม

• จากนี้สมการพหุนามดีกรี n ในรูป $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_0 = 0$ จะหาคำตอบได้ n จำนวนเสมอ ซึ่งใน n คำตอบนี้ อาจเป็นจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อนปนกันอยู่ สามารถคำนวณโดยแยกคำตอบที่เป็นจำนวนจริงออกจนเหลือเพียงดีกรีสอง แล้วอาศัยสูตร $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ช่วยในการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน

ข้อสังเกต

1. จากสูตรนี้ทำให้เราพบว่า ในสมการที่สัมประสิทธิ์ทั้งหมดเป็นจำนวนจริง ถ้า $a+bi$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการแล้ว จะมีสังยุค $a-bi$ เป็นอีกคำตอบด้วยเสมอ

2. ทฤษฎีเศษเหลือ และทฤษฎีตัวประกอบ (หารลงตัว) ของพหุนาม ที่เคยได้ศึกษาในหัวข้อจำนวนจริง ยังคงใช้ได้กับจำนวนเชิงซ้อน และนอกจากนี้การหารสังเคราะห์ก็ยังใช้ได้เช่นกัน

โจทย์

(42) จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้

(42.1) $x^2+16 = 0$

(42.2) $2x^2-3x+4 = 0$

(42.3) $2x^3-x+1 = 0$

(43) หาค่าสัมบูรณ์ของรากสมการ $z^2(1-z^2) = 16$

* (44) ให้หาคำตอบของสมการ

(44.1) $2x^2+(1-2i)x+1 = 8i$

(44.2) $2ix^2-3x-3i = 0$

(44.3) $x^2+2(i-1)x-1-2i = 0$

(44.4) $x^2-(2+3i)x-1+3i = 0$

[Hint : สูตรของสมการดีกรีสอง สามารถจัดรูปใหม่ได้ว่า $(2ax+b)^2 = b^2-4ac$]

(45) จงแสดงว่า $2+3i$ เป็นคำตอบหนึ่งของ $x^3-3x^2+9x+13 = 0$ โดยการแทนค่าและการแยกตัวประกอบ

(46) จงหาค่าสัมบูรณ์ของผลบวกของรากสมการ $x^3-17x^2+83x-67 = 0$

(47) จงหาผลบวก และผลคูณ ของรากทั้งหมดของสมการ $z^3+2z^2+9z+18 = 0$

[Hint : $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0 = 0$ มีผลบวกรากเป็น $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$ และผลคูณ $(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$]

(48) สมการกำลังสอง $Ax^2 + Bx + C = 0$ มีรากหนึ่งเป็น $4 + 3i$ จงหาค่า $A + B + C$

(49) 2 และ $1 - i$ เป็นคำตอบของสมการกำลังสาม สมการใด

(50) จงหาสมการพหุนามกำลังสี่ ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง และมี $z_1 = 2 - 2\sqrt{3}i$ กับ $z_2 = -4i$ เป็นคำตอบของสมการ

(51) ถ้า $2 + 2i$ เป็นคำตอบของ $x^4 - 4x^3 + x^2 + 28x - 56 = 0$ จงหาคำตอบที่เหลือ

(52) จงแก้สมการ $x^4 + 2x^3 = 4x + 4$ โดยทราบว่ามี $-1 - i$ เป็นคำตอบหนึ่ง

(53) ถ้า $-1 + \sqrt{3}i$ เป็นรากหนึ่งของสมการ $x^5 + 9x^3 - 8x^2 - 72 = 0$ จงหารากทั้งหมด

(54) จงหารากของสมการ

(54.1) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

[Hint : $(x^n - 1) = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)$]

(54.2) $x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 24x - 16 = 0$

(55) จงหาผลบวกของรากสมการ $x^6 - x^5 + x^4 - x^2 + x - 1 = 0$

(56) จงหาผลบวกของค่าสัมบูรณ์ของรากสมการ

(56.1) [Ent'มี.ค.43] $z^4 + z^2 + 2 = 0$

(56.2) $x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 8x + 32 = 0$

* (56.3) $x^5 - 3ix^4 + 4x - 12i = 0$

* (57) $x^3 - (5-2i)x^2 + (7-10i)x + k$ หาร $x + 2i$ ลงตัว จงหาค่า k

(58) ถ้า $x = -2 - \sqrt{3}i$ จงหาค่า $2x^4 + 5x^3 + 7x^2 - x + 4$

[Hint : จากทฤษฎีเศษเหลือ จะได้ว่า $f(-2-\sqrt{3}i)$ คือเศษของ $\frac{f(x)}{x^2+4x+7}$]

(59) [Ent'มี.ค.42] ให้ $P(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามกำลังสาม ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง และสัมประสิทธิ์ของ x^3 เป็น 1 ถ้า $x - 2$ หาร $P(x)$ เหลือเศษ 5 และ $1+\sqrt{3}i$ เป็นรากหนึ่งของ $P(x)$ แล้ว รากที่เป็นจำนวนจริงของ $P(x)$ มีค่าเท่าใด

<u>เฉลย</u>

(1.1) $(-2,-4)$ (1.2) $(4,-4)$ (1.3) $(-8,-9)$ (1.4) $(-11,10)$ (1.5) $(-1,8)$ (1.6) $(-12,18)$ (2.1) $(-2,3),(2/13,3/13)$ (2.2) $(4,1),(-4/17,1/17)$ (2.3) $(2,-1),(-2/5,-1/5)$ (2.4) $(-1,0),(1,0)$ (3.1) $(3,-1)$ (3.2) $(1,-4)$ (3.3) $(-9,9)$ (3.4) $(7/41,-22/41)$ (3.5) $(2/3,-7/3)$ (3.6) $(2,1)$ (4.1) $(-2,-5)$ (4.2) $(-\frac{1}{13},-\frac{21}{13})$ (4.3) $(\frac{1}{5},\frac{7}{5})$ (4.4) $2,\frac{3}{2}$ (5) $\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}$ หรือ $-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (6) $(-\frac{10}{169},\frac{24}{169})$ (7.1) $\frac{1}{10}+\frac{4}{5}i$ (7.2) $\frac{14}{5}+\frac{2}{5}i$ (7.3) $5+i$ (8) $-\left(\frac{48}{25}\right)^3 i$ (9.1) i

(9.2) -1 (9.3) $-i$ (9.4) 1 (10) $0, -1$ (11) $-1-i$ (12) $\frac{-1}{4}+\frac{i}{4}$ (13.1) -64 (13.2) $\frac{5}{2}+\frac{i}{2}$ (13.3) $8i$ (14) 2 (15.1) $5+i$ (15.2) $-1-7i$ (15.3) $18-i$ (15.4) $\frac{-6}{25}-\frac{17}{25}i$ (15.5) $-5-12i$ (16) $1+i$ (17) $2+\frac{i}{3}$ (18.1) 5 (18.2) 13 (18.3) 7 (18.4) 4 (18.5) 5 (19.1) 16 (19.2) $\frac{64}{81}$ (19.3) $\frac{625}{256}$ (19.4) $\frac{1}{4}$ (20) 125 (21) $1/4\sqrt{2}$ (22) 0 (23.1) $7+10i$ หรือ $-10-7i$ (23.2) $2+5i$ หรือ $-5-2i$ (23.3) $6+17i$ หรือ $6+8i$ (24) 6 (25) $\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$ (26) $\frac{1}{2}$ (27) ข. (28.1) กราฟวงกลม รัศมี 1 หน่วย มีจุดศูนย์กลางที่ $(2,3)$ (28.2) กราฟวงกลม รัศมี $\sqrt{4.5}$ หน่วย จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(2.5,-4.5)$ (28.3) กราฟวงรีตามแกน y มีศูนย์กลางที่จุดกำเนิด แกนเอกยาว 10 หน่วย แกนโทยาว $2\sqrt{21}$ หน่วย (29.1) $2(\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ)$ หรือ $2\angle 240^\circ$ (29.2) $4\sqrt{2}\angle 315^\circ$ (29.3) $10\angle 0^\circ$ (29.4) $5\angle 180^\circ$ (29.5) $4\angle 90^\circ$ (29.6) $3\angle 270^\circ$ (30) $-6\sqrt{3}-6i$ (31) $-12+12\sqrt{3}i$ และ $\frac{3}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}i$ (32) $64i$ และ $-8-8\sqrt{3}i$ (33) $-128-128\sqrt{3}i$ (34) $240^\circ \rightarrow Q_3$ (35) $1\angle 0^\circ$ และ $2^{-10}\angle 240^\circ$ (36.1) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (36.2) -1 (36.3) 32 (37) $1/\sqrt{2}+(-1/\sqrt{2})=0$ (38) $-\sqrt{3}i$ (39.1) $2\angle 30^\circ,\ 2\angle 120^\circ,\ 2\angle 210^\circ,\ 2\angle 300^\circ$ (39.2) $-2i,\ i\pm\sqrt{3}$ (39.3) $2\angle 90^\circ,\ 2\angle 210^\circ,\ 2\angle 330^\circ$ (39.4) $2\sqrt{2}\angle 60^\circ,\ 2\sqrt{2}\angle 240^\circ$ (39.5) $2\angle 105^\circ,\ 2\angle 285^\circ$ (39.6) $\pm(1-4i)$ (40) $\pm(2+i)$ (41) 8 (42.1) $\pm 4i$ (42.2) $\frac{3}{4}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (42.3) $1,\ \frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i$ (43) 2 (44.1) $1+2i,\ -\frac{3}{2}+i$ (44.2) $\pm\frac{\sqrt{15}}{4}-\frac{3}{4}i$ (44.3) $2-i,\ -i$ (44.4) $1+2i,\ 1+i$ (45) $(x+1)(x^2-4x+13)=0$ (46) 17 (47) $z=-2,\pm 3i \rightarrow$ ตอบ -2 และ -18 (48) 18 (49) $x^3-4x^2+6x-4=0$ (50) $x^4-4x^3+32x^2-64x+256=0$ (51) $2-2i,\ \pm\sqrt{7}$ (52) $-1\pm i,\ \pm\sqrt{2}$ (53) $-1\pm\sqrt{3}i,\ 2,\ \pm 3i$ (54.1) $-1,\ \pm\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (54.2) $-1,\ \pm 2,\ -1\pm\sqrt{3}i$ (55) 1 (56.1) 4 (56.2) $4+4\sqrt{2}$ (56.3) $3+4\sqrt{2}$ (57) $86i$ (58) -31 (59) $3/4$

ลำดับและอนุกรม (Sequence & Series)

ลำดับ (Sequence)

• สมมติว่าเรามีฟังก์ชัน $f(n) = n^2+1$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$
เราจะได้ $f(1) = 2$, $f(2) = 5$, $f(3) = 10$, $f(4) = 17$, ...
ค่าของฟังก์ชันเหล่านี้ที่เขียนต่อกัน เป็น $2, 5, 10, 17, \ldots$ จะเรียกว่า *ลำดับ*
และนิยมใช้ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ แทน $f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n)$

• สรุปได้ว่า ลำดับ คือฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นจำนวนนับ และนิยมเขียนฟังก์ชันด้วย a_n
เราเรียก a_1 ว่า "*พจน์* (term) ที่ 1" ของลำดับ, เรียก a_2 ว่าพจน์ที่ 2 ของลำดับ, ไปเรื่อยๆ
จนถึงพจน์ที่ n ใดๆ เขียนแทนด้วย a_n จะเรียกว่า *พจน์ทั่วไป* (general term) ของลำดับ
เช่น ลำดับ $2, 5, 10, 17, \ldots$ มีพจน์ทั่วไปเป็นดังนี้ $a_n = n^2+1$

ตัวอย่าง

$1, 2, 3, 4, \ldots$ มีพจน์ทั่วไปเป็น $a_n = n$ หรืออื่นๆ
$3, 6, 9, 12, \ldots$ มีพจน์ทั่วไปเป็น $a_n = 3n$ หรืออื่นๆ
$1, 3, 5, 7, \ldots$ มีพจน์ทั่วไปเป็น $a_n = 2n - 1$ หรืออื่นๆ
$1, 4, 9, 16, \ldots$ มีพจน์ทั่วไปเป็น $a_n = n^2$ หรืออื่นๆ
$1, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{7}{16}, \ldots$ มีพจน์ทั่วไปเป็น $a_n =$
$-1, 1, -1, 1, \ldots$ มีพจน์ทั่วไปเป็น $a_n =$
$1, -2, 3, -4, \ldots$ มีพจน์ทั่วไปเป็น $a_n =$
$3, 17, 47, 99, 179, \ldots$ มีพจน์ทั่วไปเป็น $a_n =$

คำว่า "หรืออื่นๆ" ในที่นี้เนื่องจากลำดับหนึ่งๆ ที่ให้มา จะหาพจน์ทั่วไปได้มากกว่า 1 แบบเสมอ
เช่น $1, 2, 3, 4, \ldots$ อาจมีพจน์ทั่วไปเป็น $a_n = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4) + n$
$= n^4-10n^3+35n^2-49n+24$ ก็ได้
(เพราะไม่ได้บังคับว่า จากพจน์ที่ 5 เป็นต้นไปจะต้องเพิ่มขึ้นทีละ 1)

• ลำดับที่มีจำนวนพจน์ที่แน่นอน เช่น 8 พจน์, 15 พจน์, หรือ n พจน์ก็ได้ จะเรียกว่า *ลำดับจำกัด* (finite sequence) ส่วนลำดับที่มีจำนวนพจน์มากจนนับไม่ได้ จะเรียกว่า *ลำดับอนันต์* (infinite sequence)

โจทย์

(1) ให้หา 4 พจน์แรก ของลำดับต่อไปนี้

(1.1) $a_n = 2^n$ (1.3) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(1.2) $a_n = 4n-2$ (1.4) $a_n = (-1)^n \frac{n}{(n+1)^2}$

(2) ให้หาพจน์ทั่วไปของลำดับต่อไปนี้ ข้อละ 1 แบบ

(2.1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

(2.2) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$

(2.3) $1, 5, 13, 29, \ldots$

(2.4) $3, 0.3, 0.03, 0.003, \ldots$

(2.5) $2, 6, 12, 20, \ldots$

ลำดับเลขคณิต และลำดับเรขาคณิต

- ลำดับที่เราพบบ่อย มีสองประเภท คือ*ลำดับเลขคณิต* (Arithmetic Sequence) และ*ลำดับเรขาคณิต* (Geometric Sequence)
- ลำดับเลขคณิต คือลำดับที่ "ผลต่างของพจน์ติดกันเป็นค่าคงตัว" เรียกค่านี้ว่า *ผลต่างร่วม* (Common Difference) ใช้สัญลักษณ์ d นั่นคือ $a_{n+1} - a_n = d$ เสมอ

พจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต เป็น $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$

- ลำดับเรขาคณิต คือลำดับที่ "ผลหารของพจน์ติดกันเป็นค่าคงตัว" เรียกค่านี้ว่า *อัตราส่วนร่วม* (Common Ratio) ใช้สัญลักษณ์ r นั่นคือ $a_{n+1} \div a_n = r$ เสมอ

พจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต เป็น $\boxed{a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}}$

ข้อสังเกต ลำดับเลขคณิต จะมีพจน์ทั่วไปเป็นแบบ *สมการเส้นตรง* ที่มีความชัน = d
ส่วนลำดับเรขาคณิต จะมีพจน์ทั่วไปเป็นแบบ *สมการเอ็กซ์โพเนนเชียล* ที่มีฐาน = r

โจทย์

(3) ให้บอกว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับเลขคณิตหรือเรขาคณิต และหาพจน์ทั่วไปของลำดับด้วย

(3.1) $15, 12, 9, 6, \ldots$ (3.5) $10, -5, \frac{5}{2}, \ldots$

(3.2) $2, 4, 8, 16, \ldots$ (3.6) $4, 8, 12, \ldots$

(3.3) $x, x+2, x+4, \ldots$ (3.7) $3, 3, 3, \ldots$

(3.4) $\log 2, \log 4, \log 8, \log 16, \ldots$

(4) ให้หาพจน์ที่ 4, 5, 6 และ 20 ของลำดับเลขคณิตต่อไปนี้ $3, 3.5, 4, \ldots$

(5) ให้หาพจน์ที่ 4, 5, 6 และ 20 ของลำดับเรขาคณิตต่อไปนี้ $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \ldots$

(6) พจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต ที่มีพจน์ที่ 4 เป็น 20 และพจน์ที่ 16 เป็น 56 คืออะไร

(7) ลำดับเลขคณิตมีผลบวกพจน์ที่ 2 กับพจน์ที่ 13 เป็น 0 และผลบวกพจน์ที่ 4 กับพจน์ที่ 8 เป็น 12 จงหาสี่พจน์แรกของลำดับนี้

(8) ถ้าพจน์ที่ 7 ของลำดับเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วมเท่ากับ 2 คือ 128 จงหาสองพจน์แรก

(9) หาสี่พจน์แรกของลำดับเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วมเป็นบวก และ $a_1+a_2 = 8$, $a_3+a_4 = 72$

(10) [Ent'41] ให้ x, y, z, w เป็นพจน์ 4 พจน์เรียงกันในลำดับเรขาคณิต ถ้า $y + z = 6$ และ $z + w = -12$ จงหาค่าสัมบูรณ์ของพจน์ที่ 5 ของลำดับนี้

(11) ลำดับเลขคณิต $20, 16, 12, \ldots$ มีเลข -96 อยู่หรือไม่ ถ้ามีให้บอกว่าเป็นพจน์ที่เท่าใด

(12) พจน์ที่เท่าใดของลำดับเลขคณิต $3, 7, 11, \ldots$ มีค่า 75

(13) [Ent'40] พจน์แรกที่เป็นจำนวนเต็มลบของลำดับเลขคณิต $200, 182, 164, 146, \ldots$ มีค่าต่างจากพจน์ที่ 10 อยู่เท่าใด

(14) [Ent'39] จงหาค่า m ซึ่งเป็นจำนวนเต็มที่น้อยที่สุด ที่ทำให้พจน์ที่ m ของลำดับเลขคณิต $2, 5, 8, \ldots$ มีค่ามากกว่า $1{,}000$

(15) ให้หาลำดับเรขาคณิต ที่มีผลบวกของสามพจน์แรกเป็น -3 และผลคูณเป็น 8

(16) ถ้า $p, 5p, 6p+9$ เป็นลำดับเลขคณิต จงเขียน 3 พจน์ถัดไป

(17) ต้องนำจำนวนเท่าใดมาบวกทุกพจน์ของลำดับ $3, 20, 105$ จึงทำให้กลายเป็นลำดับเรขาคณิต

(18) [Ent'มี.ค.44] กำหนดให้ a, b, c เป็น 3 พจน์เรียงกันในลำดับเรขาคณิต และมีผลคูณเป็น 27 ถ้า $a, b+3, c+2$ เป็น 3 พจน์เรียงติดกันในลำดับเลขคณิตแล้ว $a + b + c$ มีค่าเท่าใด

(19) จงหาตัวกลางเลขคณิต ตามเงื่อนไขที่กำหนดให้

(19.1) พจน์สองพจน์ระหว่าง 7 กับ 16 ที่ทำให้ 4 พจน์นี้อยู่ในลำดับเลขคณิต

(19.2) สี่พจน์กลางระหว่าง 130 กับ 55 เมื่อลำดับนี้เป็นลำดับเลขคณิต

(20) จงหาตัวกลางเรขาคณิต ตามเงื่อนไขที่กำหนดให้

(20.1) พจน์กลางสี่พจน์ของลำดับเรขาคณิตที่อยู่ระหว่าง 3 กับ 96

(20.2) พจน์สามพจน์ระหว่าง $\frac{4}{3}$ กับ $\frac{27}{64}$ ที่ทำให้ 5 พจน์นี้อยู่ในลำดับเรขาคณิต

(21) ลำดับหนึ่งมีรูปทั่วไปเป็น $2a_{n+1} = a_n + 3$ และมีพจน์ที่ 5 เป็น 5 จงหาค่า $a_3 + a_6$

(22) เศรษฐี 3 คนแย่งกันประมูลสินค้า โดยจะเสนอราคาสูงขึ้นเป็น 2 เท่าเสมอ และผลัดกันเสนอราคาทีละคนโดยไม่แซงคิวกัน หากเศรษฐีคนที่ 1 เริ่มประมูลโดยเสนอราคา 1 ล้านบาท ถามว่าใครจะเสนอราคาเกิน 250 ล้านบาทเป็นคนแรก

ลิมิตของลำดับอนันต์

• หากต้องการทราบว่า ในลำดับ (อนันต์) ลำดับหนึ่งนั้น ถ้า n ยิ่งมากขึ้นจนเข้าใกล้ ∞ ($n \to \infty$) แล้ว ค่าของ a_n จะเข้าใกล้ค่าใด ($a_n \to ?$) เราเรียกว่า *การหาลิมิตของลำดับ* นั่นเอง และค่าที่ได้นี้เรียกว่า *ลิมิต* (limit)

ลำดับ $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ หรือ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ พบว่า เมื่อ n มากขึ้นจนเข้าใกล้ ∞ แล้ว ค่าของ a_n จะเข้าใกล้ 0 จึงกล่าวว่า "ลิมิตของลำดับนี้เท่ากับ 0" และเขียนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

• ลำดับที่หาค่าลิมิตได้ เรียกว่า *ลำดับลู่เข้า* (Convergent Sequence)
และลำดับที่ไม่มีลิมิต หรือหาค่าลิมิตไม่ได้ จะเรียกว่า *ลำดับลู่ออก* (Divergent Sequence)
เช่น ลำดับ $1, 2, 3, 4, \ldots$ ถ้า $n \to \infty$ แล้ว $a_n \to \infty$ ด้วย แสดงว่า $\lim_{n\to\infty} a_n$ หาค่าไม่ได้
ส่วนลำดับ $\cos \pi, \cos 2\pi, \cos 3\pi, \ldots$ พบว่าเป็น -1 กับ 1 สลับกันไปตลอด ไม่ได้เข้าใกล้ค่าใดค่าหนึ่งเลย แสดงว่า $\lim_{n\to\infty} a_n$ ไม่มีค่า หรือ ลำดับนี้ไม่มีลิมิต

• การหาค่าลิมิต สามารถใช้สมบัติการกระจาย แจกแจงได้ทุกรูปแบบ ทั้งการบวก ลบ คูณ หาร ยกกำลัง ถอดราก ค่าสัมบูรณ์ และอื่นๆ ตัวอย่างเช่น

$$a_n = \frac{5n^3+2n-1}{7n^2-8n^4} \qquad \text{จะได้ } \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^3+2n-1}{7n^2-8n^4}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{5}{n}+\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4}}{\frac{7}{n^2}-8}\right)$$

$$= \frac{0+0-0}{0-8} = 0$$

ข้อสังเกต

1. *ลำดับใดๆ*

$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$ เมื่อ P และ Q เป็นพหุนาม จะมีได้สามกรณี คือ เป็นศูนย์ เมื่อดีกรี P น้อยกว่า Q, เป็นสัมประสิทธิ์ตัวแรกหารกัน เมื่อดีกรีของ P และ Q เท่ากัน, และหาค่าไม่ได้ เมื่อดีกรี P มากกว่า Q

2. *ลำดับเรขาคณิต*

$\lim_{n\to\infty} (r^n)$ เมื่อ r เป็นค่าคงที่ จะมีได้สี่กรณี คือ ไม่มีลิมิต เมื่อ $r \le -1$, เป็นศูนย์ เมื่อ $|r| < 1$, เป็น 1 เมื่อ $r = 1$, และหาค่าไม่ได้ เมื่อ $r > 1$

3. *ลำดับเลขคณิต*

ลิมิตหาค่าไม่ได้เสมอ (ยกเว้นกรณีที่ $d = 0$)

โจทย์

(23) ลำดับต่อไปนี้มีค่า $\lim_{n\to\infty} a_n$ เป็นเท่าใด

(23.1) $a_n = 2n-1$

(23.2) $a_n = \frac{1}{n}$

(23.3) $a_n = \sin n\pi$

(23.4) $a_n = |\cos n\pi|$

(24) ให้หาลิมิตของลำดับต่อไปนี้

(24.1) $a_n = \frac{4n+3}{3n+1}$

(24.2) $a_n = \frac{2n^2+n-3}{5n^2-1}$

(24.3) $a_n = \frac{6n+7}{5n^2+4}$

(24.4) $a_n = \frac{5n^2+4}{n^5+8}$

(24.5) $a_n = \frac{6n^2+7}{3n-1}$

(24.6) $a_n = \frac{n^7+4}{n+1}$

(25) ให้หาค่าลิมิตของ a_n เมื่อ

(25.1) $a_n = \frac{1-2n-3n^3}{(3n+1)^3}$

(25.2) $a_n = \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}$

(25.3) $a_n = \sqrt{n^2-3}$

(25.4) $a_n = \frac{(2n+1)\,n!}{(n+1)!}$

(25.5) $a_n = \left(\frac{n+5}{3n-1}\right)^5$

(26) จงหาค่า

(26.1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{3}\right)$

(26.2) $\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{2n^2+4n+1}{3n^2}\right)^2\left(1+\frac{4^n}{5^n}\right)\right]$

(26.3) ลิมิตของลำดับ $3, 3\sqrt{3}, 3\sqrt{3\sqrt{3}}, \ldots$

(27) [Ent'41] ถ้า $a_n = \frac{n^2+n+1}{3n^2+1}$ และ $b_n = \frac{2^n-5^n}{5^n+9}$ แล้ว ลิมิตของลำดับที่มีพจน์ที่ n เป็น $a_n - b_n + a_n b_n$ มีค่าเท่าใด

(28) [Ent'38] สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ ให้ $M_n = \begin{bmatrix} 1/n & n \\ -1/n & n+1 \end{bmatrix}$ และ $a_n = \det(M_n)$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n$ มีค่าเท่าใด

อนุกรม (Series)

- อนุกรม คือผลบวกของแต่ละพจน์ในลำดับ

อนุกรมที่พบบ่อยคือ *อนุกรมเลขคณิต* (Arithmetic Series) และ*อนุกรมเรขาคณิต* (Geometric Series) เช่น ลำดับเลขคณิต $5, 9, 13, 17, \ldots$ เป็นอนุกรมเลขคณิต $5 + 9 + 13 + 17 + \ldots$ ลำดับเรขาคณิต $2, 4, 8, 16, \ldots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต $2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$

• ในทำนองเดียวกัน อนุกรมจำกัด (finite series) เกิดจากลำดับจำกัด และอนุกรมอนันต์ (infinite series) เกิดจากลำดับอนันต์

• ค่าของอนุกรมสามารถเขียนเป็นสัญลักษณ์ $\sum_{i=1}^{n} a_i$ ได้ เช่น ลำดับ $a_n = \frac{1}{n}$ หรือ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ จะเขียนเป็นอนุกรมได้ว่า $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ มีค่าเท่ากับ $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i}\right)$

• "*ผลบวกย่อย* (partial sum) n พจน์แรก" ของอนุกรม จะใช้สัญลักษณ์ $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

ดังนั้น ค่าของอนุกรมอนันต์ก็คือ $S_\infty = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} S_n$

<u>สมบัติของ Σ</u>

- $\sum_{i=1}^{n} k = n \cdot k$
- $\sum_{i=1}^{n} k\, a_i = k \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$
- $\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$
- $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

<u>โจทย์</u>

(29) ถ้า $f(x) = 3x+1$ และ $u_1 = 3,\ u_2 = 2,\ u_3 = 1,\ u_4 = 5$ จงหาค่า $\sum_{i=1}^{4} u_i\, f(u_i)$

(30) จงเขียนอนุกรมต่อไปนี้โดยใช้สัญลักษณ์ Σ

(30.1) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \ldots + 50 \cdot 51$

(30.2) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n}$

(30.3) $1 + 3 + 7 + 15 + \ldots +$ พจน์ที่ n

(30.4) $ar^p + ar^{p+1} + ar^{p+2} + \ldots + ar^{p+q}$

(30.5) $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots$

(31) หาค่าของอนุกรมต่อไปนี้

(31.1) $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 50$

(31.2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 10^2$

(31.3) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + 7^3$

(32) ให้หาค่าของอนุกรมต่อไปนี้

(32.1) $\sum_{i=1}^{4} i^2(i-3)$ (32.3) $\sum_{k=2}^{6}\left(\frac{k+4}{k-1}\right)$

(32.2) $\sum_{n=1}^{3}(n^2+3)$

(33) [Ent'มี.ค.42] ถ้า $f(x) = x-1$ แล้ว $\sum_{n=10}^{30}(fof)(n^2)$ มีค่าเท่าใด

(34) จงหาค่า

(34.1) ผลบวก 10 พจน์แรก ของอนุกรม $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n(n+1)$

(34.2) S_{10} ของอนุกรม $1\cdot 4\cdot 7 + 2\cdot 5\cdot 8 + 3\cdot 6\cdot 9 + \ldots$

(34.3) S_8 ของอนุกรม $1\cdot 2^2 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 4^2 + \ldots + n(n+1)^2$

(34.4) S_{20} ของอนุกรม $1 + (1+2) + (1+2+3) + \ldots + (1+2+3+\ldots+n)$

(35) [Ent'39] สำหรับแต่ละจำนวนเต็ม $n \geq 4$ จงหาค่าลิมิตของ $\frac{n^4+1}{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}$

(36) [Ent'มี.ค.43] ถ้าลำดับเลขคณิต $a_1, a_2, a_3, \ldots$ มีพจน์ที่ 10 และพจน์ที่ 15 เป็น -19 และ -34 ตามลำดับแล้ว $\sum_{i=1}^{20}(a_i + 2i)$ มีค่าเท่าใด

(37) [Ent'ต.ค.42] ให้ a เป็นจำนวนจริง กำหนดพจน์ที่ n ของอนุกรมคือ $\frac{1+(n-2)\sqrt{a}}{1-a}$ ถ้าพจน์ที่ m คือ $\frac{1+38\sqrt{a}}{1-a}$ แล้วผลบวก m พจน์แรกของอนุกรมมีค่าเท่าใด

ค่าของอนุกรม

1. อนุกรมเลขคณิต

- $S_n = \sum_{i=1}^{n}[a_1 + (i-1)d] = \boxed{\frac{n}{2}(a_1+a_n)}$ หรืออาจเขียนเป็น Σ เพื่อคำนวณค่า
- S_∞ หาค่าไม่ได้เสมอ (ยกเว้นอนุกรม 0 + 0 + 0 + 0 +...)

2. อนุกรมเรขาคณิต

- $S_n = \sum_{i=1}^{n}\left[a_1 r^{(i-1)}\right] = \boxed{\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}}$
- S_∞ หาค่าได้ก็เมื่อ $|r| < 1$ เท่านั้น และค่าที่ได้คือ $S_\infty = \boxed{\frac{a_1}{1-r}}$

3. อนุกรมใดๆ ที่ไม่ใช่สองแบบข้างต้น จะมีวิธีคำนวณต่างๆ กันไป

ข้อสังเกต อนุกรมใดๆ จะหาค่า S_∞ ได้ ก็ต่อเมื่อ $\left|\lim_{n\to\infty} r_n\right| < 1$ และ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ เท่านั้น

หมายเหตุ อนุกรมที่หาค่า S_∞ ได้ เรียกว่า *อนุกรมลู่เข้า* (Convergent Series) และอนุกรมที่หาค่า S_∞ ไม่ได้ เรียกว่า *อนุกรมลู่ออก* (Divergent Series)

โจทย์

(38) ให้หาผลบวกย่อย 18 พจน์แรก ของอนุกรม $2+6+10+\ldots$

(39) ให้หาผลบวกย่อย 8 พจน์แรก ของอนุกรม $\frac{1}{2}+1+2+\ldots$

(40) จงหาค่าของ $1+3+5+\ldots+101$

(41) ลำดับเลขคณิต มีผลต่างร่วมเป็น 4 และมีพจน์ที่ 13 เป็น 51 จงหาผลบวก 10 พจน์แรก

(42) อนุกรมเลขคณิตมีพจน์ที่สิบเป็น 20 พจน์ที่ห้าเป็น 10 จงหาผลบวกย่อย a_8 ถึง a_{15}

(43) อนุกรมเรขาคณิตมีค่า $a_3=80$ และ $S_3=65$ จงหาพจน์แรก และอัตราส่วนร่วม

(44) อนุกรมเรขาคณิตมีพจน์แรกเป็น 160 และอัตราส่วนร่วมเป็น 3/2 ถ้าผลบวก n พจน์แรกเป็น 2,110 แล้ว จงหาค่า n

(45) [Ent'ต.ค.43] ให้ $5, x, 20, \ldots$ เป็นลำดับเลขคณิตที่มีผลบวกของ 12 พจน์แรกเป็น a และ $5, y, 20, \ldots$ เป็นลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์ที่ 6 เป็น b โดยที่ $y<0$ แล้วจงหา $a+b$

(46) [Ent'40] $a+3, a, a-2$ เป็นลำดับเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วมเป็น r จงหาค่า $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$

(47) [Ent'มี.ค.44] กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่ทำให้ ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต $7+15+23+\ldots$ มีค่าเท่ากับ 217 แล้ว $(2^n+2^{n+1}+\ldots+2^{2n})/2^8$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

(48) [Ent'36] จำนวนเต็มบวก m ซึ่งมากที่สุด ที่ทำให้อนุกรม $\frac{1}{2^m}-\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{2^{m+2}}-\frac{1}{2^{m+3}}+\ldots$ มีผลบวกมากกว่า 0.01 คือเท่าใด

(49) ให้หาผลบวก n พจน์แรก ของอนุกรม $4+44+444+4444+\ldots$

[Hint : ทำเป็นเลข 9 ทุกตัวก่อน]

(50) จงหาค่าของอนุกรมเรขาคณิตต่อไปนี้

(50.1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\ldots+\frac{3}{2\cdot 3^n}+\ldots$

(50.2) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}+\ldots$

(50.3) $100+10+1+0.1+\ldots+10^{3-n}+\ldots$

(50.4) $3+2+\frac{4}{3}+\frac{8}{9}+\ldots$

(50.5) $6-3+\frac{3}{2}-\frac{3}{4}+\ldots$

(50.6) $1+\frac{1}{0.9}+\frac{1}{(0.9)^2}+\frac{1}{(0.9)^3}+\ldots$

(51) ชายคนหนึ่งเดินลากท่อนไม้ไปตามแนวราบ ก้าวแรกเขาเดินได้ระยะทาง 0.5 เมตร และด้วยความล้าทำให้ก้าวถัดไปได้ระยะทางเพียง 80% ของก้าวก่อนหน้าเสมอ ถามว่าเมื่อเขาเดินครบ 10 ก้าว จะอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นเท่าใด และถ้าปล่อยให้เดินไปเรื่อยๆ จะได้ระยะทางเท่าใด

(52) จงหาค่า x ที่ทำให้ $1+x+x^2+\ldots=4$

(53) [Ent'39] ถ้าอนุกรม $1+\frac{2^x}{1+2^x}+\frac{2^{2x}}{(1+2^x)^2}+\ldots$ มีผลบวกเท่ากับ 9 แล้ว จงหาค่าผลบวกของอนุกรม $\log_2 x-(\log_2 x)^2+(\log_2 x)^3-\ldots$

(54) [Ent'36] ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งทำให้ $1+\log_{\sqrt{2}} 2+\log_{\sqrt[3]{2}} 2+\ldots+\log_{\sqrt[n]{2}} 2=n^2-21$ แล้ว $1+2+2^2+\ldots+2^n$ มีค่าเท่าใด

(55) [Ent'41] ถ้า $a_1, a_2, \ldots$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ มีลิมิตเป็น 1 แล้ว อนุกรม $a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ มีผลบวกเป็นเท่าใด

(56) จงหาค่า

(56.1) $\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}+\ldots$

(56.2) S_{30} ของ $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots$

(56.3) S_n ของ $\log\frac{1}{2}+\log\frac{2}{3}+\log\frac{3}{4}+\ldots+\log\frac{n}{n+1}+\ldots$

(56.4) $\log_{\frac{1}{a^2}} m+\log_{\frac{1}{a^4}} m+\ldots+\log_{\frac{1}{a^{2n}}} m+\ldots$

(57) [Ent'35] เราทราบว่า $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ ดังนั้นอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{2^n}-\frac{3}{n(n+1)}\right)$ มีผลบวกเท่าใด

(58) จงหาค่า

(58.1) S_n ของ $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{16}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}+\ldots$

(58.2) $2+\frac{3}{2}+1+\frac{5}{8}+\ldots+\frac{n+1}{2^{n-1}}+\ldots$

(59) อนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก และถ้าลู่เข้าให้หาค่าอนุกรมด้วย

(59.1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{10^n}{n!}\right)$

(59.2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{2^n}\right)$

(59.3) $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{5i^2-6}{2i^2+7}\right)$

(60) เขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูปเศษส่วน

(60.1) $0.212121\ldots$

(60.2) $0.61041041\ldots$

(60.3) $7.256256\ldots$

(60.4) $2.9999\ldots$

<u>เฉลย</u> (ตัวอย่าง) $a_n = \frac{2n-1}{n^2}$, $(-1)^n$, $(-1)^{n-1}n$, $n(n+1)^2-1$ (1.1) $2,4,8,16$ (1.2) $2,6,10,14$ (1.3) $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16}$ (1.4) $-\frac{1}{4},\frac{2}{9},-\frac{3}{16},\frac{4}{25}$ (2.1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ (2.2) $\left(\frac{1}{n}\right)^2$ (2.3) $2^{n+1}-3$ (2.4) $\frac{3}{10^{n-1}}$ (2.5) $n(n+1)$ (3.1) เลขคณิต, $18-3n$ (3.2) เรขาคณิต, 2^n (3.3) เลขคณิต, $x+2n-2$ (3.4) เลขคณิต, $n\log 2$ (3.5)เรขาคณิต, $(-20)\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ (3.6) เลขคณิต, $4n$ (3.7) เป็นทั้งเลขคณิตและเรขาคณิต, $a_n = 3$ (4) $4.5,5,5.5,12.5$ (5) $2,4,8,2^{17}$ (6) $3n+8$ (7) $26,22,18,14$ (8) $2,4$ (9) $2,6,18,54$ (10) 48 (11) มี, พจน์ที่ 30 (12) พจน์ที่ 19 (13) 54 (14) 334 (15) $\frac{8}{(-2)^n}$ หรือ $\frac{(-2)^n}{2}$ (16) $39,51,63$ (17) $\frac{5}{4}$ (18) 13 (19.1) $10,13$ (19.2)$115,100,85,70$ (20.1)$6,12,24,48$ (20.2) $1,\frac{3}{4},\frac{9}{16}$ หรือ $-1,\frac{3}{4},-\frac{9}{16}$ (21) 15 (22) คนที่ 3 (23) 15 (23.1) หาค่าไม่ได้ (23.2) 0 (23.3) 0 (23.4) 1 (24.1) $\frac{4}{3}$ (24.2) $\frac{2}{5}$ (24.3) 0 (24.4)0 (24.5) หาค่าไม่ได้ (24.6) หาค่าไม่ได้ (25.1) $-\frac{1}{9}$ (25.2) 1 (25.3) หาค่าไม่ได้ (25.4) 2 (25.5) $\frac{1}{3^5}$ (26.1) $\frac{2}{3}$ (26.2) $\frac{4}{9}$ (26.3) 9 (27) 1 (28) 2 (29) 128 (30.1) $\sum_{i=1}^{50} i(i+1)$ (30.2) $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2i}\right)$ (30.3) $\sum_{i=1}^{n}(2^i-1)$ (30.4) $\sum_{i=1}^{q+1} ar^{p+i-1}$ (30.5) $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{i+3}\right)$ (31.1) $1,275$ (31.2) 385 (31.3) 784 (32.1) 10 (32.2) 23 (32.3) $\frac{197}{12}$ (33) $9,128$ (34.1) 440 (34.2) $7,480$ (34.3) $1,740$ (34.4) $\sum_{i=1}^{20}\frac{i(i+1)}{2} = 1,540$ (35)4 (36)10 (37)$\frac{40+740\sqrt{a}}{1-a}$ (38) 648 (39)117.5 (40)$2,601$ (41)210 (42) 184 (43) $5,-4$ หรือ $45,-\frac{4}{3}$ (44) 5 (45) 395 (46) 18 (47) 127.5 (48) 6 (49) $\frac{4}{9}\left(\frac{10}{9}(10^n-1)-n\right)$ (50.1) $\frac{3}{4}$ (50.2) $\frac{1}{3}$ (50.3) $\frac{1,000}{9}$ (50.4) 9 (50.5) 4 (50.6) ลู่ออก (51) 2.23 และ 2.5 (52) $\frac{3}{4}$ (53) $\frac{\log_2 3}{1+\log_2 3}$ (54) 255 (55) 1 (56.1) $\frac{1}{6}$ (56.2) $\frac{30}{61}$ (56.3) $-\log(n+1)$ (56.4) ลู่ออก (57) 2 (58.1) $3-\frac{2n-3}{2^n}$ (58.2) 6 (59.1) ลู่ออก (59.2) 6 (59.3) ลู่ออก (60.1) $\frac{20}{99}$ (60.2) $\frac{3,049}{4,995}$ (60.3) $\frac{3,592}{495}$ (60.4) 3

ลิมิตและความต่อเนื่อง (Limit & Continuity)

ลิมิตของฟังก์ชัน

• ในฟังก์ชัน $y = f(x)$ ใดๆ การพิจารณาว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ค่าจำนวนจริงค่าใดค่าหนึ่ง (เช่น เข้าใกล้ a) แล้ว ค่าของ y หรือ $f(x)$ จะเข้าใกล้ค่าใด นั้นเรียกว่า "การหาลิมิตของ y หรือ $f(x)$" และค่าลิมิตที่ได้จะเขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า $\lim_{x\to a} y$ หรือ $\lim_{x\to a} f(x)$

• เช่น ฟังก์ชัน $y = f(x) = x+3$ พบว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 5 (ไม่ว่า x จะมากกว่าหรือน้อยกว่า 5) แล้ว y จะมีค่าเข้าใกล้ 8 ดังนั้นจึงเขียนเป็นสัญลักษณ์ $\lim_{x\to 5} f(x) = 8$

• ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

$\lim_{x\to a} c = c$	$\lim_{x\to a} [f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$
$\lim_{x\to a} x = a$	$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$
$\lim_{x\to a} x^n = a^n$	$\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$
$\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x)$	$\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$
	$\lim_{x\to a} [f(x) \div g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \div \lim_{x\to a} g(x)$

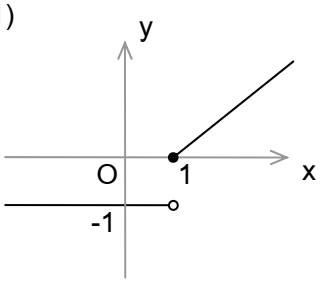
• การหาค่าลิมิตของฟังก์ชันนั้น มีรายละเอียดย่อย 2 แบบ คือ *ลิมิตซ้าย* (Left-handed limit) ซึ่งหาได้จากกรณีที่ x มีค่าเข้าใกล้ a *ทางด้านซ้าย* (หรือ $x < a$) และ *ลิมิตขวา* (Right-handed limit) ซึ่งหาได้จากกรณีที่ x มีค่าเข้าใกล้ a *ทางด้านขวา* (หรือ $x > a$) สัญลักษณ์ที่ใช้แทนลิมิตซ้ายและลิมิตขวา คือ $\lim_{x\to a^-} f(x)$ กับ $\lim_{x\to a^+} f(x)$ ตามลำดับ

• ฟังก์ชันใดๆ จะมีค่า $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ ก็ต่อเมื่อ } \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L}$ เท่านั้น

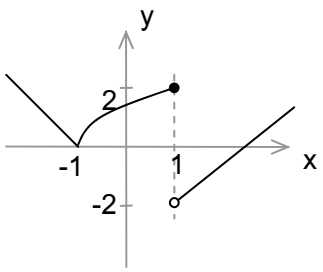
โจทย์

(1) จากกราฟ จงหาค่า $\lim_{x\to -1} f(x)$ และ $\lim_{x\to 1} f(x)$

(1.1)



(1.2)



(2) จงหาค่าของ $\lim_{x\to 2} f(x)$ เมื่อ

(2.1) $f(x) = 1+x$

(2.2) $f(x) = x^3+2x^2+x$

(3) จงหาค่าของ

(3.1) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+1}{x-3}\right)$ (3.3) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}\right)$

(3.2) $\lim_{x\to 3}\sqrt{x^2+x}$

(4) จงหาค่าของ

(4.1) $\lim_{x\to 2} f(x)$ เมื่อ $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 2 \\ 2, & x>2 \end{cases}$

(4.2) $\lim_{x\to 3} f(x)$ เมื่อ $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\ge 3 \\ x-5, & x<3 \end{cases}$

(4.3) $\lim_{x\to 4} f(x)$ เมื่อ $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x+5}, & x\ge 4 \\ 2x-5, & x<4 \end{cases}$

(4.4) $\lim_{x\to 3} f(x)$ และ $\lim_{x\to 4} f(x)$ เมื่อ $f(x)=\begin{cases} x^2, & x<3 \\ 2x, & x\ge 3 \end{cases}$

(5) จงหาค่าของ $\lim_{h\to 0}\left(\frac{[(x+h)^2+1]-(x^2+1)}{h}\right)$

(6) [Ent'39] จงหาค่า $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, และ $\lim_{x\to 2} f(x)$ เมื่อ $f(x)=\frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2}$

(7) [Ent'41] กำหนดให้ $f(x)=\frac{|x^2-9|}{x-3}$ จงหาค่า $\lim_{x\to -3} f(x)$ และ $\lim_{x\to 3} f(x)$

* (8) [Ent'มี.ค.43] $f(x)=\begin{cases} x^2, & x>1 \\ x-1, & 0<x\le 1 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$ จงหาค่า $\lim_{x\to 0^-} f(x^2)+\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{f(x-1)}{x+2}\right]$

<u>ลิมิตของฟังก์ชันในรูปแบบยังไม่กำหนด</u> $(\frac{0}{0})$

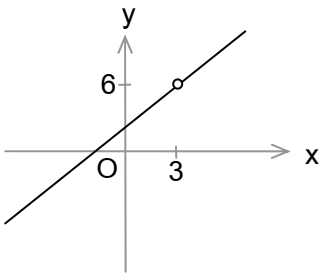
- ตัวอย่างต่อไปนี้ จะพบว่าไม่สามารถหาลิมิตด้วยทฤษฎีบทได้ในทันที เพราะจะให้ผลเป็น $\frac{0}{0}$ ซึ่งเรียกว่า *รูปแบบยังไม่กำหนด* (indeterminate form) คือยังสรุปไม่ได้ว่าค่าลิมิตเป็นเท่าใด

<u>ตัวอย่าง</u> หาค่า $\lim_{x\to 3} f(x)$ เมื่อ $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$

<u>วิธีคิด</u> $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6$

เทคนิคการคำนวณที่ใช้คือ พยายามให้ $x-3$ ในเศษและส่วนมาตัดกัน เพื่อไม่ให้เหลือตัวประกอบในเศษและส่วนเป็นเลข 0 (ในตัวอย่างใช้วิธีแยกตัวประกอบ แต่นอกจากนี้ยังมีอีกหลายเทคนิค เช่นการนำพหุนามมาคูณทั้งเศษและส่วน อาจเป็นสังยุค (conjugate) หรืออื่นๆ แล้วแต่ความเหมาะสม)

• สาเหตุที่เราสามารถกำจัด $x-3$ ทั้งเศษและส่วนได้ ก็เพราะการหาลิมิตนั้นไม่ได้คำนึงถึงตำแหน่งที่ $x=3$ อยู่แล้ว จะเห็นว่าตัวอย่างนี้แม้ $f(3)$ จะหาค่าไม่ได้ แต่ $\lim\limits_{x\to 3}$ ก็ยังหาค่าได้ (เท่ากับ 6) (ดูกราฟประกอบ)



<u>โจทย์</u>

(9) หาค่าของลิมิตต่อไปนี้

(9.1) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-4}{x-2}\right)$ (9.3) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+4x+3}\right)$

(9.2) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}\right)$ (9.4) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{x-a}{x^2-a^2}\right)$

(10) หาค่าของลิมิตต่อไปนี้

(10.1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$ (10.4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x}{\sqrt{x+9}-3}\right)$

(10.2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1}{2-\sqrt{x+3}}\right)$ (10.5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right)$

(10.3) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}\right)$ (10.6) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-2x}\right)$

(11) [Ent'มี.ค.44] $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}\right)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

(12) จงหาค่าของ

(12.1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^3-1}{x^2-1}\right)$ (12.3) $\lim\limits_{x\to -8}\left(\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}\right)$

(12.2) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt[3]{x-1}-1}{x-2}\right)$ (12.4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}\right)$

(13) [Ent'38] จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)+\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ เมื่อ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|-1}{\sqrt{1-x}}, & x<1\\ \dfrac{|1-x|}{1-\sqrt{x}}, & x>1\end{cases}$

<u>หมายเหตุ</u> การหาลิมิตในรูปแบบยังไม่กำหนด เราจะได้ศึกษาวิธีการคำนวณอีกแบบซึ่งง่ายขึ้น เรียกว่า *กฎของโลปีตาล* (L'Hôpital's Rule) ในบทถัดไป (อนุพันธ์ของฟังก์ชัน)

ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

- การพิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ณ จุดใดๆ ก็คือการบอกว่ากราฟของฟังก์ชันขาดตอนที่จุดนั้นหรือไม่ โดยสำหรับฟังก์ชัน $f(x)$ ใดๆ จะต่อเนื่องที่ $x = a$ ก็ต่อเมื่อ $\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x)}$ เท่านั้น (และต้องหาค่าได้ทั้งสามตัว)

- นิยามของ *ความต่อเนื่องบนช่วง*

1. ฟังก์ชัน $f(x)$ ต่อเนื่องบนช่วงเปิด (a,b) ก็ต่อเมื่อ $f(x)$ ต่อเนื่องทุกๆ จุดในช่วง (a,b)

2. ฟังก์ชัน $f(x)$ ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ ก็ต่อเมื่อ $f(x)$ ต่อเนื่องบนช่วง (a,b), ต่อเนื่องทางขวาของ a $[f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x)]$, และต่อเนื่องทางซ้ายของ b $[f(b) = \lim_{x\to b^-} f(x)]$

โจทย์

(14) ฟังก์ชันต่อไปนี้ มีความต่อเนื่องที่ $x = 2$ หรือไม่

(14.1) $f(x) = \dfrac{x^3-8}{x-2}$ (14.2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$

(15) ฟังก์ชันต่อไปนี้มีความต่อเนื่องที่จุดใดบ้าง

(15.1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ (15.3) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{\lvert x\rvert}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$

(15.2) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & x \neq 3 \\ 2, & x = 3 \end{cases}$

(16) ฟังก์ชัน $f(x) = \lvert x+1\rvert$ ต่อเนื่องที่ $x = -1$ หรือไม่

(17) [Ent'มี.ค.42] กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} -3/2, & x \leq -1 \\ \dfrac{2x^2+x-1}{2(x+1)}, & -1 < x \leq 1 \\ \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & x > 1 \end{cases}$ แล้ว ข้อความใดถูกบ้าง

ก. f ต่อเนื่องที่ $x = -1$ ข. f ต่อเนื่องที่ $x = 1$

(18) [Ent'ต.ค.41] กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3x+1}, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ \dfrac{2-\sqrt{5-x}}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$ แล้ว ข้อความใดถูกบ้าง

ก. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$ ข. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$

(19) จงหาค่า a ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases}3x+a, & x=2\\ \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2\end{cases}$ มีความต่อเนื่องที่ $x=2$

(20) จงหาค่า b ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x\in(-\infty,1)\\ x+b, & x\in[1,\infty)\end{cases}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

(21) จงหาค่า b ที่ทำให้ $f(x)=\begin{cases}2, & x\leq 1\\ \dfrac{|x-5|}{|x-2|-b}, & 1<x<2\\ x^2-5, & x\geq 2\end{cases}$ ต่อเนื่องที่ $x=2$

และถามว่า ค่า b ที่ได้นี้ทำให้ $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x=1$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

(22) ถ้าฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases}ax, & x<1\\ 4, & x=1\\ x+b, & x>1\end{cases}$ ต่อเนื่องที่จุดซึ่ง $x=1$ แล้ว จงหาค่า a, b

(23) จงหาค่า h, k ในแต่ละข้อ เมื่อฟังก์ชันที่กำหนดให้นี้มีความต่อเนื่องบนช่วง $[1,3]$

(23.1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-2)^2}{x^2-4}, & x>2\\ h, & x=2\\ 2x+k, & x<2\end{cases}$ (23.2) $f(x)=\begin{cases}h, & x=1\\ \dfrac{x-1}{x^2-4x}, & 1<x<3\\ k, & x=3\end{cases}$

(24) [Ent'37] กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-1}$ ถ้าต้องการให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริงแล้ว จะต้องนิยามเพิ่มเติมให้ $f(-1)$ และ $f(1)$ มีค่าเท่าใด

(25) [Ent'ต.ค.42] กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง โดยที่ $f(x)=\dfrac{x^3-x^2-4x+4}{4-x^2}$ เมื่อ $x\neq\pm 2$ และ $f(2)=a, f(-2)=b$ แล้ว a และ b มีค่าเท่าใด

<u>เฉลย</u> (1.1) -1, ไม่มี (1.2) 0, ไม่มี (2.1) 3 (2.2) 18 (3.1) -1 (3.2) $\sqrt{12}$ (3.3) หาค่าไม่ได้ (4.1) ไม่มี (4.2) ไม่มี (4.3) 3 (4.4) ไม่มี, 8 (5) $2x$ (6) -1, 1, ไม่มี (7) 0, ไม่มีลิมิต (8) $-4/3$ (9.1) 4 (9.2) $4/5$ (9.3) -2 (9.4) $1/2a$ (10.1) $1/2$ (10.2) -4 (10.3) $1/2$ (10.4) 12 (10.5) $1/2$ (10.6) $1/4\sqrt{2}$ (11) $1/2$ (12.1) $3/2$ (12.2) $1/3$ (12.3) -2 (12.4) $3/4$ (13) $0+(-2)=-2$ (14.1) ไม่ต่อเนื่อง เพราะไม่มี $f(2)$ (14.2) ต่อเนื่อง (15.1) ทุกจุดยกเว้นที่ $x=0$ (15.2) ทุกจุดยกเว้นที่ $x=3$ (15.3) ทุกจุดยกเว้นที่ $x=0$ (16) ต่อเนื่อง (17) ก.ถูก และ ข.ถูก (18) ก.ถูก และ ข.ผิด (19) -2 (20) -1 (21) 3, ไม่ต่อเนื่องที่ $x=1$ เพราะลิมิตซ้ายไม่เท่ากับขวา (22) $4, 3$ (23.1) $0, -4$ (23.2) $-2/3, -4/3$ (24) $-3, -1$ (25) $-1, 3$

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน (Derivative)

<u>อัตราการเปลี่ยนแปลง</u>

ในฟังก์ชัน $y = f(x)$ ใดๆ เราพิจารณาหา "อัตราการเปลี่ยนแปลงของค่าฟังก์ชัน" ได้ดังนี้

ที่จุด $x = x_1$ จะได้ $y = f(x_1)$

ที่จุด $x = x_2 = x_1+h$ จะได้ $y = f(x_1+h)$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงโดยเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง x_1 ถึง x_1+h คือ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{(x_1+h) - (x_1)} = \frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h}$$

หรือ "*อัตราการเปลี่ยนแปลงโดยเฉลี่ยของ* y *เทียบกับ* x *(<u>ในช่วง</u>* x *ถึง* $x+h$ *ใดๆ)*" คือ

$$\boxed{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}} \text{ หรือ } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

และเมื่อเราบีบช่วง h ให้แคบลงจนใกล้ 0 ก็จะได้อัตราการเปลี่ยนแปลง ณ จุด x ที่กำหนด ฉะนั้น "*อัตราการเปลี่ยนแปลงของ* y *(<u>ที่จุด</u>* x *ใดๆ)*" คือ

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}} \text{ หรือ } \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

(ไม่สามารถแทน $h = 0$ ลงไปตรงๆ ได้ เพราะจะเป็น $\frac{0}{0}$ จึงต้องใช้ลิมิตช่วยในการคำนวณ)

<u>โจทย์</u>

(1) ให้ $y = x^2-x+1$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงโดยเฉลี่ยของ y เมื่อเทียบกับ x <u>ในช่วง</u> $x = 3$ ถึง 5

(2) จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y

(2.1) $y = 2x^2+3x-4$ เมื่อ x มีค่าใดๆ

(2.2) $y = 3x^2+7x+1$ <u>ที่จุด</u> $x = 2$

(3) ให้ $y = x^2$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลง

(3.1) โดยเฉลี่ยของ y เมื่อเทียบกับ x <u>ในช่วง</u> $x = x_1$ ถึง $x = x_1+h$

(3.2) โดยเฉลี่ยของ y เมื่อเทียบกับ x ในช่วง $x = 10$ ถึง 13

(3.3) ของ y <u>ที่จุด</u> $x = x_1$

(3.4) ของ y ที่จุด $x = 10$

(4) ถ้า $f(x) = \frac{1}{x}$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ $f(x)$ เทียบกับ x

(4.1) ในช่วง $x = 4$ ถึง $x = 5$

(4.2) ในช่วง $x = 4$ ถึง $x = 4.5$

(4.3) ในช่วง $x = 4$ ถึง $x = 4.01$

(4.4) ที่จุดซึ่ง $x = 4$

(5) จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงโดยเฉลี่ยของปริมาตรทรงกลม เทียบกับรัศมี เมื่อรัศมีเปลี่ยนจาก 2 ถึง 3 หน่วย

(6) จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ

(6.1) พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเทียบกับความยาวด้าน ขณะที่ด้านยาว 5 ซม.

(6.2) พื้นที่วงกลมเทียบกับรัศมี ขณะที่รัศมียาว 10 นิ้ว

(7) ให้หาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรกรวยกลมตรง

(7.1) เทียบกับรัศมีฐาน r เมื่อส่วนสูง H คงตัว

(7.2) เทียบกับส่วนสูง H เมื่อรัศมีฐาน r คงตัว

(8) ในการสูบน้ำออกจากสระแห่งหนึ่ง หลังจากสูบได้ t นาที จะมีน้ำเหลืออยู่ในสระเป็นปริมาตร Q ลบ.ม. โดยที่ $Q = (12 - \frac{t}{10})^2$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลง

(8.1) โดยเฉลี่ย ของปริมาตรน้ำในสระ เทียบกับเวลา ในช่วง $t = 0$ ถึง $t = 10$ นาที

(8.2) ของปริมาตรน้ำในสระ เทียบกับเวลา ขณะที่ $t = 10$ นาที

<u>อนุพันธ์ของฟังก์ชัน</u>

อัตราการเปลี่ยนแปลง ของ $y = f(x)$ ที่จุด x ใดๆ เรียกอีกอย่างได้ว่า *อนุพันธ์* (Derivative) ฉะนั้น อนุพันธ์ของ $f(x)$ ก็คือ $\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$ นั่นเอง

นอกจากนั้นยังเป็นค่า *ความชัน* (Slope) ของกราฟ $y = f(x)$ ณ จุดนั้นๆ ด้วย

สัญลักษณ์ที่ใช้แทนอนุพันธ์ของ $f(x)$ ได้แก่ $f'(x)$ หรือ $\frac{dy}{dx}$ หรือ $\frac{d}{dx}f(x)$ หรือ y' ก็ได้

ส่วนสัญลักษณ์ที่ใช้เจาะจงตำแหน่ง เช่น อนุพันธ์ที่จุดซึ่ง $x = 3$ จะใช้ $f'(3)$ หรือ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=3}$

<u>โจทย์</u>

(9) จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ ที่จุด x ใดๆ และที่จุด $x = 2$

(9.1) $f(x) = 2x^2$

(9.2) $f(x) = x^2-2x+4$

(9.3) $f(x) = 3$

(9.4) $f(x) = \sqrt{2-3t}$

(10) ถ้า $y = x-2x^2$ เป็นสมการเส้นโค้ง จงหา

(10.1) ความชันของเส้นโค้งนี้ที่จุด $(2,-6)$

(10.2) สมการเส้นสัมผัสโค้ง ณ จุดเดียวกันนี้

(11) ให้หาสมการเส้นสัมผัสโค้ง $y = x^3$ ณ จุด $(-1,-1)$

<u>สูตรในการหาอนุพันธ์</u>

เนื่องจากการใช้ลิมิตคำนวณนั้นไม่สะดวก จึงได้มีการคิดสูตรในการหาอนุพันธ์ไว้ดังนี้

1. สูตรทั่วไป

- $\frac{d}{dx}x = 1$
- $\frac{d}{dx}c = 0$
- $\frac{d}{dx}x^n = n\,x^{n-1}$
- $\frac{d}{dx}c\,f(x) = c\,\frac{d}{dx}f(x)$

2. การบวกลบคูณหารฟังก์ชัน

- $\frac{d}{dx}\left[f(x) \pm g(x)\right] = f'(x) \pm g'(x)$
- $\frac{d}{dx}\left[f(x) \cdot g(x)\right] = f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)$
- $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\,f'(x) - f(x)\,g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$

3. ฟังก์ชันคอมโพสิท (กฎลูกโซ่; Chain Rule)

- $\frac{d}{dx}g(f(x)) = \frac{dg}{df} \cdot \frac{df}{dx}$

กฎลูกโซ่จะเขียนยาวกี่ทอดก็ได้ เช่น $\frac{dg}{dt} = \frac{dg}{dh} \cdot \frac{dh}{df} \cdot \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$

<u>โจทย์</u>

(12) จงหาค่า $f'(x)$ เมื่อกำหนด $f(x)$ ให้ดังนี้

(12.1) $f(x) = 5$

(12.2) $f(x) = x$

(12.3) $f(x) = -3x$

(12.4) $f(x) = -3x^2$

(12.5) $f(x) = x^2+x$

(12.6) $f(x) = 3x^2-5x+1$

(12.7) $f(x) = (3x^3-4x^2) + (7x^2-5)$

(12.8) $f(x) = x^5-x^{-3}$

(12.9) $f(x) = 1/x$

(12.10) $f(x) = 2/x^2$

(12.11) $f(x) = 6\sqrt{x}$

(12.12) $f(x) = 1 / 3x\sqrt{x}$

(13) จงหาค่า $f'(x)$ เมื่อกำหนด $f(x)$ ให้ดังนี้

(13.1) $f(x) = (6x^2+4)(3x^3+5)$

(13.2) $f(x) = (2x^4+1)(x^2+x+1)$

(13.3) $f(x) = \frac{4x^2+7x+1}{3x^2+8}$

(13.4) $f(x) = \frac{x^2+4x+7}{3x-1}$

(14) จงหาค่า $f'(x)$ เมื่อกำหนด $f(x)$ ให้ดังนี้

(14.1) $f(x) = (x+3)^2$

(14.2) $f(x) = (x^2+1)^3$

(14.3) $f(x) = (x^3-x^2+2x+1)^2$

(14.4) $f(x) = (1-4x)^{4/5}$

(15) ตรวจสอบคำตอบข้อ (2), (3.3), (3.4), (4.4), (6), (7), (8.2) โดยใช้สูตรในการหาอนุพันธ์

(16) จงหาค่า $f'(x)$ เมื่อกำหนด $f(x)$ ให้ดังนี้

(16.1) $f(x) = (2x+3)(3x-4)$

(16.2) $f(x) = \dfrac{4x^5-10x^3+6x-8}{2x^2}$

(16.3) $f(x) = \dfrac{1+3x}{1-3x}$

(16.4) $f(x) = (3x-5)^3$

(17) จงหาค่าของ

(17.1) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ เมื่อ $y = f(x) = (2x+1)^2(3x-2)^3$

(17.2) $f'(1)$ เมื่อ $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2-2x+3}}$

(17.3) ความชันเส้นสัมผัสโค้ง ณ จุดที่ $x=1$ เมื่อ $f(x) = \sqrt{x^2+8}(x^2-3)^4$

(17.4) อัตราการเปลี่ยนแปลงของ $f(x)$ ณ จุดที่ $x=1$ เมื่อ $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

<u>อนุพันธ์อันดับสูง</u>

สมมติ $f(x) = y = x^3-2x^2+x+5$ ดังนั้น หาอนุพันธ์ได้เป็น $f'(x) = \dfrac{dy}{dx} = 3x^2-4x+1$

หากเราหาอนุพันธ์ของ $f'(x)$ ต่อไปอีก จะเรียกว่าเป็นอนุพันธ์ *อันดับสูง* (Higher Order)

เช่น อนุพันธ์อันดับสอง คือ $f''(x) = \dfrac{d^2y}{dx^2} = 6x-4$

อนุพันธ์อันดับสาม คือ $f'''(x) = \dfrac{d^3y}{dx^3} = 6$

อนุพันธ์อันดับสี่ คือ $f^{(4)}(x) = \dfrac{d^4y}{dx^4} = 0$ ... ฯลฯ

<u>ข้อสังเกต</u> **1.** การเขียนสัญลักษณ์ อนุพันธ์อันดับที่ n จะเป็น $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ หรือ $f^{(n)}(x)$

แต่อันดับที่หนึ่ง สอง และสาม นิยมใช้เครื่องหมายขีด เป็น $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$

2. ตัวอย่างที่ยกมาเป็นพหุนามดีกรี 3 จะเห็นได้ว่า อนุพันธ์อันดับที่สี่ขึ้นไปล้วนมีค่าเป็น 0

<u>โจทย์</u>

(18) ให้หาค่าอนุพันธ์อันดับสูง $f''(x)$, $f'''(x)$ และ $f^{(4)}(x)$ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(18.1) $f(x) = x^4+3x^3+5x^2-7x-3$

(18.2) $f(x) = x^5+3x^4-4x^3+x-1$

(19) จงหาค่า $f(-3), f'(-3), f''(-3)$ เมื่อ $f(x) = x^2+x-3$

(20) หาค่า $(f''+g'')(1)$ เมื่อ $f(x) = \sqrt{2-x}$ และ $g(x) = (1-3x)^2$

(21) จงหา $f^{(n)}(x)$ เมื่อ $f(x) = 1/x$

<u>ฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด และค่าสุดขีด</u>

ความหมายของฟังก์ชันเพิ่มคือ เมื่อ x เพิ่มขึ้นแล้ว $f(x)$ ก็จะเพิ่มขึ้นด้วย หรือกล่าวว่า ความชันเป็นบวก ส่วนฟังก์ชันลดนั้น เมื่อ x เพิ่มขึ้นแล้ว $f(x)$ กลับลดลง หรือกล่าวว่า ความชันเป็นลบนั่นเอง ดังนั้นเมื่อพิจารณาร่วมกับอนุพันธ์ $f'(x)$ ซึ่งก็เป็นความชัน จึงได้กฎว่า

ช่วงที่ $f'(x) > 0$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และช่วงที่ $f'(x) < 0$ เป็นฟังก์ชันลด

และเนื่องจากตำแหน่งที่ฟังก์ชันจะเปลี่ยนจากเพิ่มไปลด หรือจากลดไปเพิ่ม จะต้องมีการวกกลับของกราฟ ซึ่งทำให้เกิดจุดยอด (*จุดสุดขีด*; Extreme Point) ขึ้น สามารถหาโดย $f'(x) = 0$

จุดสุดขีด จะมีค่า $f'(x) = 0$ เรียกค่า x ณ จุดนั้นว่า *ค่าวิกฤต* (Critical Value)

จุดสุดขีด มีสองแบบ คือจุดสูงสุดและจุดต่ำสุด ถ้าความชันเปลี่ยนจากลดไปเพิ่ม จะเกิดจุดต่ำสุด และถ้าความชันเปลี่ยนจากเพิ่มไปลด จะเกิดจุดสูงสุด

<u>หมายเหตุ</u> **1.** $f'(x) = 0$ ไม่ได้เป็นจุดสูงสุดหรือต่ำสุดเสมอไป อาจเป็นจุดเปลี่ยนเว้าเท่านั้น เราสามารถพิจารณาให้ละเอียดได้จาก *อัตราการเปลี่ยนแปลงของความชัน* หรือ $f''(x)$

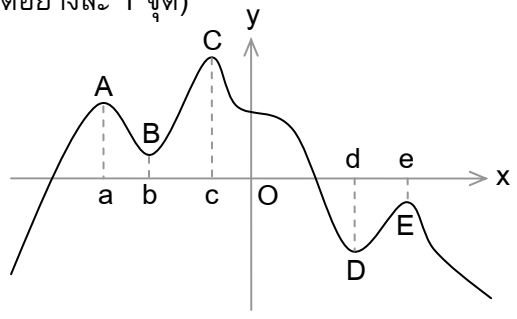
หาก $f''(x) > 0$ แสดงว่าความชันเปลี่ยนจากลดไปเพิ่ม เกิดจุดต่ำสุด

หาก $f''(x) < 0$ แสดงว่าความชันเปลี่ยนจากเพิ่มไปลด เกิดจุดสูงสุด

หาก $f''(x) = 0$ เป็นเพียงจุดเปลี่ยนเว้า ไม่ใช่จุดสุดขีด

2. เราใช้ความรู้เรื่องค่าสูงสุดต่ำสุด (Maximum & Minimum) ของฟังก์ชัน ในการคำนวณโจทย์ปัญหาที่เป็นเหตุการณ์จริง เช่น มีฟังก์ชันกำไร $P(x)$ แล้วหาค่า x ที่ทำให้ได้กำไรมากที่สุด

• พิจารณากราฟต่อไปนี้ เพื่อทำความเข้าใจเรื่อง *สัมพัทธ์* (Relative) และ *สัมบูรณ์* (Absolute) ฟังก์ชันหนึ่งๆ หากมีการวกกลับของกราฟ ณ จุดใด ก็จะเรียกจุดนั้นว่าจุดสุดขีดสัมพัทธ์ (แปลว่าเทียบกับจุดข้างเคียง, จึงมีจุดสุดขีดสัมพัทธ์ได้หลายจุด) และหากจุดใดมีค่าฟังก์ชันมากที่สุดหรือน้อยที่สุดที่สุดของกราฟแล้ว จะเรียกจุดนั้นว่าจุดสุดขีดสัมบูรณ์ด้วย (สูงสุดกับต่ำสุด มีได้อย่างละ 1 จุด)



จุดสูงสุดสัมพัทธ์ได้แก่ จุด A, C, E

จุดสูงสุดสัมบูรณ์ คือจุด C เท่านั้น

จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ได้แก่ จุด B, D

จุดต่ำสุดสัมบูรณ์ ไม่มี

โจทย์

(22) จากกราฟในตัวอย่างข้างต้น ให้หาช่วงที่เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และช่วงที่เป็นฟังก์ชันลด

(23) หาค่าสูงสุดและต่ำสุด ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(23.1) $f(x) = -x^2-x$

(23.2) $f(x) = x^2-x-1$

(23.3) $f(x) = 3x+2$

(24) จงหาค่าสุดขีดทั้งหมด และระบุช่วงที่เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด สำหรับฟังก์ชันต่อไปนี้

(24.1) $f(x) = x^2-4x+5$

(24.2) $f(x) = x^3-3x$

(24.3) $f(x) = 2x^3+3x^2-12x-7$

(24.4) $f(x) = x^4-3x^3+3x^2-x$

(24.5) $f(x) = x^3$

(24.6) $f(x) = x^2-2x+1 \ ; \ x \in [-1, 2]$

(25) ให้หาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และต่ำสุดสัมพัทธ์ทั้งหมดของฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยไม่ต้องวาดกราฟ

(25.1) $f(x) = 3-x^2$

(25.2) $f(x) = x^2+3x+4$

(25.3) $f(x) = x^3-3x+3$

(25.4) $f(x) = x^4-2x^2+3$

(25.5) $f(x) = x^3+x^2-8x-1$

(26) ให้เขียนกราฟและบอกค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของ $y = 2x^5-30x^3$

(27) จงหาจำนวนเต็มบวกสองจำนวนซึ่งรวมกันได้ 8 โดยที่ผลบวกของกำลังสามมีค่าน้อยที่สุด

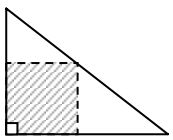
(28) วัตถุเคลื่อนที่ได้ระยะทาง $s = 3t^2-2t+1$ เมตร ในเวลา t วินาที จงหา

(28.1) ความเร็ว v ของวัตถุ ขณะเริ่มต้น และขณะ $t = 2$ วินาที

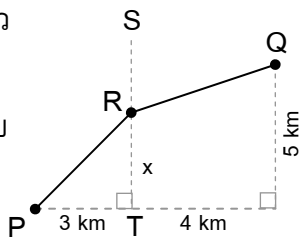
(28.2) ระยะทางที่ไกลที่สุดจากจุดเริ่มต้นที่วัตถุเคลื่อนที่ไปถึง (ก่อนจะวกกลับ)

(29) ชาวสวนปลูกมะม่วง 22 ต้นต่อไร่ จะได้ต้นละ 500 ผล และเขาพบว่าหากปลูกเพิ่มอีกไร่ละต้น จะทำให้ผลลดลงต้นละ 10 ผล ดังนั้นแล้วเขาควรจะปลูกไร่ละกี่ต้นจึงจะได้ผลมากที่สุด

(30) สามเหลี่ยมมุมฉากยาวด้านละ 90, 120, 150 หน่วย ให้หาว่าจะบรรจุสี่เหลี่ยมมุมฉากลงไปภายในสามเหลี่ยมนี้ (ให้มีมุมฉากร่วมกันดังภาพ) ได้พื้นที่มากที่สุดเท่าใด

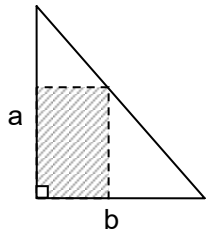


(31) จากภาพ บริษัทก่อสร้างต้องการวางท่อจากจุด P ไปยัง Q ตามแนว PR และ RQ (โดยจุด R อยู่ที่ใดก็ได้บนเส้น TS) จงหาว่า R อยู่ที่ค่า x เป็นเท่าใด จึงสิ้นเปลืองค่าวางท่อน้อยที่สุด กำหนดให้ค่าก่อสร้าง (หน่วยเป็นล้านบาท) ระหว่าง P ถึง R เป็นสองเท่าของกำลังสองของระยะทาง และระหว่าง R ถึง Q เป็นสามเท่าของกำลังสองของระยะทาง



(32) ให้คำนวณค่าต่างๆ เมื่อต้องการทำให้เกิดค่ามากที่สุด ในแต่ละรูปต่อไปนี้

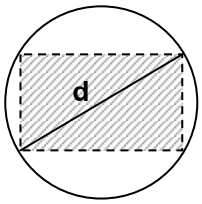
(32.1) พื้นที่สี่เหลี่ยมมุมฉากมากที่สุด บรรจุในสามเหลี่ยมมุมฉาก ใช้มุมฉากร่วมกัน



กว้างยาว = _____

พื้นที่ = _____

(32.2) พื้นที่สี่เหลี่ยมมุมฉากมากที่สุด บรรจุในวงกลมขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง d

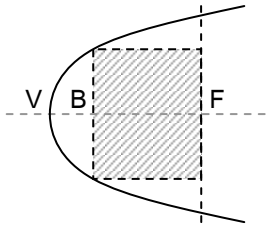


กว้างยาว = _____

พื้นที่ = _____

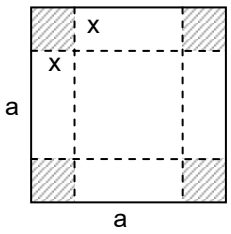
หากเป็นครึ่งวงกลม จะได้พื้นที่ = _____

(32.3) พื้นที่สี่เหลี่ยมมุมฉากมากที่สุด บรรจุในพาราโบลา โดยวางด้านหนึ่งบนโฟกัส



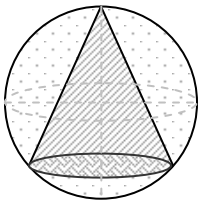
$|\overline{BF}|$ = _____

(32.4) ปริมาตรกล่องมากที่สุดที่พับได้ เมื่อตัดมุมกระดาษรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสออก



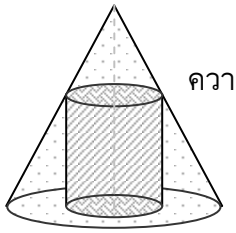
x = _____

(32.5) ปริมาตรกรวยกลม มากที่สุด บรรจุในทรงกลมรัศมี r



ความสูงกรวย = _____

(32.6) ปริมาตรทรงกระบอกมากที่สุด บรรจุในกรวยกลมตรง สูง H



ความสูงทรงกระบอก = ___

<u>กฎของโลปีตาล</u> (L'Hôpital's Rule)

การหาลิมิตรูปแบบยังไม่กำหนด ได้แก่ $\frac{0}{0}$ กับ $\frac{\infty}{\infty}$ นอกจากจะหาโดยการจัดรูปแล้ว สามารถหาอย่างง่ายๆ ได้โดยกฎของโลปีตาล ซึ่งกล่าวว่า

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$ เมื่อ $f(a)=g(a)=0$ หรือ $f(a)=g(a)=\infty$ เท่านั้น

<u>โจทย์</u>

(33) จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้โดยใช้กฎของโลปีตาล

(33.1) $\lim_{x\to -5}\left(\frac{x^2-25}{x+5}\right)$

(33.8) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$

(33.2) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x^2+x-6}\right)$

(33.3) $\lim_{x\to a}\left(\frac{x-a}{x^2-a^2}\right)$

(33.4) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{2x^2-3x-2}{x^2-4}\right)$

(33.5) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-1}{x-1}\right)$

(33.6) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-1}{x^2-1}\right)$

(33.7) $\lim_{x\to 9}\left(\frac{3-\sqrt{x}}{9-x}\right)$

(33.9) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}\right)$

(33.10) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{25+x}-5}{x}\right)$

(33.11) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1}\right)$

(33.12) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-2x}\right)$

(33.13) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt[3]{x-1}-1}{x-2}\right)$

(33.14) $\lim_{x\to -8}\left(\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}\right)$

(34) [Ent'มี.ค.44] $\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}\right)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

(35) จงหาค่าของ

(35.1) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1/x}{2/x^2}\right)$

(35.2) $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x-a}{x^2-a^2}\right)$

(35.3) $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x^2-2x}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}\right)$

(35.4) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-3x+2}{2x^3-3x^2+1}\right)$

(35.5) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3}{x^2}\right)$

<u>โจทย์ทบทวนเรื่องอนุพันธ์</u>

(36) [Ent'38] กำหนดให้ $f(x)=\frac{3x+1}{2x-1}$ และ $g(x)=\sqrt{3x^2+1}$ อนุพันธ์ของ $[f(x)+g(x)]$ ที่ $x=1$ เท่ากับเท่าใด

(37) [Ent'38] สมการเส้นสัมผัสโค้ง $y=\sqrt[3]{x^2+2}$ ที่จุดซึ่ง $x=5$ เป็นสมการใด

(38) [Ent'มี.ค.44] ถ้าเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y=(x-1)^2(2x-\frac{5}{4})$ ที่จุด $(\frac{1}{2},-\frac{1}{16})$ ทำมุม θ กับแกน x โดยที่ $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ แล้ว $\sin^2\frac{\theta}{2}$ มีค่าเท่าใด

(39) [Ent'39] กำหนดให้ $f(x)=\frac{2x-a}{x+b}$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริงซึ่งไม่ใช่ศูนย์ ถ้า $f'(0)=4$ และ $f''(0)=-8$ แล้ว ค่าของ $f(0)$ เป็นเท่าใด

(40) [Ent'มี.ค.43] กำหนดให้ $f(x)=ax^3+x^2+x+b$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง และ $f(1)=3$, $f'(1)=0$ ถ้า $g(x)=f''(x)$ แล้ว $(gof)(-1)$ มีค่าเท่าใด

(41) [Ent'มี.ค.43] กำหนดให้ $f(x) = x^3+cx^2-9x$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริง ถ้าค่าวิกฤตค่าหนึ่งของ f คือ 1 แล้ว f เป็นฟังก์ชันลดในช่วงใด

(42) [Ent'38] กำหนดให้ $f(x) = x^3+bx^2+cx$ เมื่อ b, c เป็นจำนวนจริง ถ้า $x = -2$ เป็นค่าวิกฤตของฟังก์ชัน f และ $f''(-1) = 6$ แล้ว ข้อใดถูก

ก. f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ข. f เป็นฟังก์ชันลด

ค. $x = -2$ ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ง. $x = -1$ ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

(43) [Ent'40] กำหนดให้ $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ มี $x-1$ เป็นตัวประกอบหนึ่ง และ $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$, $f''(0) + f'''(0) = 1$ ดังนั้น $f(2)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

(44) [Ent'มี.ค.42] กำหนดให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริง และ $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ โดยที่ f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เป็น 2 ที่ $x=1$ นอกจากนั้น $f''(1) = -4$, $f(0) = 1$ แล้ว f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุดซึ่ง x เท่ากับเท่าไร

(45) [Ent'มี.ค.44] กำหนดให้ $f(x) = ax^3+bx$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง และ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ -2 ที่จุดซึ่ง $x=1$ ถ้า $g(x) = x^3+ f'(x)$ แล้ว g เป็นฟังก์ชันลดในช่วงใด

(46) [Ent'37] ให้ $f(x) = 3x-10$ และ $h(x) = (fog)(x) = ax^2+bx+c$ ถ้า $h(0) = 1$ และ h มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -2$ คือ 5 แล้วค่า $g(1)$ เป็นเท่าใด

(47) [Ent'ต.ค.42] ให้ u และ v เป็นฟังก์ชันของ x โดยที่ $v(x)=x^2-2x$ ถ้า $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ และ $u(3) = -9$, $u'(3) = 3$ แล้ว ค่าของ $f'(3)$ เท่ากับเท่าใด

(48) [Ent'มี.ค.42] ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และ $f(3) = -2$, $f'(3) = 5$ ถ้า $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2+1}$ แล้ว $g'(3)$ มีค่าเท่าใด

(49) [Ent'41] กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{(x^2-1)^3}{g(x)}$ โดยที่ $g(2) = f'(2) = 3$ แล้ว จงหา $g'(2)$

(50) [Ent'ต.ค.43] ให้ $f(x) = x^3-x^2+g(x)$ และ $f'(2) = f(2) = 2$ แล้ว จงหา $\left(\dfrac{g}{f}\right)'(2)$

(51) [Ent'ต.ค.41] กำหนด f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ และ $F(x) = \sqrt{(f(x))^3+15}$ ถ้า $F(1) = f'(1) = 4$ แล้ว $F'(1)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

(52) [Ent'40] กำหนดให้ $f(x) = (3x^2+5x)g(x)$ ถ้า g เป็นฟังก์ชันพหุนามที่มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับ 5 ที่จุดซึ่ง $x = 1$ แล้ว $f'(1)$ มีค่าเท่าใด

(53) [Ent'39] กำหนดให้ $g(x)$ เป็นพนุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง และ $f(x) = (x-1)^2 g(x)$ ถ้า $x-2$ หาร $f(x)$ เหลือเศษ 3 และ $x-2$ หาร $f'(x)$ เหลือเศษ 4 แล้ว ค่าของ $g'(2)$ เป็นเท่าใด

(54) [Ent'36] ให้ $f(x) = \sqrt{x} + x$ แล้ว จงหาเซตของจำนวนจริง x ซึ่งทำให้ $f'(x) \geq 3$

(55) [Ent'39] กำหนดให้ $f(x) = x^{2/3}(x^2-16)$ จงหาเซต $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid f'(x) > 0 \}$

(56) [Ent'41] ถ้า $f(x) = x+1$, $g(x) = \sqrt{x}$ และ $F(x) = (fog)(x)$ เมื่อ $x \geq 1$ แล้ว $(F^{-1})'(2)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

(57) [Ent'ต.ค.43] กำหนดให้ $f(x) = ax^3-4x^2+1$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว และ

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & ,x > 1 \\ f'(x) & ,x < 1 \\ 0 & ,x = 1 \end{cases}$$

ถ้า $g(x)$ มีลิมิตที่ 1 แล้ว a มีค่าเท่าใด

(58) [Ent'ต.ค.41] ให้ $f(x) = x^8-x^6$ และ f' คืออนุพันธ์ของ f ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งมี $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} (fof')(a_n)$ เท่ากับเท่าใด

(59) [Ent'39] สามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีด้านทั้งสามยาว $3, 4, 5$ นิ้ว ตามลำดับ สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีพื้นที่มากที่สุดที่สามารถบรรจุลงในสามเหลี่ยมนี้ได้ จะมีพื้นที่กี่ตารางนิ้ว

(60) [Ent'38] สินค้าชนิดหนึ่งขายราคาชิ้นละ 24 บาท ต้นทุนในการผลิต x ชิ้นเท่ากับ $16+6x+0.2x^{3/2}$ บาท ถ้า N เป็นจำนวนชิ้นของสินค้าที่ผลิตเพื่อให้ได้กำไรสูงสุดแล้ว ข้อใดเป็นจริง

ก. $1 \leq N < 2000$ ข. $2000 \leq N < 4000$

ค. $4000 \leq N < 6000$ ง. $6000 \leq N < 8000$

<u>เฉลย</u>

(1) 7 (2.1) $4x+3$ (2.2) 19 (3.1) $2x_1+h$ (3.2) 23 (3.3) $2x_1$ (3.4) 20 (4.1) $-\frac{1}{20}$ (4.2) $-\frac{1}{18}$ (4.3) $-\frac{1}{16.04}$ (4.4) $-\frac{1}{16}$ (5) $\frac{76\pi}{3}$ ลบ.หน่วย ต่อหน่วย (6.1) 10 ตร.ซม. ต่อ ซม. (6.2) 20π ตร.นิ้ว ต่อนิ้ว (7.1) $\frac{2}{3}\pi rH$ (7.2) $\frac{1}{3}\pi r^2$ (8.1) -2.3 ลบ.ม. ต่อนาที (8.2) -2.2 ลบ.ม. ต่อนาที (9.1) $4x, 8$ (9.2) $2x-2, 2$ (9.3) $0, 0$ (9.4) $0, 0$ (10.1) -7 (10.2) $y = -7x+8$ (11) $y = 3x+2$ (12.1) 0 (12.2) 1 (12.3) -3 (12.4) $-6x$ (12.5) $2x+1$ (12.6) $6x-5$ (12.7) $9x^2+6x$ (12.8) $5x^4+3x^{-4}$ (12.9) $-\frac{1}{x^2}$ (12.10) $-\frac{4}{x^3}$ (12.11) $\frac{3}{\sqrt{x}}$ (12.12) $\frac{1}{2x^2\sqrt{x}}$ (13.1) $90x^4+36x^2+60x$ (13.2) $10x^5+10x^4+8x^3+2x+1$ (13.3) $\frac{-33x^2+58x+56}{(3x^2+8)^2}$ (13.4) $\frac{3x^2-2x-25}{(3x-1)^2}$ (14.1) $2x+6$ (14.2) $6x(x^2+1)^2$ (14.3) $2(x^3-x^2+2x+1)(3x^2-2x+2)$ (14.4) $-\frac{16}{5\sqrt[5]{1-4x}}$ (15) ... (16.1) $12x+1$ (16.2) $6x^2-5-\frac{3}{x^2}+\frac{8}{x^3}$ (16.3) $\frac{6}{(1-3x)^2}$ (16.4) $9(3x-5)^2$ (17.1) 93 (17.2) 0 (17.3) $197\frac{1}{3}$ (17.4) หาค่าไม่ได้ (18.1) $12x^2+18x+10$, $24x+18$, 24 (18.2) $20x^3+36x^2-24x$,

$60x^2+72x-24,\ 120x+72$ (19) $3, -5, 2$ (20) $17\frac{3}{4}$ (21) $\frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}$ (22) ฟังก์ชันเพิ่ม $(-\infty, a] \cup [b, c] \cup [d, e]$ และฟังก์ชันลด $[a, b] \cup [c, d] \cup [e, \infty)$ (23.1) สูงสุด $\frac{1}{4}$ ต่ำสุดหาค่าไม่ได้ (23.2) สูงสุดหาค่าไม่ได้ ต่ำสุด $-\frac{5}{4}$ (23.3) สูงสุดและต่ำสุดหาค่าไม่ได้ (24.1) ต่ำสุดสัมพัทธ์และสัมบูรณ์ 1 สูงสุดสัมพัทธ์ไม่มี สูงสุดสัมบูรณ์หาค่าไม่ได้ ฟังก์ชันลด $(-\infty, 1]$ ฟังก์ชันเพิ่ม $[1, \infty)$ (24.2) ต่ำสุดสัมพัทธ์ -2 ต่ำสุดสัมบูรณ์หาค่าไม่ได้ สูงสุดสัมพัทธ์ 2 สูงสุดสัมบูรณ์หาค่าไม่ได้ ฟังก์ชันลด $[-1, 1]$ ฟังก์ชันเพิ่ม $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ (24.3) ต่ำสุดสัมพัทธ์ -14 ต่ำสุดสัมบูรณ์หาค่าไม่ได้ สูงสุดสัมพัทธ์ 13 สูงสุดสัมบูรณ์หาค่าไม่ได้ ฟังก์ชันลด $[-2, 1]$ ฟังก์ชันเพิ่ม $(-\infty, -2] \cup [1, \infty)$ (24.4) ต่ำสุดสัมพัทธ์และสัมบูรณ์ $-\frac{27}{256}$ สูงสุดสัมพัทธ์ไม่มี สูงสุดสัมบูรณ์หาค่าไม่ได้ ฟังก์ชันลด $[-\infty, 1/4]$ ฟังก์ชันเพิ่ม $[1/4, \infty)$ และมีจุดเปลี่ยนเว้าที่คู่อันดับ $(1, 0)$ (24.5) ต่ำสุดสัมพัทธ์และสูงสุดสัมพัทธ์ไม่มี ต่ำสุดสัมบูรณ์และสูงสุดสัมบูรณ์หาค่าไม่ได้ ฟังก์ชันเพิ่ม $(-\infty, \infty)$ และมีจุดเปลี่ยนเว้าที่คู่อันดับ $(0, 0)$ (24.6) ต่ำสุดสัมพัทธ์และสัมบูรณ์ 0 สูงสุดสัมพัทธ์ไม่มี สูงสุดสัมบูรณ์ 4 ฟังก์ชันลด $[-1, 1]$ ฟังก์ชันเพิ่ม $[1, 2]$ (25.1) สูงสุด 3 เมื่อ $x = 0$ (25.2) ต่ำสุด $\frac{7}{4}$ เมื่อ $x = -\frac{3}{2}$ (25.3) ต่ำสุด 1 เมื่อ $x = 1$ และสูงสุด 5 เมื่อ $x = -1$ (25.4) ต่ำสุด 2 เมื่อ $x = 1, -1$ และสูงสุด 3 เมื่อ $x = 0$ (25.5) ต่ำสุด $-\frac{213}{27}$ เมื่อ $x = \frac{4}{3}$ และสูงสุด 11 เมื่อ $x = -2$ (26) ต่ำสุด -324 เมื่อ $x = 3$ และสูงสุด 324 เมื่อ $x = -3$ โดยมีจุดเปลี่ยนเว้าที่ $(0, 0)$ (27) $4, 4$ (28.1) -2 เมตรต่อวินาที และ 10 เมตรต่อวินาที (28.2) $\frac{1}{3}$ เมตร (29) 36 ต้น (30) $2,700$ ตร.หน่วย (31) 3 กม. (32.1) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}$ และ $\frac{ab}{4}$ (32.2) $\frac{d}{\sqrt{2}}, \frac{d}{\sqrt{2}}$ และ $\frac{d^2}{2}$ และ $\frac{d^2}{4}$ (32.3) $\frac{2}{3}\left|\overline{VF}\right|$ (32.4) $\frac{a}{6}$ (32.5) $\frac{4}{3}r$ (32.6) $\frac{2}{3}H$ (33.1) 10 (33.2) $\frac{4}{5}$ (33.3) $\frac{1}{2a}$ (33.4) $\frac{5}{4}$ (33.5) 3 (33.6) $\frac{3}{2}$ (33.7) $\frac{1}{6}$ (33.8) $\frac{1}{2}$ (33.9) $\frac{3}{4}$ (33.10) $\frac{1}{10}$ (33.11) $-\frac{1}{4}$ (33.12) $\frac{1}{4\sqrt{2}}$ (33.13) $\frac{1}{3}$ (33.14) -2 (34) $\frac{1}{2}$ (35.1) 0 (35.2) 0 (35.3) หาค่าไม่ได้ (35.4) 1 (35.5) 0 (36) $-\frac{7}{2}$ (37) $10x-27y+31 = 0$ (38) 0.1 (39) -2 (40) -16 (41) $(-3, 1)$ (42) ก. (43) 1 (44) $-\frac{1}{3}$ (45) $(-2, 0)$ (46) 2 (47) 5 (48) 0.62 (49) 11 (50) -2 (51) $\frac{3}{2}$ (52) 55 (53) -2 (54) $(0, \frac{1}{16}]$ (55) $(-2, 0) \cup (2, \infty)$ (56) 2 (57) $\frac{5}{2}$ (58) 192 (59) 3 (60) ข.

การอินทิเกรต (Integration)

• การกระทำที่ตรงข้ามกับกระบวนการหาอนุพันธ์ เราเรียกว่า *การอินทิเกรต*

นั่นคือ ถ้า $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ แล้ว (การหาอนุพันธ์)

จะได้ว่า $\int f(x)\,dx = F(x)$ (การอินทิเกรต)

สัญลักษณ์ $\int$ เรียกว่าเครื่องหมายอินทิกรัล และเรียก $f(x)$ ว่า *ตัวถูกอินทิเกรต* (Integrand)

• สิ่งที่หาอนุพันธ์ได้ตรงตามค่าที่ต้องการ จะเรียกว่า *ปฏิยานุพันธ์* (Antiderivative) ทั้งหมด

ตัวอย่างเช่น $F_1(x) = x^2$, $F_2(x) = x^2+1$, $F_3(x) = x^2+5$, $F_4(x) = x^2-7$

ต่างก็เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 2x$ เนื่องจากล้วนทำให้ $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$

• เราพบว่า รูปทั่วไปของปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 2x$ คือ x^2+c เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใดๆ

เรียก "รูปทั่วไปของปฏิยานุพันธ์" นี้ว่า *อินทิกรัลไม่จำกัดเขต* (Indefinite Integral) ของ $f(x)$

และเขียนสัญลักษณ์เป็น $\int f(x)\,dx$ ดังนั้นอินทิกรัลไม่จำกัดเขต $\int f(x)\,dx = x^2+c$ นั่นเอง

<u>ข้อสังเกต</u> ปฏิยานุพันธ์มีได้หลากหลาย แต่อินทิกรัลไม่จำกัดเขตมีแบบเดียวเสมอ

<u>สูตรในการหาอินทิกรัล</u>

1. สูตรทั่วไป

- $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
- $\int k\,dx = kx+c$
- $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

2. การบวกลบฟังก์ชัน

- $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
- การคูณและหาร ไม่มีสูตร

3. ฟังก์ชันคอมโพสิท อาศัยเทคนิคการอินทิเกรตโดยเปลี่ยนตัวแปร

<u>โจทย์</u>

(1) จงหาค่า $F(x)$ ที่ทำให้ $F'(x) = f(x)$ เมื่อกำหนดให้

(1.1) $f(x) = x$

(1.2) $f(x) = 2x$

(1.3) $f(x) = 7$

(1.4) $f(x) = 3x^2$

(1.5) $f(x) = x^3$

(1.6) $f(x) = x\sqrt{x}$

(1.7) $f(x) = 1 / x^5$

(2) จงหาค่า $\int f(x)\,dx$ เมื่อกำหนดให้

(2.1) $f(x) = 5x^4+3x^2-2$ (2.4) $f(x) = x^3-\frac{3}{x^3}+4$

(2.2) $f(x) = 2x-\frac{1}{x^2}$ (2.5) $f(x) = \frac{x-2}{x^3}$

(2.3) $f(x) = x^2(x-3)$ (2.6) $f(x) = (4x^2+1)(x-1)$

(3) $f(x) = 3x^2-3$ และ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f หาก $F(0) = 4$ แล้ว จงหาค่า $F(1)$

(4) [Ent'41] ถ้า $\frac{dy}{dx} = 5x^4+3x^2-4x$ และ $-y(1) = y(-1)$ แล้วจงหาค่าของ $y(0)$

(5) โค้ง C มีความชันที่จุดใดๆ เป็น x^2+2x-3 จงหาสมการโค้งนั้น ถ้าโค้งผ่านจุด $(0,1)$

(6) [Ent'ต.ค.43] ถ้าเส้นโค้ง $y = f(x)$ ผ่านจุด $(0,1)$ และ $(4,c)$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริง และความชันของเส้นโค้งนี้ที่จุด (x,y) ใดๆ มีค่าเท่ากับ $\sqrt{x}-1$ แล้ว c มีค่าเท่าใด

(7) [Ent'40] ถ้าเส้นโค้ง $y = f(x)$ มีอัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันที่จุด (x,y) ใดๆ บนโค้ง เป็น $2x-1$ และเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(1,2)$ ตั้งฉากกับเส้นตรง $x+2y-1=0$ แล้วความชันของโค้งนี้ที่จุดซึ่ง $x=0$ เท่ากับเท่าใด

(8) จุดตัดระหว่างวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,1)$ รัศมียาว $\sqrt{2}$ หน่วย กับเส้นโค้งที่ผ่านจุด $(3,10)$ และมีความชันเป็น $2x$ จะอยู่ในจตุภาคใด

(9) [Ent'ต.ค.41] กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f(2) = -1$, $f'(1) = -3$, และ $f''(x) = 3$ ทุกๆ ค่า x แล้ว $f(0)$ มีค่าเท่าใด

(10) ในเวลา t วินาที รถไฟวิ่งด้วยความเร่ง a ฟุตต่อวินาที^{2} โดย $a = 12t^2+6t+10$ หากเมื่อเวลาเริ่มต้นพบว่าระยะทางเป็น 10 ฟุต และความเร็วเป็นศูนย์ จงหาระยะทางเมื่อเวลาผ่านไป 5 วินาที

(11) [Ent'40] ถ้าวัตถุชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร่งขณะเวลา t ใดๆ เป็น $24t^2$ เมตร/วินาที^{2} และขณะเวลาเป็น $t=1$ วินาที มีความเร็ว 16 เมตร/วินาที และเคลื่อนที่ได้ระยะทาง 8 เมตร แล้วเมื่อเวลา $t=2$ วินาที วัตถุจะเคลื่อนที่ได้ระยะทางเท่าไร

(12) ถ้ากำลังคนของบริษัทแห่งหนึ่งในปัจจุบัน ทำให้ได้ผลผลิต $3,000$ ชิ้นต่อวัน และเมื่อคนเพิ่ม x คน จะมีอัตราการเปลี่ยนแปลงผลผลิต $80-6\sqrt{x}$ ชิ้นต่อวัน ถามว่าเมื่อเพิ่มคน 25 คน บริษัทแห่งนี้จะได้ผลผลิตกี่ชิ้นต่อวัน

(13) ให้หาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้ (อาศัยเทคนิคการเปลี่ยนตัวแปร)

(13.1) $\int t(1-2t^2)^8\,dt$ (13.4) $\int \sqrt{x+3}\,(x+1)^2\,dx$

(13.2) $\int x^3(4-x^2)^3\,dx$ (13.5) $\int \frac{2x}{(1-x)^{2/3}}\,dx$

(13.3) $\int (3x^2+2)\sqrt{2x^3+4x+1}\,dx$ (13.6) $\int \frac{18+12x}{(4-9x-3x^2)^5}\,dx$

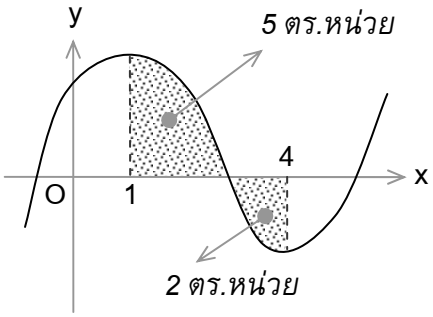
<u>อินทิกรัลจำกัดเขต และพื้นที่ใต้โค้ง</u>

- *อินทิกรัลจำกัดเขต* (Definite Integral) จะมีการระบุช่วงของ x ที่เครื่องหมายอินทิกรัล

ดังสัญลักษณ์ $\int_a^b f(x)\,dx$ โดยมีค่าเป็น $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$

- ค่าของอินทิกรัลจำกัดเขตที่คำนวณได้ ก็คือพื้นที่ระหว่างโค้ง $f(x)$ กับแกน x ตั้งแต่ $x = a$ จนถึง b โดยหากส่วนใดของโค้งนั้นอยู่ใต้แกนก็จะได้พื้นที่เป็นค่าลบ
- หากเราต้องการหาพื้นที่ระหว่างโค้ง $f(x)$ กับแกน x ที่แท้จริง จะต้องตรวจสอบว่ามีช่วงใดของโค้งที่อยู่ใต้แกน x ก่อน เพื่อแยกชิ้นส่วนในการคำนวณ ไม่ให้พื้นที่บริเวณใดมีค่าติดลบ

- ตัวอย่างเช่น จากกราฟที่สมมติขึ้นนี้



จะคำนวณได้ $\int_1^3 f(x)\,dx = 5$ และ $\int_3^4 f(x)\,dx = -2$

และหากคำนวณพร้อมกันจะได้ $\int_1^4 f(x)\,dx = 3$

ซึ่งถ้าต้องการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยโค้งที่แท้จริง

จะต้องคิดจาก $\int_1^3 f(x)\,dx - \int_3^4 f(x)\,dx = 5+2 = 7$ ตารางหน่วย

หรือใช้วิธีอินทิเกรตตลอดทั้งช่วง แล้ว “ลบ” ด้วยสองเท่าของส่วนที่ติดลบ จะสะดวกขึ้น

<u>โจทย์</u>

(14) จงหาค่าของ

(14.1) $\int_0^4 (3-x)\,dx$ (14.2) $\int_{-2}^2 (2x-1)\,dx$

(14.3) พื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $y = 3-x$ กับแกน x ในช่วง $x = 0$ ถึง 4

(14.4) พื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $y = 2x-1$ กับแกน x ในช่วง $x = -2$ ถึง 2

(15) จงหาค่าของ

(15.1) $\int_{-1}^2 (3x^2-2x)\,dx$ (15.3) $\int_{-1}^4 (6+x-x^2)\,dx$

(15.2) $\int_{-1}^3 (x^3-4x)\,dx$

(15.4) พื้นที่ปิดล้อมด้วยโค้ง $y = 3x^2-2x$ กับแกน x ในช่วง $x = -1$ ถึง 2

(15.5) พื้นที่ปิดล้อมด้วยโค้ง $y = x^3-4x$ กับแกน x ในช่วง $x = -1$ ถึง 3

(15.6) พื้นที่ปิดล้อมด้วยโค้ง $y = 6+x-x^2$ กับแกน x ในช่วง $x = -1$ ถึง 4

(16) จงหาพื้นที่ที่ล้อมด้วยโค้ง $f(x) = x^2-1$ กับแกน x ในช่วงที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(16.1) ในช่วง $x=1$ ถึง 2

(16.2) ในช่วง $x=-1$ ถึง 1

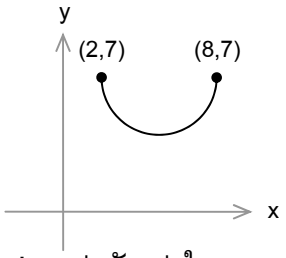
(16.3) ในช่วง $x=-2$ ถึง 0

(17) [Ent'40] ค่าของ $\int_1^2 \frac{x^4+1}{x^2}\,dx + \int_0^1 (4-\sqrt{x})^2\,dx$ เท่ากับเท่าใด

(18) [Ent'ต.ค.41] พื้นที่ปิดล้อมด้วยโค้ง $y = x^2-3x+2$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 2$ เฉพาะส่วนที่อยู่เหนือแกน x เท่ากับเท่าใด

(19) [Ent'ต.ค.42] ให้ $f(x) = x^2-c$ โดย c เป็นค่าคงตัวซึ่ง $c \geq 4$ ถ้าพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ จาก $x = -2$ ถึง $x = 1$ เท่ากับ 24 ตารางหน่วย แล้ว c มีค่าเท่าใด

(20) กำหนดให้ $f(x)$ มีกราฟเป็นครึ่งวงกลมดังภาพ



จงหาค่า $\int_5^8 f(x)\,dx$

(21) [Ent'39] กำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ มีกราฟเป็นเส้นตรงตัดแกน x ที่จุด $(-1,0)$ และผ่านจุด $(3,6)$ แล้วค่าของ $\int_{-1}^3 f(x)\,dx$ เท่ากับเท่าใด

(22) $f(x)$ เป็นกราฟเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3,5)$ และ $(-2,2)$ จงหาค่า $\int_{-2}^3 f(x)\,dx$

(23) [Ent'มี.ค.42] ถ้า $\theta \in \mathbb{R}$ และ $\int_{\sin\theta}^1 (4x-3)\,dx = 0$ แล้ว ค่า $\cos 2\theta$ เป็นเท่าใด

(24) [Ent'40] ถ้า $\int_1^{\sin\theta} x^2\,dx = -\frac{2}{3}$ แล้ว $1+\sin\theta+\cos\theta$ เท่ากับเท่าใด

<u>โจทย์ทบทวนเรื่องอนุพันธ์ และการอินทิเกรต</u>

(25) [Ent'มี.ค.43] กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ และ $g(x) = (x+1)f(x)$ ถ้า $\int g(x)\,dx = x^2-x+c$ แล้ว $f'(1)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

(26) [Ent'ต.ค.42] ให้ $F(x) = f(g(x))$ ถ้า $g(x) = x^3+2x+2$ และ $\int F(x)\,dx = 5x^3+2x+c$ แล้ว ค่าของ $f'(5)$ เท่ากับเท่าใด

(27) [Ent'39] ถ้า $\int (fog)(x)\,dx = x^2+5x+c$ โดยที่ c เป็นค่าคงตัว และ $f(x) = 4x-3$ แล้วค่าของ $\int_0^1 g(x)\,dx$ เป็นเท่าใด

(28) [Ent'ต.ค.42] ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีกราฟผ่านจุด $(0,2)$ และ $f'(x) = 3x^2-12x+9$ แล้ว ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f เท่ากับเท่าใด

(29) [Ent'มี.ค.43] ให้ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f โดยที่ $f(x) = 3x^2-6x+3$ ถ้า $F(0) = -1$ และ F มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ในช่วง $[0,2]$ ที่จุด $x=c$ แล้ว $F(c)$ มีค่าเท่าใด

(30) [Ent'มี.ค.44] กำหนดให้ $f(x) = ax^3+bx^2+2x-2$ เมื่อ a,b เป็นจำนวนจริง ถ้า $f'(1) = 5$ และ $f''(0) = -12$ แล้ว $\int [f'(x) + f''(x)]\,dx$ เท่ากับเท่าใด

(31) [Ent'มี.ค.44] ให้ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งอนุพันธ์ของ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[0,1]$ และ $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^4+1}$ ถ้า $f(1)=f'(1)=1$ และ $f(0)=f'(0)=-2$ แล้วจงหา $\int_0^1 g''(x)\,dx$

(32) [Ent'41] ให้ b,c เป็นจำนวนจริง ถ้าเส้นโค้ง $y = x^2+bx+c$ มีจุด $(-1,-4)$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์แล้ว จงหาพื้นที่ที่ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้งนี้และแกน x จาก $x = -1$ ถึง $x = 1$

เฉลย

(1.1) $\dfrac{x^2}{2}+c$ (1.2) x^2+c (1.3) $7x+c$ (1.4) x^3+c (1.5) $\dfrac{x^4}{4}+c$ (1.6) $\dfrac{2x^{5/2}}{5}+c$ (1.7) $-\dfrac{1}{4x^4}+c$ (2.1) x^5+x^3-2x+c (2.2) $x^2-\dfrac{1}{x}+c$ (2.3) $\dfrac{x^4}{4}-x^3+c$ (2.4) $\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{3}{2x^2}+4x+c$ (2.5) $-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+c$ (2.6) $x^4-\dfrac{4x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-x+c$ (3) 2 (4) 2 (5) $y = \dfrac{x^3}{3}+x^2-3x+1$ (6) $\dfrac{7}{3}$ (7) 2 (8) จุด $(\pm1,2) \rightarrow$ จตุภาคที่ 1 และ 2 (9) 5 (10) 885 ฟุต (11) 46 เมตร (12) $4,500$ (13.1) $\dfrac{u^4}{36}+c$ เมื่อ $u=1-2t^2$ (13.2) $-\dfrac{1}{2}\left(u^4-\dfrac{u^5}{5}\right)+c$ เมื่อ $u=4-x^2$ (13.3) $\dfrac{1}{3}u^{3/2}+c$ เมื่อ $u=2x^3+4x+1$ (13.4) $\dfrac{2}{7}u^{\frac{7}{2}}-\dfrac{8}{5}u^{\frac{5}{2}}+\dfrac{8}{3}u^{\frac{3}{2}}+c$ เมื่อ $u=x+3$ (13.5) $-6u^{\frac{1}{3}}+\dfrac{3}{2}u^{\frac{4}{3}}+c$ เมื่อ $u=1-x$ (13.6) $\dfrac{1}{3u^6}+c$ เมื่อ $u=4-9x-3x^2$ (14.1) 4 (14.2) -4 (14.3) $4.5+0.5=5$ ตร.หน่วย (14.4) $6.25+2.25=8.5$ ตร.หน่วย (15.1) 6 (15.2) 4 (15.3) $\dfrac{95}{6}$ (15.4) $2+\dfrac{4}{27}+4\dfrac{4}{27}=6\dfrac{8}{27}$ ตร.หน่วย (15.5) $1\dfrac{3}{4}+4+6\dfrac{1}{4}=12$ ตร.หน่วย (15.6) $\dfrac{112}{6}+\dfrac{17}{6}=21.5$ ตร.หน่วย (16) $\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3}$ ตร.หน่วย (17) 14 (18) $\dfrac{5}{6}$ (19) 9 (20) $21-\dfrac{9\pi}{4} \approx 7.07$ (21) พท.$\triangle$ ได้ 12 (22) พท.$\square$ ได้ 17.5 (23) -1 หรือ $\dfrac{1}{2}$ (24) 0 (25) $\dfrac{3}{4}$ (26) 6 (27) 2.25 (28) 6 (29) 1 (30) $5x^3+9x^2-10x+c$ (31) $\dfrac{3}{2}$ (32) $\dfrac{16}{3}$

วิธีเรียงสับเปลี่ยนและจัดหมู่ (Permutation & Combination)

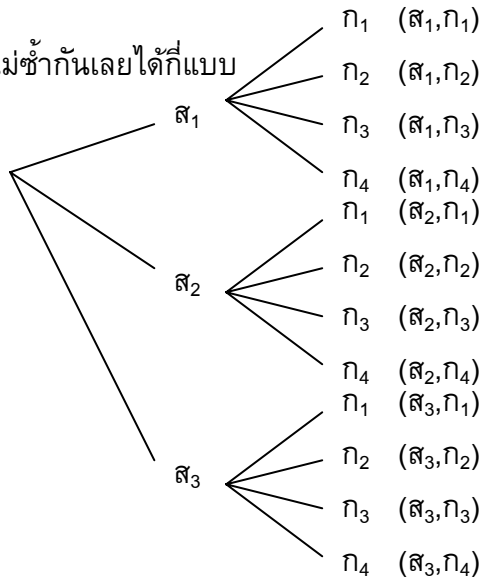
<u>กฎพื้นฐานเกี่ยวกับการนับ</u> (แผนภาพต้นไม้)

• ถ้าเราต้องทำงาน k อย่าง โดยที่งานอย่างแรกมีทางเลือกทำได้ n_1 แบบ และในแต่ละแบบก็เลือกทำงานอย่างที่สองได้ n_2 แบบ และในแต่ละแบบ... (ไปเรื่อยๆ) จะมีจำนวนวิธีเลือกทำงานจนครบทุกอย่าง เท่ากับ $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ วิธี

<u>ตัวอย่าง</u> มีเสื้อ 3 ตัว กางเกง 4 ตัว จะจัดเป็นชุดที่ไม่ซ้ำกันเลยได้กี่แบบ

<u>ตอบ</u> $3 \times 4 = 12$ แบบ

เขียนเป็นแผนภาพต้นไม้ (Tree Diagram) ได้ดังรูป



<u>ตัวอย่าง</u> มีเรือวิ่งข้ามฟาก 3 ลำ จะนั่งเรือไปและกลับไม่ให้ซ้ำลำกัน ได้กี่วิธี

<u>ตอบ</u> $3 \times 2 = 6$ วิธี

<u>ตัวอย่าง</u> ทอดลูกเต๋า 2 ครั้ง จะมีผลออกมาได้กี่แบบ

<u>ตอบ</u> $6 \times 6 = 36$ แบบ

<u>โจทย์</u>

การเดินทาง	รถยนต์	เรือ	รถไฟ	เครื่องบิน
ก → ข	ได้	ไม่ได้	ได้	ได้
ข → ค	ได้	ได้	ไม่ได้	ไม่ได้
ค → ง	ไม่ได้	ได้	ได้	ได้

(1) จากตาราง เรามีวิธีเดินทางจากเมือง ก ไปเมือง ง โดยผ่านทุกเมืองได้กี่วิธี

(2) มีหีบ 5 ใบวางเรียงกัน จะมีวิธีเอาบอล 3 ลูกใส่ในหีบ ทีละลูกๆ ทั้งหมดกี่วิธี

(3) ร้านฟาสต์ฟู้ดมีเบอร์เกอร์อยู่ 6 ชนิดและเครื่องดื่ม 4 ชนิด โดยเครื่องดื่มแต่ละชนิดนั้นมี 3 ขนาด จะมีวิธีจัดชุดอาหารกับเครื่องดื่มคู่กันกี่แบบ

(4) นำอักษรจากคำว่า SPECIAL มาสลับเป็นคำได้ทั้งหมดกี่แบบ (ไม่คำนึงถึงความหมาย)

(5) มีถุง 2 ใบ ใบแรกมีบอลสีแดง 3 ลูก สีดำ 2 ลูก สีขาว 1 ลูก (ซึ่งแต่ละลูกถือว่าต่างกัน) ใบที่สองมีบอลสีแดง 2 ลูก สีดำ 2 ลูก สีขาว 2 ลูก หยิบลูกบอลจากใบแรกไปใส่ในใบที่สอง 1 ลูก และหยิบจากใบที่สองออกมา 1 ลูก มีกี่วิธีซึ่งบอลที่หยิบจากใบแรกเป็นสีแดง และบอลที่หยิบออกจากใบที่สองไม่ใช่สีขาว

(6) ข้อสอบฉบับหนึ่งประกอบด้วย โจทย์ปัญหาแบบถูก-ผิด 5 ข้อ และปรนัย (ก,ข,ค,ง) อีก 7 ข้อ จะมีวิธีเดาข้อสอบที่ไม่ซ้ำกันเลยได้กี่แบบ

(7) กล่องใบหนึ่งบรรจุสลากเลข 0 ถึง 9 อย่างละใบ ถ้าหยิบมา 2 ใบ (ทีละใบโดยไม่ใส่คืน) จะมีกี่วิธีที่ผลรวมเลขเป็นจำนวนคี่

(8) ใช้ตัวเลข 0 ถึง 5 มาสร้างจำนวน 3 หลัก จะสร้างได้กี่จำนวน ถ้ากำหนดให้

(8.1) แต่ละหลักไม่ซ้ำกัน

(8.2) เป็นจำนวนคี่ และแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน

(8.3) มีค่ามากกว่า 350 และแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน

(8.4) หาร 10 ลงตัว

(9) ต้องการเลือกประธาน รองประธาน และเหรัญญิก ตำแหน่งละ 1 คน โดยเลือกจากนักเรียนชาย 5 คน หญิง 4 คน จะเลือกได้กี่ชุด หากกำหนดว่าประธานและรองประธานเป็นเพศเดียวกัน และคนละเพศกับเหรัญญิก

<u>วิธีเรียงสับเปลี่ยน (Permutation)</u>

- จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของต่างๆ กัน n สิ่ง จะมี $n!$ วิธี

แต่ถ้าเอามาเรียงเพียงแค่ r สิ่ง จะมี $\frac{n!}{(n-r)!}$ วิธี *เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์* $P_{n,r}$ *หรือ* ${}_nP_r$

<u>หมายเหตุ</u> เครื่องหมาย ! เรียกว่า แฟคทอเรียล (Factorial)

มีนิยามว่า $\boxed{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ

และกำหนดให้ $\boxed{0! = 1}$ เพื่อให้สอดคล้องกับสมการ $P_{n,n} = n!$

<u>ตัวอย่าง</u> $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ $\quad \frac{8!}{6!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6!} = 56$ $\quad P_{7,3} = \frac{7!}{4!} = 7 \times 6 \times 5$

<u>ตัวอย่าง</u> จัดคน 3 คน ให้ยืนเรียงแถวเป็นเส้นตรง ได้กี่วิธี

<u>ตอบ</u> คิดแบบการนับ ได้ $3 \times 2 \times 1 = 6$ วิธี หรือคิดแบบเรียงสับเปลี่ยน $P_{3,3} = 3! = 6$ วิธี

<u>ตัวอย่าง</u> มีธง 5 ผืน ผืนละสีไม่ซ้ำกัน จะมีวิธีส่งสัญญาณโดยเอาธง 3 ผืนมาวางเรียงกัน ได้กี่วิธี

<u>ตอบ</u> คิดแบบการนับ $5 \times 4 \times 3 = 60$ วิธี หรือคิดแบบเรียงสับเปลี่ยน $P_{5,3} = \frac{5!}{2!} = 60$ วิธี

<u>โจทย์</u>

(10) หาค่าของ $\frac{10!}{7!}$, $\frac{6!3!}{4!7!}$, $P_{4,3}$, $P_{7,3}$

(11) ถ้า $\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = 30$ จงหาค่า n

(12) หาค่า n ซึ่งทำให้ $2P_{n,2} + 50 = P_{2n,2}$

(13) ของต่างๆ กัน 4 ชิ้น นำมาจัดเป็นแถวได้กี่วิธี ถ้า

(13.1) ใช้ทุกชิ้นเท่านั้น

(13.2) ใช้มากกว่า 1 ชิ้น

(14) นำอักษรจากคำว่า STAND มาเรียงเป็นคำได้กี่แบบ ถ้า

(14.1) ใช้ทุกตัว

(14.2) เลือกมาเพียง 3 ตัว

(15) คำว่า HONESTY สามารถนำอักษรมาเรียงเป็นคำได้กี่คำ หาก

(15.1) S และ T ต้องติดกันเสมอ

(15.2) S และ T ต้องไม่ติดกัน

(16) มีชาย 3 คน หญิง 2 คน จะจัดคนทั้ง 5 มายืนเรียงแถว โดยผู้ชายยืนติดกันและผู้หญิงยืนติดกัน ได้กี่วิธี และถ้าบังคับให้ยืนสลับกันจะได้กี่วิธี

(17) จงหาจำนวนวิธีที่จะจัดชาย 5 คน หญิง 4 คน นั่งบนเก้าอี้เรียงยาว โดยต้องไม่มีผู้หญิงคนใดนั่งติดกัน

(18) มีชาย 3 คน หญิง 2 คน โดยใน 2 คนนี้มี ด.ญ.อ้อ รวมอยู่ด้วย จะจัดแถวได้กี่แบบ ถ้า ด.ญ.อ้อ ต้องยืนหัวแถวหรือท้ายแถวเสมอ

(19) อักษรคำว่า TRIANGLE นำมาจัดเป็นคำได้กี่คำ หากต้องขึ้นต้นด้วย T และลงท้ายด้วย E

(20) สร้างคำใหม่จากอักษรในคำว่า AMPLITUDE ได้กี่คำ เมื่อ

(20.1) สระไม่ติดกัน

(20.2) พยัญชนะไม่ติดกัน

(20.3) ต้องขึ้นต้นด้วยพยัญชนะ และสระต้องไม่ติดกัน

(20.4) ต้องขึ้นต้นด้วยสระ และสระต้องไม่ติดกัน

- จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของทั้งหมด n สิ่ง ที่มีสิ่งของซ้ำกัน k_1 สิ่ง, k_2 สิ่ง, ...

จะเรียงได้ $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots}$ วิธี

(แต่ถ้าไม่นำมาเรียงครบทั้ง n สิ่ง ก็จะต้องพิจารณาการซ้ำกันนั้น แยกเป็นหลายๆ กรณี)

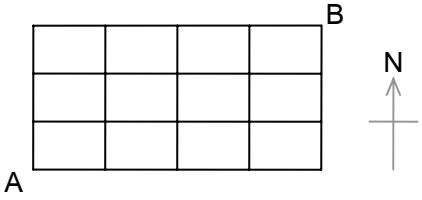
โจทย์

(21) นำอักษรในคำว่า MISSISSIPPI มาเรียงสับเปลี่ยนได้กี่แบบ

(22) นำอักษรในคำว่า TROTTING มาเรียงสับเปลี่ยนได้กี่แบบ ถ้าบังคับว่า ต้องขึ้นต้นด้วยสระและลงท้ายด้วยตัว T

(23) นำอักษรในคำว่า ALGEBRA มาเรียงสับเปลี่ยนได้กี่แบบ ถ้าต้องรักษาลำดับของสระและพยัญชนะให้เป็นแบบเดิม

(24) มีวิธีเดินทางจาก A ไป B ได้กี่แบบ ถ้าเดินทางได้ตามเส้นที่กำหนดเท่านั้น และเดินทางได้เฉพาะทิศเหนือ กับทิศตะวันออก



(25) นำอักษรจากคำว่า ARRANGE มา 3 ตัว เพื่อจัดเป็นคำ จะจัดได้กี่แบบ

• จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของต่างๆ กัน n สิ่ง เป็นรูปวงกลม จะทำให้ไม่มีหัวแถวหรือปลายแถว ดังนั้นจำนวนวิธีจึงลดลง ให้คิดว่าระบุตำแหน่งเจาะจงก่อน 1 สิ่ง แล้วที่เหลือจึงจัดแบบเส้นตรงปกติ นั่นคือ $(n-1)!$ วิธี

(แต่หากการจัดนี้สามารถมองได้สองด้าน จำนวนวิธีจะลดลงอีก เหลือ $\frac{(n-1)!}{2}$ วิธี)

โจทย์

(26) จัดคน 4 คน คือ ก, ข, ค, ง นั่งล้อมเป็นวงกลมได้กี่วิธี ให้ตรวจสอบคำตอบโดยการเขียนวิธีทั้งหมด

(27) จัดลูกปัด 4 สี มาร้อยเป็นวงได้กี่วิธี ให้ตรวจสอบคำตอบโดยการเขียนวิธีทั้งหมด

(28) มีชาย 3 คน หญิง 3 คน จะนั่งสลับชายหญิงรอบโต๊ะอาหารวงกลมได้กี่แบบ

(29) ชาย 6 คน หญิง 6 คน นั่งรอบโต๊ะกลม โดยชายหญิงต้องสลับกันครั้งละ 2 คน จะมีวิธีจัดกี่แบบ

(30) สามีภรรยาเชิญแขกมารับประทานอาหาร 4 คน จะจัดที่นั่งรอบโต๊ะกลมได้กี่แบบ หากสามีภรรยาต้องนั่งติดกันเสมอ

(31) มีวิธีจัดชาย 5 คน หญิง 4 คน นั่งรอบโต๊ะกลมได้กี่วิธี ถ้าไม่มีหญิงคนใดนั่งติดกันเลย

วิธีจัดหมู่ (Combination)

• วิธีจัดหมู่ ต่างจากเรียงสับเปลี่ยน ตรงที่จะไม่คำนึงถึงลำดับก่อนหลัง

เช่น สมมติมีตัวอักษร 3 ตัว คือ ABC จะได้ว่า

$P_{3,2} = 6$ ได้แก่ AB, AC, BA, BC, CA, CB

แต่ $C_{3,2} = 3$ ได้แก่ AB, AC, BC

AB กับ BA การเรียงสับเปลี่ยนถือว่าต่างกัน แต่การจัดหมู่ถือว่าเป็นวิธีเดียวกัน

• จำนวนวิธีจัดหมู่สิ่งของต่างๆ กัน n สิ่ง โดยที่คัดออกมา r สิ่ง จะมี $\frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$ วิธี

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $C_{n,r}$ *หรือ* ${}_nC_r$ *และนิยมเขียนเป็น* $\binom{n}{r}$

ข้อสังเกต $\quad {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$

ตัวอย่าง จงหาจำนวนวิธีที่จะหยิบสลาก 5 ชิ้น ออกมาจากกองที่มีอยู่ 12 ชิ้น

ตอบ $\quad \binom{12}{5} = \frac{12!}{7!\cdot 5!} = 792$ วิธี

ข้อสังเกต $\quad \binom{12}{5} = \binom{12}{7}$ หรือ $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

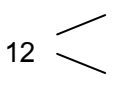
ตัวอย่าง ดินสอสี 1 โหล มีสีต่างๆ กัน ต้องการหยิบ 5 แท่ง ตามเงื่อนไขต่อไปนี้ จะได้กี่วิธี

(ก) แต่ละครั้งต้องมีสีแดง ตอบ $\binom{1}{1}\binom{11}{4} = 330$ วิธี

(ข) แต่ละครั้งต้องไม่มีสีแดง ตอบ $\binom{11}{5} = 462$ วิธี

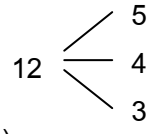
หรือ คิดจาก จำนวนวิธีทั้งหมด ลบด้วยจำนวนวิธีที่มีสีแดง ก็ได้ $\binom{12}{5} - 330 = 462$ วิธี

- จากการหยิบของ 5 ชิ้น ออกจากกองที่มี 12 ชิ้น ก็เหมือนการแบ่งแยกของออกเป็นสองกลุ่ม กลุ่มละ 5 และ 7 ชิ้น จึงได้สูตรว่า



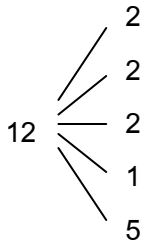
แบ่งกลุ่มได้ $\frac{12!}{5!\cdot 7!}$ วิธี

ดังนั้น ขยายผลออกไปถึงการแบ่งของ 12 ชิ้น เป็นสามกอง ดังนี้



ก็จะมีจำนวนวิธีเป็น $\frac{12!}{5!\cdot 4!\cdot 3!}$ วิธี (พิสูจน์ได้จาก $\binom{12}{5}\binom{7}{4}\binom{3}{3}$)

- แต่ถ้า มีกองใดที่จำนวนเท่ากัน ที่ถือว่าไม่แตกต่างกัน จำนวนวิธีจะลดลงโดยคิดเช่นเดียวกับการสับเปลี่ยน เช่น จากแผนภาพด้านขวานี้



จะแบ่งได้ $\frac{12!}{(2!)^3\cdot \underline{3!}\cdot 1!\cdot 5!}$ วิธี

3! ที่เพิ่มเข้ามา เนื่องจากมี 3 กองที่สลับกันเองไม่มีความหมาย จำนวนวิธีจึงต้องลดลง

ตัวอย่าง มีคน 4 คน จัดเป็นสองกลุ่ม กลุ่มละ 2 คน ได้กี่แบบ

ตอบ $\frac{4!}{(2!)^2\cdot \underline{2!}} = 3$ แบบ

ตัวอย่าง คน 12 คน แบ่งเป็น 5 กลุ่ม ที่มีจำนวน 2, 2, 2, 3, 3 คน ไม่ให้ซ้ำแบบกันเลยได้กี่แบบ

ตอบ $\frac{12!}{(2!)^3\cdot \underline{3!}\cdot (3!)^2\cdot \underline{2!}} = 138{,}600$ แบบ

โจทย์

(32) ถ้า $C_{18,r} = C_{18,r+2}$ จงหาค่า r

(33) มีหนังสือ 10 เล่มต่างๆ กัน นาย ก จะยืมไปอ่าน 3 เล่ม จะเลือกได้กี่แบบ

(34) จุด 6 จุด กระจายกันอยู่บนเส้นรอบวงกลม จะสร้างสามเหลี่ยมจากจุดเหล่านี้ได้กี่รูป

(35) หาจำนวนวิธีเลือกกรรมการชุดละ 8 คน จากนักเรียนหญิง 6 คน ชาย 10 คน โดย

(35.1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

(35.2) ต้องมีหญิง 2 คนเท่านั้น

(35.3) ต้องมีหญิงอย่างน้อย 5 คน

(36) ถุงใบหนึ่งมีบอลสีขาว 6 ลูก สีดำ 5 ลูก จะมีกี่วิธีที่หยิบบอลออกมา 4 ลูกพร้อมกัน และได้สีขาวกับดำ อย่างละ 2 ลูก

(37) ในการประชุม มีนักธุรกิจ 3 คน นักวิชาการ 8 คน และอาชีพอื่นๆ 10 คน ต้องการเลือกกรรมการ 4 คน โดยต้องมีนักธุรกิจรวมอยู่อย่างน้อยครึ่งหนึ่ง จะมีวิธีจัดกรรมการกี่แบบ

(38) รถโรงเรียน 2 คัน มี 6 และ 9 ที่นั่ง ตามลำดับ จะจัดนักเรียน 13 คน ประจำรถได้กี่แบบ (มีที่ว่าง 2 ที่)

(39) มีอักษร A, B, C, m, p, q, r, s, a, e, o, u นำอักษรทั้งหมดมาจัดเป็นคำโดยให้มีพยัญชนะตัวพิมพ์ใหญ่ขึ้นต้น และพยัญชนะตัวเล็ก 3 ตัว สระ 2 ตัว ได้กี่คำ

(40) อักษรชุดหนึ่งได้แก่ a, a, a, b, b, c, c, d, d, e, f นำมาจัดเป็นคำที่มีความยาว 4 ตัวอักษร ได้กี่แบบ

(41) การแข่งขันเทนนิสมีนักกีฬาเข้าร่วมแข่งขัน 10 คน เป็นการแข่งแบบพบกันหมด หากใน 1 วัน จัดแข่งได้ 4 คู่ จะต้องใช้เวลาทั้งหมดกี่วัน

(42) มีคน 9 คน แบ่งเป็น 3 กลุ่ม ตามเงื่อนไขต่อไปนี้ได้กี่วิธี

(42.1) 4, 3, 2 คน

(42.2) กลุ่มละ 3 คน

(43) นักกีฬาเทนนิส 9 คน ถูกแบ่งเป็น 3 กลุ่ม กลุ่มละ 3 คน เพื่อไปแข่งที่สหรัฐอเมริกา, อังกฤษ, ฝรั่งเศส จะแบ่งได้กี่วิธี

(44) นักเรียน 7 คน เข้าห้องพัก 3 ห้อง ซึ่งมีขนาด 3, 2, 2 คน แต่ละห้องถือว่าต่างกัน จะจัดได้กี่วิธี (ลองคิดแบบแบ่งกลุ่มก่อน แล้วค่อยจัดเข้าห้อง)

<u>การนับรูปเรขาคณิต</u>

1. *จำนวนเส้นตรง*

- จุด 5 จุด (ที่ไม่มีสามจุดใดอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน) สร้างเส้นตรงได้ $\binom{5}{2}$ เส้น

แต่ถ้ามี 3 จุดอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน สร้างเส้นตรงได้ $\binom{5}{2}-\binom{3}{2}+1$ เส้น

<u>หมายเหตุ</u> การลบ $\binom{3}{2}$ แล้วบวก 1 หมายความว่า จุดสามจุดในแนวเดียวกันทำให้จำนวนเส้นตรงที่ได้นั้นหายไปหมด เหลือเพียงเส้นเดียว จึงลบเส้นตรงที่เกิดจากสามจุดนี้ออกให้หมด แล้วบวกกลับไปเพียง 1 เส้น

2. *จำนวนสามเหลี่ยม*

- จุด 5 จุด (ที่ไม่มีสามจุดใดอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน) สร้างสามเหลี่ยมได้ $\binom{5}{3}$ รูป

แต่ถ้ามี 3 จุดอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน สร้างสามเหลี่ยมได้ $\binom{5}{3}-\binom{3}{3}$ รูป

3. *จำนวนจุดตัดของเส้นตรง กับวงกลม*

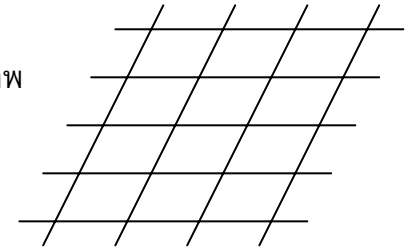
• เส้นตรง 8 เส้น จะมีจุดตัดเกิดขึ้นได้มากที่สุด $\binom{8}{2}$ จุด

วงกลม 5 วง รัศมีต่างๆ กัน จะมีจุดตัดเกิดขึ้นมากที่สุด $2\cdot\binom{5}{2}$ จุด

เส้นตรง 8 เส้นกับวงกลม 5 วง ตัดกัน เกิดจุดตัดมากที่สุด $\binom{8}{2}+2\cdot\binom{5}{2}+2\cdot\binom{8}{1}\binom{5}{1}$ จุด

4. *จำนวนสี่เหลี่ยม*

• เส้นขนานสองชุด จำนวน 5 เส้น กับ 4 เส้น ดังภาพ จะเกิดรูปสี่เหลี่ยมขึ้น $\binom{5}{2}\binom{4}{2}$ รูป



โจทย์

(45) จุด 6 จุด ไม่มี 3 จุดใดที่อยู่ในแนวเดียวกันเลย จะสร้างเส้นตรงได้กี่เส้น และสร้างรูปเหลี่ยมใดๆ ได้กี่รูป

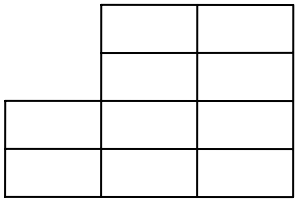
(46) จุด 7 จุด มี 4 จุดอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน และอีก 3 จุดก็อยู่ในแนวเส้นตรงเช่นกัน จะสามารถลากเส้นตรงได้กี่แบบ และสร้างสามเหลี่ยมได้กี่รูป

(47) รูปหกเหลี่ยม มีจุดยอด 6 จุด จุดกึ่งกลางด้านอีก 6 จุด จะลากเส้นเชื่อมจุดได้กี่เส้น

(48) รูป 20 เหลี่ยมด้านเท่า มีเส้นทแยงมุมกี่เส้น

(49) เส้นตรง 5 เส้นไม่ขนานกัน กับวงกลมรัศมีต่างๆ กัน 4 วง จะเกิดจุดตัดมากที่สุดเท่าใด

(50) เส้นขนานชุดหนึ่งมี 6 เส้น อีกชุดมี 3 เส้น ตัดกันจะเกิดสี่เหลี่ยมด้านขนานกี่รูป

(51)  [พื้นฐานวิศวะ '39]
รูปที่กำหนดให้นี้ มีรูปสี่เหลี่ยมอยู่ทั้งหมดกี่รูป

<u>การจัดหมู่สิ่งของที่เหมือนกันหมด (Stars and Bars)</u>

• กรณีที่สิ่งของที่เราจะจัดหมู่นั้นเหมือนกันหมด เช่น การแบ่งลูกอม จะต้องใช้หลัก Stars and Bars ดังตัวอย่างนี้

<u>ตัวอย่าง</u> มีลูกอมที่เหมือนกัน 9 เม็ด ต้องการแบ่งให้เด็ก 3 คน ตามเงื่อนไขต่อไปนี้ จะได้กี่วิธี

(ก) ทุกคนต้องได้รับ (อย่างน้อยคนละ 1 เม็ด)

<u>วิธีคิด</u> นำลูกอมมาวางเรียงแถวกัน 9 เม็ด จะเกิดช่องว่าง 8 ช่อง (เปรียบเทียบลูกอมเหมือนดวงดาว) ให้เราเอาไม้ 2 อันไปวางกั้นในช่องสองช่องใดๆ ก็จะได้ลูกอมเป็น 3 กองพอดี นั่นคือ $\binom{8}{2}$ วิธี

(ข) บางคนอาจจะไม่ได้รับ (คือแบ่งอย่างไรก็ได้)

วิธีคิด ให้เพิ่มลูกอมเข้าไปเท่าจำนวนคนก่อน กลายเป็น 12 เม็ด มีช่อง 11 ช่อง แบ่งให้คนสามคนตามหลัก Stars and Bars ในข้อ (ก) ซึ่งทุกคนจะได้อย่างน้อย 1 เม็ด แล้วไม่ว่าจะแบ่งวิธีใดก็เอาคืนมาจากเด็กคนละเม็ด (เหลือ 9 เม็ดเท่าเดิม) จะทำให้บางคนไม่มีลูกอมอยู่เลย ดังนั้น แบ่งได้ $\binom{11}{2}$ วิธี

• หมายเหตุ การแบ่งของแบบ Stars and Bars นั้น ของแต่ละกลุ่มที่ได้ถือว่าต่างกัน จำนวนวิธีที่ได้นั้นมีลำดับเกิดขึ้นแล้ว เช่น แบ่งลูกอมให้เด็ก 3 คน คือ ก, ข, ค.. แต่หากแบ่งลูกอมเป็นกองๆ 3 กอง (สลับกันไม่มีความหมาย) จะใช้ Stars and Bars ไม่ได้ ต้องนับเอาโดยตรง

โจทย์

(52) มีบอล 6 ลูกซึ่งเหมือนกัน แบ่งให้ นาย ก และ ข จะแบ่งได้กี่วิธี หากกำหนดว่า

(52.1) แต่ละคนต้องได้รับอย่างน้อย 1 ลูก

(52.2) บางคนอาจไม่ได้รับ

(53) มีบอล 6 ลูกซึ่งเหมือนกัน แบ่งออกเป็น 2 กอง จะแบ่งได้กี่วิธี หากแต่ละกองต้องมีอย่างน้อย 1 ลูก เทียบผลกับข้อ (52.1)

(54) ลูกอมแบบเดียวกัน 7 เม็ด แบ่งให้เด็ก 4 คน ได้กี่วิธี

(54.1) แต่ละคนได้อย่างน้อย 1 เม็ด

(54.2) แบ่งอย่างไรก็ได้

(55) ลูกอมแบบเดียวกัน 7 เม็ด แบ่งเป็น 4 กอง ได้กี่วิธี ถ้าแต่ละกองต้องมีอย่างน้อย 1 เม็ด เทียบผลกับข้อ (54.1)

การนับจำนวนที่หารลงตัว

• เราสามารถนำการนับเบื้องต้น บวกกับการสังเกต เพื่อนับจำนวนเกี่ยวกับการหารลงตัวได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

$8 = 2^3$ มีจำนวนเต็มบวกที่หารลงตัว 4 จำนวน คือ $2^0, 2^1, 2^2, 2^3$

$25 = 5^2$ มีจำนวนเต็มบวกที่หารลงตัว 3 จำนวน คือ $5^0, 5^1, 5^2$

$120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$ มีจำนวนเต็มบวกที่หารลงตัว 16 จำนวน (4x2x2) คือ

$$2^0 \times 3^0 \times 5^0 \mid 2^0 \times 3^0 \times 5^1 \mid 2^0 \times 3^1 \times 5^0 \mid 2^0 \times 3^1 \times 5^1$$
$$2^1 \times 3^0 \times 5^0 \mid 2^1 \times 3^0 \times 5^1 \mid 2^1 \times 3^1 \times 5^0 \mid 2^1 \times 3^1 \times 5^1$$
$$2^2 \times 3^0 \times 5^0 \mid 2^2 \times 3^0 \times 5^1 \mid \ldots \quad \mid 2^3 \times 3^1 \times 5^1$$

โจทย์

(56) มีจำนวนเต็มบวกที่หาร $100{,}000$ ลงตัวกี่จำนวน

(57) มีจำนวนที่หาร 120 ลงตัว กี่จำนวน (จำนวนเต็มบวก, เต็มลบ)

(58) มีจำนวนที่หาร $x^a y^b$ ลงตัวกี่จำนวน ถ้า x, y เป็นจำนวนเฉพาะ

<u>ทฤษฎีบททวินาม</u> (Binomial Theorem)

$(a+b)^0 = 1$

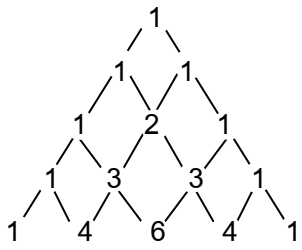
$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

สามเหลี่ยมของปาสคาล



• ทฤษฎีบททวินาม คือ ทฤษฎีที่กล่าวถึงการกระจายทวินาม $(a+b)^n$

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง, n และ r เป็นจำนวนนับ โดย $0 \le r \le n$

$$\boxed{(a+b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}a^0b^n}$$

พจน์ที่ $r+1$ เป็นพจน์ทั่วไป $\boxed{T_{r+1} = \binom{n}{r}a^{n-r}b^r}$ เรียก $\binom{n}{r}$ ใดๆ ว่าสัมประสิทธิ์ทวินาม

<u>ข้อสังเกต</u>

1. จำนวนพจน์ทั้งหมดจะมี $n+1$ พจน์ คือเริ่มจาก $\binom{n}{0}$ ถึง $\binom{n}{n}$

กำลังของ a ค่อยๆ ลดลง ในขณะที่กำลังของ b เพิ่มขึ้น และนำกำลังมารวมกันจะได้ n เสมอ

2. สัมประสิทธิ์ทวินามอาจไม่ใช่สัมประสิทธิ์จริงๆ ของพจน์นั้น

(หากใน a หรือ b มีสัมประสิทธิ์อยู่อีก)

3. $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n} = 2^n$

ดังเช่นเคยพบตอนที่หาจำนวนสับเซตทั้งหมด ของเซตที่มีสมาชิก n ตัว

<u>โจทย์</u>

(59) จงกระจายโดยอาศัยทฤษฎีบททวินาม

(59.1) $(a+b)^5$

(59.2) $(2x-3y)^4$

(59.3) $(1-2x+x^2)^4$

(60) จากการกระจาย $(3x+\frac{1}{y})^8$ จงหา

(60.1) พจน์ที่ 4

(60.2) สัมประสิทธิ์ทวินามของพจน์ที่ 6

(60.3) สัมประสิทธิ์ทวินามของพจน์ที่มี x^6

(60.4) สัมประสิทธิ์ของพจน์กลาง

(61) จากการกระจาย $(x^2 + \frac{3}{x^4})^{12}$ จงหา

(61.1) พจน์ที่ 6

(61.2) สัมประสิทธิ์ทวินามของพจน์ที่ 6

(61.3) สัมประสิทธิ์ของ x^6

(61.4) พจน์ที่ไม่มีตัวแปร x

(62) จงหาค่าโดยประมาณของ $(2.001)^7$ โดยบอกทศนิยม 6 ตำแหน่ง

[Hint : $(2 + 0.001)^7$]

(63) จากการกระจาย $(2x + 3y)^7$ จงหาผลบวกของสัมประสิทธิ์ทวินามของทุกพจน์

<u>โจทย์ทบทวน</u>

(1) หาจำนวนวิธีในการแบ่งหนังสือ 12 เล่มต่างๆ กัน ออกเป็นกองๆ 3 กอง

(1.1) กองละ 3, 4, 5 เล่ม

(1.2) ทุกกองจำนวนเท่ากัน

(2) หนังสือ 9 เล่ม แบ่งให้นาย ก, ข, ค ได้กี่วิธี ถ้าหาก

(2.1) คนหนึ่งได้ 2 เล่ม อีกคนได้ 3 เล่ม อีกคนได้ 4 เล่ม

(2.2) คนหนึ่งได้ 5 เล่ม อีก 2 คนได้เท่ากัน

(2.3) หนังสือทั้ง 9 เล่มเหมือนกันหมด

(3) เด็กคนหนึ่งมีบอลต่างๆ กัน 10 ลูก จะแบ่งเป็น 5 กอง โดยมี 3 กองที่กองละ 2 ลูก และอีก 2 กองมีกองละลูก ได้กี่วิธี

(4) เด็กคนหนึ่งมีบอลต่างๆ กัน 10 ลูก จะแบ่งให้เพื่อน 5 คน โดยมี 3 คนได้คนละ 2 ลูก และอีก 2 คนได้คนละลูก ได้กี่วิธี

(5) แบ่งชาย 5 คน หญิง 3 คน เข้าพักในห้อง 3 ห้องที่มีขนาด 3, 3, 2 คน (ห้องต่างกัน) จงหาจำนวนวิธีแบ่ง เมื่อ

(5.1) ใครอยู่ห้องไหนก็ได้

(5.2) ผู้หญิง 3 คนต้องอยู่ด้วยกัน

(5.3) ผู้หญิง 3 คนต้องอยู่คนละห้องกัน

(6) จงหาจำนวนวิธีแบ่งพนักงาน 6 คนเป็น 3 กลุ่ม (กลุ่มละกี่คนก็ได้) เพื่อไปทำงาน 3 อย่าง

(6.1) ที่เหมือนกัน

(6.2) ที่แตกต่างกัน

(7) ครูมีหนังสือ 8 เล่มที่ต่างกัน จะแบ่งให้เด็ก 3 คน อย่างน้อยคนละเล่ม ได้กี่วิธี

(8) นักเรียน 12 คน ในจำนวนนี้มีนาย ก, ข, ค ด้วย แบ่งเป็น 3 กลุ่ม เท่าๆ กัน จะแบ่งได้กี่วิธี ถ้า (8.1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

(8.2) นาย ก, ข, ค อยู่ด้วยกัน

(8.3) นาย ก, ข, ค อยู่แยกกันหมด

(9) เด็กคนหนึ่งมีลูกแก้วเหมือนกัน 12 ลูก ต้องการแบ่งให้เพื่อน 3 คน จงหาจำนวนวิธี เมื่อ

(9.1) แต่ละคนได้อย่างน้อย 1 ลูก

(9.2) แต่ละคนได้อย่างน้อย 2 ลูก

(9.3) อาจมีบางคนไม่ได้รับเลย

(10) จดหมายเหมือนกัน 9 ฉบับ ต้องการใส่ตู้ไปรษณีย์ 5 ตู้ จะมีกี่วิธี เมื่อ

(10.1) ทุกตู้ต้องมีจดหมาย

(10.2) ใส่เพียง 3 ตู้เท่านั้น

(11) ชายคนหนึ่งประกอบรถยนต์จำหน่าย เขามีตัวถังรถ 4 ชนิด เครื่องยนต์ 2 ชนิด สีพ่นรถ 5 สี เขาจะผลิตรถยนต์ต่างๆ กันได้กี่แบบ

(12) ผู้ตรวจงานจะต้องตรวจเครื่องจักร 6 เครื่องทุกวัน เขาพยายามเปลี่ยนลำดับก่อนหลังในการตรวจ เพื่อไม่ให้พนักงานรู้ตัว จงหาวิธีทั้งหมดที่จะใช้ได้

(13) สารเคมีชนิดหนึ่งเกิดจากสาร 5 ชนิดผสมกัน โดยเทสารผสมทีละอย่าง จงหาว่ามีวิธีผสมกี่วิธี ถ้าสมมติว่าเทสารใดก่อนหลังก็ได้

(14) ในการจัดแถวเด็กชาย 5 คน ซึ่งมี ด.ช.บอย รวมอยู่ด้วย และมีเด็กหญิงอีก 5 คน จงคำนวณวิธีจัด ถ้า

(14.1) ด.ช.บอย ต้องยืนหัวแถวเสมอ

(14.2) ด.ช.บอยยืนหัวแถว และสลับชายหญิง

(15) เซต $A = \{3, 4, 5\}$ จงหาว่ามีเลขกี่จำนวนซึ่งประกอบด้วยเลขจากเซต A และ

(15.1) มีค่าน้อยกว่า 500

(15.2) มีค่าน้อยกว่า 500 และเป็นจำนวนคู่

(16) มีกี่จำนวนที่ประกอบจากเลข 2, 4, 6, 8 (ใช้ได้เพียงตัวละครั้ง) แล้วมีค่ามากกว่า 999

(17) นำอักษรในคำว่า SPECTRUM มาเรียงเป็นคำที่มี 4 อักษร โดยอักษรในคำไม่ซ้ำกัน

(17.1) ได้กี่คำ

(17.2) ถ้าตัวสุดท้ายเป็นสระเสมอ ได้กี่คำ

(18) จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่จะจัดนักเรียน 6 คน นั่งล้อมรอบโต๊ะกลม โดยที่นาย ก และ ข ซึ่งอยู่ในจำนวน 6 คนนั้น จะต้องนั่งติดกันเสมอ

(19) มีจุด 10 จุดบนเส้นรอบวงกลม จะสร้างหกเหลี่ยมได้กี่รูป

(20) มีจำนวนบวก 6 จำนวน, จำนวนลบ 8 จำนวน, ถ้าเลือกมา 4 จำนวนโดยการสุ่ม จงหาจำนวนวิธีที่เลข 4 จำนวนนั้นคูณกันแล้วได้ผลลัพธ์เป็นบวก

(21) มีหนังสือบนชั้น 12 เล่ม จงหาจำนวนวิธีแบ่งหนังสือให้นาย ก 4 เล่ม และนาย ข 3 เล่ม

(22) ตะกร้าใบหนึ่งบรรจุบอลสีแดง 5 ลูก ขาว 4 ลูก ถ้าหยิบมา 3 ลูก จะมีกี่วิธีที่บอล 3 ลูกนั้นมีสีขาวอย่างน้อย 1 ลูก เมื่อ

(22.1) หยิบพร้อมกันทั้ง 3 ลูก

(22.2) หยิบออกมาทีละลูก โดยไม่ใส่คืน

(23) จงหาจำนวนวิธีเลือกไพ่ 4 ใบจากไพ่สำรับหนึ่ง แล้วได้ A, K, Q, J โดยที่ไพ่เหล่านี้

(23.1) มาจากชุดต่างกันหมด

(23.2) มาจากชุดเดียวกันหมด

(23.3) มาจากชุดใดก็ได้

<u>หมายเหตุ</u> *ชุดของไพ่* มี 4 ชุด (ดอก) และ *ชนิดของไพ่* มี 13 ชนิด (เลข)

(24) แจกไพ่ทีละ 5 ใบ จงหาจำนวนวิธีทั้งหมด ที่ไพ่ในมือหนึ่งจะเป็นชุดเดียวกันทั้ง 5 ใบ

(25) หาวิธีที่ไพ่ในมือหนึ่งมีโพดำ 5 ใบ โพแดง 5 ใบ และ ข้าวหลามตัด 5 ใบ

(26) หาวิธีที่ไพ่ในมือหนึ่งซึ่งมี 5 ใบ จะมีชนิดเดียวกัน 3 ใบ และอีกชนิด 2 ใบ เช่น AAA22

(27) หาวิธีที่ไพ่ในมือหนึ่งซึ่งมี 5 ใบ จะมีชนิดเดียวกัน 2 ใบ อีกชนิด 2 ใบ และอีกชนิด 1 ใบ เช่น AA223

(28) ชาย 5 คน หญิง 5 คน ถ่ายรูปร่วมกัน โดยผู้ชายยืนแถวหลัง ผู้หญิงนั่งแถวหน้า ได้กี่แบบ

(29) จงหาจำนวนผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นได้ จากการยิงปืน 10 นัดไปยังเป้าที่แบ่งเป็น 5 ส่วน

(30) ทีมฟุตบอล 10 ทีม จัดประกบคู่กัน 5 คู่ โดยแข่งวันละคู่ จะมีการจัดที่เป็นไปได้กี่แบบ

(31) ระบายสี 6 สีบนลูกเต๋า ด้านละสี ได้กี่แบบ

(32) ระบายสี 5 สีบนลูกเต๋า ด้านละสี โดยไม่ให้สีเดียวกันอยู่ติดกัน ได้กี่แบบ

(33) ระบายสีบนลูกบาศก์หน้าเกลี้ยง ด้านละสี ได้กี่แบบ ถ้า

(33.1) ระบาย 6 สี

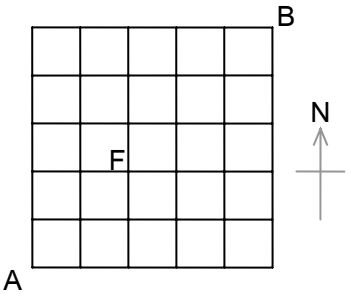
(33.2) ระบาย 5 สี โดยสีเดียวกันต้องไม่อยู่ติดกัน

(33.3) ระบาย 4 สี โดยสีเดียวกันต้องไม่อยู่ติดกัน

(34) นาย ก และ ข อยู่ในหมู่ 7 คน จงหาวิธีจัด 7 คนนั่งล้อมวง โดยไม่ให้ 2 คนนี้อยู่ติดกัน

(35) จำนวนเต็มบวกที่หาร 25,000,000 ลงตัว มีกี่จำนวน

(36) เส้นทางการเดินทางจากเมือง A ไป B เป็นดังรูป ถ้าไปได้ทางทิศเหนือกับตะวันออกเท่านั้น จะไปได้กี่เส้นทาง และหากต้องแวะเติมน้ำมันที่จุด F ด้วย จะเหลือกี่เส้นทาง



(37) คณะผู้แทนไทย 25 คนไปเยี่ยมประเทศจีน และมีเจ้าภาพมาต้อนรับ 15 คน ถ้าทุกคนต้องทักทายเจ้าภาพ จะมีการทักทายเกิดขึ้นทั้งหมดกี่ครั้ง

(38) ในงานเลี้ยงศิษย์เก่า มีผู้ไปงาน 150 คน ถ้าทุกคนทักทายกันและกัน จะมีการทักทายกี่ครั้ง

(39) มีกี่จำนวนที่สร้างจาก 0 0 1 1 2 3 3 แล้วมีค่าเกิน 1 ล้าน

(40) จัดคน 5 คน เข้าพักในห้อง 3 ห้องต่างๆ กัน ซึ่งจุห้องละ 2 คน ได้ทั้งหมดกี่วิธี

(41) แบ่งนักเรียน ชาย 3 คน หญิง 5 คน ออกเป็น 2 กลุ่มเท่ากัน เป็นกลุ่ม A และ B โดยแต่ละกลุ่มต้องมีผู้ชายอยู่ด้วย ได้กี่แบบ

(42) ชาย 5 คน หญิง 5 คน ยืนสลับกันในแถวตรง โดยนาย ก กับนางสาว ข ต้องอยู่ติดกันเสมอ ได้กี่แบบ

(43) นักเรียน 10 คน เรียงแถวเป็นวงกลม โดยมี 1 คนอยู่กลางวง ได้กี่แบบ

(44) แจกของเล่น 5 ชิ้นต่างๆ กัน ให้เด็ก 3 คน (ทุกคนต้องได้อย่างน้อย 1 ชิ้น) ได้กี่วิธี

(45) แบ่งทอฟฟี่ 5 ชนิด ชนิดละ 2 เม็ด ให้เด็ก 2 คน คนละ 5 เม็ด ได้กี่แบบ

(46) บ้านพักมี 5 ห้อง เป็นห้องคู่ 3 ห้อง และห้องเดี่ยว 2 ห้อง สามารถจัดคน 8 คนเข้าพักโดยในจำนวนนี้มีสามีภรรยาคู่หนึ่งต้องพักด้วยกัน ได้ทั้งหมดกี่วิธี

(47) ลูกเต๋า 2 ลูกที่ต่างกัน นำมาวางประกบกันได้ทั้งหมดกี่แบบ

(48) นาย ก และนาย ข เข้าไปจอดรถในที่จอดซึ่งเป็นแถวยาว จอดได้ n คัน โดย ก และ ข ต้องจอดห่างกันเว้น 1 ช่อง สามารถทำได้กี่แบบ (ขณะนั้นไม่มีรถคันอื่นอยู่เลย)

* (49) กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B = \{1, 3, 5, 7\}$

ถ้าให้ $C = \{E \mid E \subset A \ \wedge \ E \cap B \neq \phi\}$ จงหาจำนวนสมาชิกของเซต C

* (50) $A = \{1, 2, 3, 4\}$

(50.1) มีความสัมพันธ์ภายใน A ทั้งหมดกี่แบบ

(50.2) มีความสัมพันธ์ภายใน A ที่มี A เป็นโดเมน ทั้งหมดกี่แบบ

(50.3) มีฟังก์ชันจาก A ไป A ทั้งหมดกี่แบบ

(50.4) มีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จาก A ไปทั่วถึง A ทั้งหมดกี่แบบ

<u>เฉลยโจทย์แบบฝึกหัด</u>

(1) 18 (2) 125 (3) 72 (4) $7!$ (5) 15 (6) $2^5 4^7$ (7) $(5\times5)+(5\times5)$ (8) $100, 48, 43, 30$ (9) 140 (10) $720, 1/28, 24, 210$ (11) 3 (12) 5

(13) $4!,\ P_{4,2}+P_{4,3}+P_{4,4} = 60$ (14) $5!,\ \frac{5!}{2!}$ (15) $6!2!,\ 7!-6!2!$ (16) $24, 12$

(17) $5!\times P_{6,4}$ (18) $4!\times 2$ (19) $6!$ (20) $5!\times P_{6,4}-1,\ 4!5!,\ 5!\times P_{5,4},\ 4\times 5!\times P_{5,3}-1$

(21) $\frac{11!}{4!4!2!}$ (22) $2\times\frac{6!}{2!}\times 1$ (23) $\frac{3!}{2!}4!$ (24) $\frac{7!}{4!3!}$ (25) $(2\times4\times\frac{3!}{2!})+P_{5,3}$ (26) $3!$

(27) $\frac{3!}{2}$ (28) $2!3!$ (29) $2\times 5!6!$ (30) $2!4!$ (31) $4!\times P_{5,4}$ (32) 8 (33) $\binom{10}{3}$

(34) $\binom{6}{3}$ (35) $\binom{16}{8},\ \binom{6}{2}\binom{10}{6},\ \binom{6}{5}\binom{10}{3}+\binom{6}{6}\binom{10}{2}$ (36) $\binom{6}{3}\binom{5}{2}$ (37)

$\binom{3}{2}\binom{18}{2}+\binom{3}{3}\binom{18}{1}$ (38) $\binom{13}{6}+\binom{13}{5}+\binom{13}{4}$ (39) $\binom{3}{1}\binom{5}{3}\binom{4}{2}5!$ (40)

$20+36+480+360$ (41) $\binom{10}{2}\div 4 \rightarrow 12$ วัน (42) $\frac{9!}{4!3!2!}$ (43) $\frac{9!}{(3!)^3 3!}$

(44) $\frac{9!}{(3!)^3}$ (45) $\binom{6}{2},\ \binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}$ (46) $\binom{7}{2}-\binom{4}{2}+1-\binom{3}{2}+1,\ \binom{7}{3}-\binom{4}{3}-\binom{3}{3}$

(47) $\binom{12}{2}-6\binom{3}{2}+6$ (48) $\binom{20}{2}-20$ (49) $\binom{5}{2}+2\binom{4}{2}+2\binom{5}{1}\binom{4}{1}$ (50) $\binom{6}{2}\binom{3}{2}$

(51) $\binom{5}{2}\binom{3}{2}+\binom{3}{2}\binom{4}{2}-\binom{3}{2}\binom{3}{2}$ (52) $\binom{5}{1}, \binom{7}{1}$ (53) 3 (54) $\binom{6}{3}, \binom{10}{3}$ (55) 3
(56) 72 (57) 32 (58) $2(a+1)(b+1)$ (59.1) $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4$
$-56x^3+b^5$ (59.2) $16x^4-96x^3y+216x^2y^2-216xy^3+81y^4$ (59.3) $1-8x+28x^2$
$+70x^4-56x^5+28x^6-8x^7+x^8$ (60.1) $\binom{8}{3}(3x)^5(\frac{1}{y})^3$ (60.2) $\binom{8}{5}$ (60.3) $\binom{8}{2}$
(60.4) $\binom{8}{4}(3^4)$ (61.1) $\binom{12}{5}(x^2)^7(\frac{3}{x^4})^5$ (61.2) $\binom{12}{5}$ (61.3) พจน์ที่ 4
$\rightarrow \binom{12}{3}(3^3)$ (61.4) พจน์ที่ 5 $\rightarrow \binom{12}{4}(x^2)^8(\frac{3}{x^4})^4$ (62) 128.448673 (63) 2^7

<u>เฉลยโจทย์ทบทวน</u>

(1) $\frac{12!}{3!4!5!}, \frac{12!}{(4!)^3 3!}$ (2) $\frac{9!}{2!3!4!}3!, \frac{9!}{5!(2!)^2 2!}3!, \binom{8}{2}$ (3) $\binom{10}{8}\frac{8!}{(2!)^3 3!(1!)^2 2!}$
(4) $\text{prob}(3)\times 5!$ (5) $\frac{8!}{3!3!2!}, \frac{5!2!}{3!2!}, \frac{5!}{1!2!2!}3!$ (6.1) $\frac{6!}{(1!)^2 2!4!}+\frac{6!}{1!2!3!}+\frac{6!}{(2!)^3 3!}$
(6.2) $\text{prob}(6.1)\times 3!$ (7) $\left(\frac{8!}{(1!)^2 2!6!}+\frac{8!}{1!2!5!}+\frac{8!}{1!3!4!}+\frac{8!}{(2!)^2 2!4!}+\frac{8!}{2!(3!)^2 2!}\right)3!$
(8) $\frac{12!}{(4!)^3 3!}, \frac{9!}{(4!)^2 2!1!}, \frac{9!}{(3!)^3 3!}3!$ (9) $\binom{11}{2}, \binom{8}{2}, \binom{14}{2}$ (10) $\binom{8}{4}, \binom{5}{3}\binom{8}{2}$ (11)
40 (12) $6!$ (13) $5!$ (14) $9!, 5!4!$ (15) $30, 10$ (16) $4!$ (17) $P_{8,4}, 7\times6\times5\times2$
(18) $2!4!$ (19) $\binom{10}{6}$ (20) $6^4+6^2 8^2+8^4$ (21) $\frac{12!}{3!4!5!}$ (22.1) $\binom{9}{3}-\binom{5}{3}$
(22.2) $9\times8\times7-5\times4\times3$ (23) $4!, 4, 4^4$ (24) $\binom{13}{5}\times 4$ (25) $\binom{13}{5}^3$ (26)
$\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2}$ (27) $\binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{11}{1}\binom{4}{1}$ (28) $5!5!$ (29) 6^{10} (30) $\frac{10!}{(2!)^5}$
(31) $6!$ (32) $\binom{5}{1}\binom{3}{1}4!$ (33) $\binom{5}{1}3!, \binom{5}{1}3!\div 2, \binom{4}{2}$ (34) $6!-2!5!$ (35) 63 (36)
$\frac{10!}{5!5!}, \frac{4!}{2!2!}\times\frac{6!}{3!3!}$ (37) 25×15 (38) $\binom{150}{2}$ (39) $5\left(\frac{6!}{(2!)^3}\right)$ (40) $\frac{5!}{1!(2!)^2 2!}\times 3!$
(41) $\frac{8!}{4!4!}-\binom{5}{1}2!$ (42) $9(4!4!)\times 2$ (43) $10\times 8!$ (44) $\left(\frac{5!}{1!(2!)^2 2!}+\frac{5!}{(1!)^2 2!3!}\right)3!$
(45) $\binom{5}{2}\binom{3}{1}+\binom{5}{1}\binom{4}{3}+1$ (46) $\frac{6!}{(2!)^2(1!)^2}\times 3$ (47) $\binom{6}{1}\binom{6}{1}\times 4$ (48) $2(n-2)$
(49) $\left[\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}\right]\times\left[\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}\right]$ (50) $2^{16}, 15^4, 4^4, 4!$

ความน่าจะเป็น (Probability)

• *การทดลองสุ่ม* (Random Experiment) คือการกระทำที่เราไม่สามารถบอกได้ว่าแต่ละครั้งจะเกิด *ผลลัพธ์* (Outcome) อะไร แต่สามารถบอกได้ว่ามีผลลัพธ์อะไรบ้างที่เป็นไปได้

• เซตของ "ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด" เรียกว่า **ปริภูมิตัวอย่าง** (Sample Space; S) และเซตของ "ผลลัพธ์ใดๆ ที่เราสนใจ" เรียกว่า **เหตุการณ์** (Event; E) ดังนั้น $E \subset S$

ตัวอย่าง การทดลองสุ่ม โยนเหรียญ 1 อัน 3 ครั้ง

ปริภูมิตัวอย่าง $S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

มีเหตุการณ์ $E \subset S$ ที่เป็นไปได้ $2^8 = 256$ แบบ

เช่น E_1 = ออกหัวเกิน 1 ครั้ง $= \{HHH, HHT, HTH, THH\}$

E_2 = ออกอย่างใดอย่างหนึ่งล้วน $= \{HHH, TTT\}$

E_3 = ออกก้อยในครั้งที่สอง $= \{HTH, HTT, TTH, TTT\}$

E_4 = ออกหัวและก้อยเท่าๆ กัน $= \varnothing$

โจทย์

(1) โยนลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน สนใจผลรวมแต้มของลูกเต๋า จงหาปริภูมิตัวอย่าง

(2) ผลลัพธ์ของหน้าลูกเต๋าสองลูก (ลูกเต๋าไม่ต่างกัน) ที่โยนพร้อมๆ กัน มีกี่แบบ

(3) โยนเหรียญ 1 อัน และสนใจหน้าเหรียญที่หงายขึ้น จะมีเหตุการณ์กี่แบบ อะไรบ้าง

• **ความน่าจะเป็น** ของเหตุการณ์ที่เราสนใจ จะหาได้เฉพาะเหตุการณ์ที่เป็นการทดลองสุ่มเท่านั้น โดยความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A ใช้สัญลักษณ์ $P(A)$ จะคำนวณได้จาก $\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}}$ เมื่อ $n(A)$ คือจำนวนผลลัพธ์ที่อยู่ใน A และ $n(S)$ คือจำนวนผลลัพธ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้

• สมบัติของความน่าจะเป็น

1. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใดๆ มีค่าอยู่ในช่วง 0 ถึง 1 เท่านั้น $\boxed{0 \le P(A) \le 1}$

โดยความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ไม่มีผลลัพธ์เลย มีค่าเป็น 0 $\boxed{P(\varnothing) = 0}$

และความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่มีผลลัพธ์ได้ทุกแบบ มีค่าเป็น 1 $\boxed{P(S) = 1}$

2. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เราสนใจ รวมกับความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เหลือ (ที่เราไม่สนใจ) จะได้ 1 เสมอ $\boxed{P(A) = 1 - P(A')}$

3. ความน่าจะเป็นของสองเหตุการณ์ หาได้จาก $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

ซึ่งจากสมบัติข้อ 2 และ 3 ทำให้เราสามารถใช้แผนภาพเซต (เวนน์-ออยเลอร์) ช่วยคำนวณได้

หมายเหตุ

• ความหมายของ $A \cap B$ ก็คือเหตุการณ์ "A *และ* B" (เกิดขึ้นทั้งสองอย่าง)
ส่วน $A \cup B$ ก็คือเหตุการณ์ "A *หรือ* B" (เกิดขึ้นอย่างใดอย่างหนึ่งหรือทั้งสองอย่าง)

• หากเหตุการณ์สองเหตุการณ์ มีลักษณะดังนี้ $A \cap B = \varnothing$ เราจะเรียกเหตุการณ์ A และ B ว่าเป็นเหตุการณ์*ที่ไม่เกิดร่วมกัน* (Mutually Exclusive) (หรือ Disjoint) และจะทำให้ $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

• แต่หากเหตุการณ์สองเหตุการณ์มีลักษณะดังนี้ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ เราจะเรียกเหตุการณ์ A และ B ว่าเป็นเหตุการณ์*ที่ไม่ขึ้นต่อกัน* หรือ *อิสระจากกัน* (Independent) และจะทำให้ $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)}$

โจทย์

(4) ถ้า $P(A) = 0.48$, $P(B) = 0.32$, และ $P(A \cap B) = 0.25$
จงหา $P(A \cup B)$, $P(A - B)$, $P(A')$, และ $P(B')$

(5) ถ้า $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.55$, และ $P(A \cap B) = 0.15$ จงหาความน่าจะเป็นของ

(5.1) เหตุการณ์ A และ B

(5.2) เหตุการณ์ A หรือ B

(5.3) เหตุการณ์ที่ไม่ใช่ทั้ง A และ B

(6) ความน่าจะเป็นที่สมศักดิ์จะสอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์ และเคมี เป็น $\frac{2}{3}$ และ $\frac{4}{9}$ ตามลำดับ ถ้าความน่าจะเป็นที่เขาจะสอบผ่านทั้งสองวิชา เป็น $\frac{1}{4}$ จงหา

(6.1) P{ผ่านอย่างน้อย 1 วิชา}

(6.2) P{ผ่านเพียงวิชาเดียว}

(6.3) P{ไม่ผ่านทั้ง 2 วิชา}

(7) ลูกเต๋าลูกหนึ่ง ถูกถ่วงน้ำหนักให้แต้มคู่แต่ละหน้ามีโอกาสเกิดเป็น 2 เท่าของแต้มคี่ จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่อไปนี้ในการโยนแต่ละครั้ง

(7.1) ได้แต้มคู่

(7.2) ได้แต้มคี่

(7.3) ได้จำนวนเฉพาะ

(7.4) ได้แต้ม 1 หรือแต้มคู่

(8) โยนลูกเต๋าที่แตกต่างกัน 2 ลูก 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

(8.1) ผลรวมแต้มได้ 8

(8.2) ผลรวมแต้มเป็นจำนวนเฉพาะ

(8.3) ผลรวมแต้มเป็นจำนวนคู่

(9) ถ้าสลับอักษรในคำว่า STATISTICS อย่างสุ่ม จงหาความน่าจะเป็นที่คำที่ได้นั้นจะ

(9.1) มีตัว T ติดกัน 3 ตัว

(9.2) มีตัว T ติดกัน 2 ตัว

(10) กล่องใส่ลูกบอลสองใบ ใบแรกมีบอลสีแดง 2 ลูก สีขาว 3 ลูก และกล่องที่สองมีบอลสีแดง 3 ลูก สีขาว 4 ลูก ถ้าสุ่มหยิบบอลอย่างสุ่มออกมากล่องละ 2 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่

(10.1) ได้สีแดงทั้ง 4 ลูก

(10.2) ได้สีขาวทั้ง 4 ลูก

(10.3) ได้สีแดงอย่างน้อย 1 ลูก

(10.4) ได้สีขาวอย่างน้อย 1 ลูก

(10.5) ได้สีละ 2 ลูก

(11) ในการประกวดร้องเพลงครั้งหนึ่ง มีผู้เข้ารอบ 3 คน แต่ละคนต้องสุ่มเลือกเพลงที่จะร้อง 1 เพลง จากเพลงบังคับที่มีอยู่ 5 เพลง จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่อไปนี้

(11.1) เลือกร้องเพลงเดียวกันทั้ง 3 คน

(11.2) เลือกร้องเพลงเดียวกันเพียง 2 คน

(11.3) มีคนร้องเพลงซ้ำกัน

(11.4) ไม่มีคนร้องเพลงซ้ำกัน

(12) มีเลข 9 จำนวน ซึ่งเป็นบวก 6 จำนวน ลบ 2 จำนวน และศูนย์ 1 จำนวน ในจำนวนบวกมีเลขคู่กับคี่เท่าๆ กัน ในจำนวนลบก็เช่นกัน ถ้าเราสุ่มเลขดังกล่าวมา 4 จำนวน จงหา

(12.1) $P\{$ผลคูณของเลขสี่จำนวน เป็นศูนย์$\}$

(12.2) $P\{$ผลคูณของเลขสี่จำนวน มากกว่าศูนย์$\}$

(12.3) $P\{$ผลคูณของเลขสี่จำนวน น้อยกว่าศูนย์$\}$

(12.4) $P\{$ผลคูณของเลขสี่จำนวน มากกว่าศูนย์และเป็นจำนวนคู่$\}$

(12.5) $P\{$ผลคูณของเลขสี่จำนวน น้อยกว่าศูนย์และเป็นจำนวนคี่$\}$

(13) นักเรียน ม.4, 5, 6 ส่งตัวแทนชายหญิงมาชั้นละคู่ หากสุ่มเลือกตัวแทนออกมา 2 คน ความน่าจะเป็นที่จะได้ชายและหญิงที่มาจากชั้นต่างกัน เป็นเท่าใด

(14) ครูมีหนังสือเรียน 5 วิชา วิชาละ 2 เล่ม (ที่เหมือนกัน) นำมาแบ่งให้นักเรียน 2 คน คนละ 5 เล่มอย่างสุ่ม ให้หาความน่าจะเป็นที่นักเรียนแต่ละคนจะได้หนังสือครบทุกวิชา

(15) จากการกระจาย $(4a+5b)^8$ ถ้าสุ่มหยิบสัมประสิทธิ์ทวินามออกมา 2 จำนวน ให้หาความน่าจะเป็นที่จำนวนทั้งสองจะมีค่าไม่เท่ากัน

(16) กล่องใบหนึ่งมีสลากตัวเลขจำนวนเต็มที่ไม่ซ้ำกัน ทุกใบเป็นจำนวนที่หารด้วย 4 หรือ 6 ลงตัว และมีค่ามากกว่า 10 แต่ไม่เกิน 100 หากสุ่มหยิบสลากออกมา 1 ใบ ให้คำนวณหาโอกาสที่ตัวเลขนั้นจะหารด้วย 4 ไม่ลงตัว หรือหารด้วย 6 ไม่ลงตัว

(17) กำหนดเมตริกซ์ $A=\begin{bmatrix} k-4 & 1 \\ k & k-6 \end{bmatrix}$ และเซต $B=\left\{ x\in I \mid x^2<21x \right\}$ สุ่มสมาชิกจาก B มา 1 ตัว เพื่อแทนค่า k ในเมตริกซ์ A จงหาโอกาสที่ A จะเป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์

(18) ตารางขนาด 12 ช่องนี้ ถูกทาสีลงไปตามลำดับทีละช่องอย่างสุ่มโดยการโยนเหรียญ คือถ้าเหรียญออกหัวจะทาสีแดง และถ้าออกก้อยจะทาสีเขียว ทำเช่นนี้จนครบทุกช่อง จงหาความน่าจะเป็นที่ช่อง A, B, C, D จะเป็นสีแดงหมดทั้งสี่ช่อง

	A		
B		C	
	D		

(19) สลากเลข 1 ถึง 4 อยู่ในกล่อง สุ่มหยิบขึ้นมาทีละใบจนครบทุกใบ ให้หาความน่าจะเป็นที่จะได้เลขเรียงจากน้อยไปมากพอดี (ลองคิดแบบการนับ และคิดแบบความน่าจะเป็นคูณกัน)

(20) ในโรงพยาบาลมีผู้ป่วยโรคหืดหรือหอบ 60% เป็นหืด 41% เป็นหอบ 28% ถ้าสุ่มเลือกผู้ป่วยมา 1 คน ให้หาความน่าจะเป็นที่คนไข้คนนี้จะเป็นโรคหืดเพียงอย่างเดียว

<u>เฉลย</u>

(1) $S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ (2) 21 แบบ (3) 4 แบบ คือ $E_1 = \varnothing$, $E_2 = \{H\}$, $E_3 = \{T\}$, $E_4 = \{H, T\}$ (4) $0.55, 0.23, 0.52, 0.68$ (5) $0.15, 0.8, 0.2$ (6) $8/9, 23/36, 1/9$ (7) $2/3, 1/3, 4/9, 7/9$ (8) $5/36, 15/36, 18/36$ (9) $1/15, 7/15$ (10) $1/70, 3/35, 32/35, 69/70, 29/70$ (11) $1/25, 12/25, 13/25, 12/25$ (12) $4/9, 5/21, 20/63, 5/21, 1/126$ (13) $2/5$ (14) $1/51$ (15) $8/9$ (16) $1-(8/30)$ (17) $9/10$ (18) $1/16$ (19) $1/24$ (20) 32%

สถิติ (1) (Statistics) ค่ากลางของข้อมูล

• เมื่อเรามี *ข้อมูล* (Data) จำนวนหนึ่ง เรามักจำเป็นต้องวิเคราะห์ข้อมูลก่อนถึงจะนำไปใช้ประโยชน์ (เพื่อการตัดสินใจ หรือการวางแผน) ต่อได้ การวิเคราะห์ข้อมูลในที่นี้แบ่งเป็น *การวิเคราะห์เบื้องต้น* ได้แก่ การหาค่ากลาง ในบทเรียนสถิติ (1) การหาค่าการกระจาย ในบทเรียนสถิติ (2) และ *การวิเคราะห์ขั้นสูง* ได้แก่ การประมาณความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน ในบทเรียนสถิติ (3) โดยข้อมูลที่ผ่านการวิเคราะห์แล้ว จะเรียกว่า *สารสนเทศ* หรือ *ข่าวสาร* (Information)

• ข้อมูลที่กล่าวถึง มี 2 ลักษณะ คือ *ข้อมูลเชิงปริมาณ* (Quantitative Data) ซึ่งเป็นข้อมูลที่ใช้แทนขนาดหรือปริมาณที่วัดเป็นตัวเลข สามารถนำไปคำนวณหรือเปรียบเทียบได้โดยตรง กับ *ข้อมูลเชิงคุณภาพ* (Qualitative Data) ซึ่งไม่ได้เป็นตัวเลข เช่น ข้อมูลเพศ ข้อมูลความพึงพอใจ หากเราต้องการวิเคราะห์ก็ต้องกำหนดตัวเลขเพื่อใช้แทนข้อมูลเหล่านี้ก่อน

• หากแบ่งข้อมูลตามแหล่งที่มา จะได้ 2 กลุ่ม คือ

1. *ข้อมูลปฐมภูมิ* (Primary Data) คือข้อมูลที่ได้จากการสำรวจเองโดยตรง (ไม่ว่าจะเป็นการนับ การวัด การทดลอง การสอบถาม การสังเกต) ไม่เคยมีการเก็บรวบรวมไว้ก่อน ข้อมูลปฐมภูมิจะเก็บรวบรวมได้ 2 รูปแบบ คือ เก็บข้อมูลให้ครบจากทุกๆ สิ่งที่เราต้องการ เรียกว่า *การสำมะโน* (Census) และการเก็บข้อมูลจากสิ่งที่สุ่มเลือกมา เรียกว่า *การสำรวจตัวอย่าง* (Sample Survey)

2. *ข้อมูลทุติยภูมิ* (Secondary Data) คือข้อมูลที่มีผู้รวบรวมไว้แล้ว ผู้ใช้ไม่ต้องทำการสำรวจเอง เช่น ข้อมูลจากหน่วยงานราชการ องค์กรของรัฐ รวมทั้งรายงานและบทความจากหนังสือต่างๆ

<u>การแจกแจงความถี่ของข้อมูล</u>

1. *การแจกแจงความถี่* (Frequency Distribution) คือการจัดข้อมูลที่มีอยู่ให้เป็นกลุ่มๆ เพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์ และการจัดเก็บ โดยดำเนินการดังนี้

(1) แบ่งค่าข้อมูลที่เป็นไปได้ทั้งหมดออกเป็นช่วงๆ ตามที่ต้องการ เรียกแต่ละช่วงว่า *อันตรภาคชั้น* (Class Interval) เช่น “30 – 39”, “40 – 49”, “50 – 59”, “60 – 69”, “70 – 79”

(2) พิจารณาว่าบรรดาข้อมูลที่มีนั้น มีค่าตกอยู่ในแต่ละช่วงเป็นปริมาณเท่าใด เรียกปริมาณข้อมูลที่ปรากฏในแต่ละช่วงว่า *ความถี่* (Frequency)

(3) มักเขียนอันตรภาคชั้นและความถี่ของแต่ละชั้น ในรูปตารางขนาดประมาณ 7 ถึง 15 ชั้น และมักกำหนดความกว้างแต่ละชั้นเท่าๆ กัน (แม้โดยทั่วไปไม่จำเป็นต้องเท่ากันก็ได้ รวมทั้งอันตรภาคชั้นต่ำสุดหรือสูงสุดอาจเป็น *อันตรภาคชั้นเปิด* (Open-End Class Interval) ก็ได้ เช่น “น้อยกว่า 30” หรือ “มากกว่า 80”)

• ตัวอย่างเช่น ข้อมูลน้ำหนัก (กก.) ของนักเรียน 40 คนในชั้นเรียน ได้แก่

40	45	46	46	50	51	49	52	42	41
50	55	51	53	54	40	43	48	53	55
58	62	64	61	50	48	48	56	58	58
59	64	63	68	59	65	61	67	66	64

หากต้องการตารางแจกแจงความถี่ขนาด 6 ชั้น อาจเขียนได้ดังนี้

น้ำหนัก (กก.)	จำนวนนักเรียน
40 – 44	5
45 – 49	7
50 – 54	9
55 – 59	8
60 – 64	7
65 – 69	4
รวม	**40**

• อันตรภาคชั้น ได้แก่ 40 – 44, 45 – 49, 50 – 54, 55 – 59, 60 – 64, และ 65 – 69 โดยมีความถี่ของแต่ละชั้นได้แก่ 5, 7, 9, 8, 7, และ 4 ตามลำดับ

• ค่า *ขอบล่าง* (Lower Boundary) และ *ขอบบน* (Upper Boundary) คือค่ากึ่งกลางระหว่างรอยต่ออันตรภาคชั้น เช่น ชั้น 45 – 49 มีค่า 44.5 เป็นขอบล่าง ซึ่งค่า 44.5 ก็เป็นขอบบนของชั้น 40 – 44 ด้วย

• ความกว้างอันตรภาคชั้น หาได้จาก “ผลต่างของขอบบนและขอบล่างของชั้นนั้น” ในตัวอย่างนี้ความกว้างแต่ละชั้นเป็น 5 เท่ากันหมด

2. *การแจกแจงความถี่สะสม* (Cumulative Frequency Distribution)

ความถี่สะสม (Cumulative Frequency) คือ “ผลรวมความถี่ชั้นนั้น กับความถี่ชั้นที่มีค่าข้อมูลต่ำกว่าทั้งหมด” ในบางครั้งอาจให้ความถี่สะสมเป็นผลรวมความถี่ชั้นนั้นกับชั้นที่ค่าข้อมูลสูงกว่าทั้งหมดก็ได้ แต่ไม่เป็นที่นิยม (ตัวอย่างความถี่สะสมอยู่ในตารางถัดไป)

3. *การแจกแจงความถี่สัมพัทธ์ และความถี่สะสมสัมพัทธ์*

ความถี่สัมพัทธ์ (Relative Frequency) และ *ความถี่สะสมสัมพัทธ์* (Relative Cumula--tive Frequency) ก็คืออัตราส่วนความถี่หรือความถี่สะสม เทียบกับความถี่รวม (N) ดังนั้นความถี่สัมพัทธ์รวมต้องได้ 1 เสมอ และความถี่สะสมสัมพัทธ์ของชั้นสูงสุดก็ต้องเป็น 1 เช่นกัน (บางครั้งใช้เป็นหน่วย “ร้อยละ” ก็ได้ ซึ่งจะปรับให้ผลรวมความถี่เป็นร้อยละ 100)

อันตรภาคชั้น	ความถี่	ความถี่สัมพัทธ์	ความถี่สะสม	ความถี่สะสมสัมพัทธ์
40 – 44	5	0.125	5	0.125
45 – 49	7	0.175	12	0.300
50 – 54	9	0.225	21	0.525
55 – 59	8	0.200	29	0.725
60 – 64	7	0.175	36	0.900
65 – 69	4	0.100	**40**	**1.000**
รวม	**40**	**1.000**		

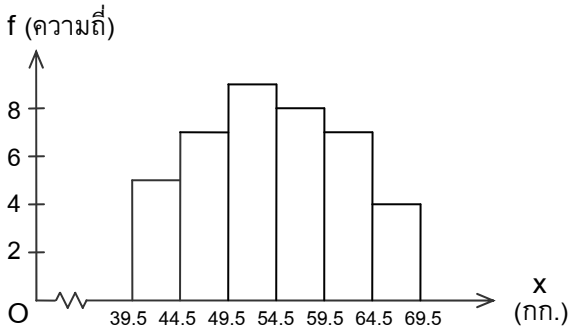
4. *การใช้กราฟแสดงการแจกแจงความถี่ (หรือความถี่สะสม)*

ฮิสโทแกรม (Histogram) คือแผนภูมิแท่งสี่เหลี่ยมวางเรียงติดกัน โดยให้แกนนอนแทนค่าข้อมูล x (เขียนกำกับด้วยขอบบนขอบล่างของชั้น หรือด้วยจุดกึ่งกลางชั้นก็ได้) และแกนตั้งแทนค่าความถี่ f ความสูงของแท่งสี่เหลี่ยมจะแปรตามความถี่ของชั้นนั้นๆ

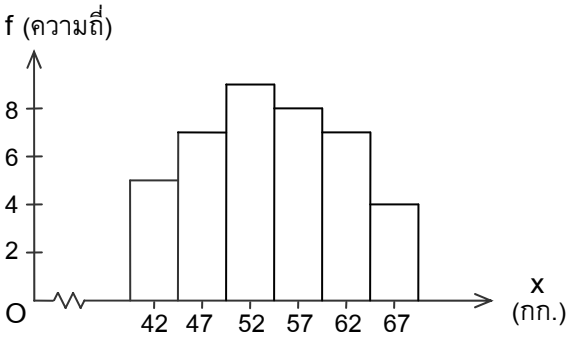
รูปหลายเหลี่ยมของความถี่ (Frequency Polygon) คือรูปที่เกิดจากการลากเส้นตรงเชื่อมจุดกึ่งกลางยอดแท่งสี่เหลี่ยมของฮิสโทแกรมแต่ละแท่ง (โดยสมมติให้มีอันตรภาคชั้นก่อนหน้าและหลังอันตรภาคชั้นทั้งหมดที่มีอยู่ ฝั่งละ 1 ชั้น และลากเส้นตรงไปบรรจบแกนนอนที่กึ่งกลางชั้นทั้งสองนี้ เพื่อให้เป็นรูปปิดที่มีพื้นที่เท่ากับฮิสโทแกรมเดิม)

เส้นโค้งของความถี่ (Frequency Curve) คือรูปที่เกิดจากการปรับเส้นตรงในรูปหลายเหลี่ยมของความถี่ ให้เป็นเส้นโค้ง (โดยพยายามให้มีพื้นที่ใกล้เคียงเดิมที่สุด)

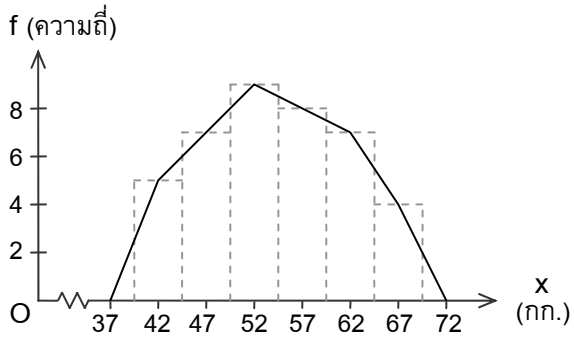
น้ำหนัก (กก.)	ความถี่	ความถี่สะสม
40 – 44	5	5
45 – 49	7	12
50 – 54	9	21
55 – 59	8	29
60 – 64	7	36
65 – 69	4	**40**
รวม	**40**	



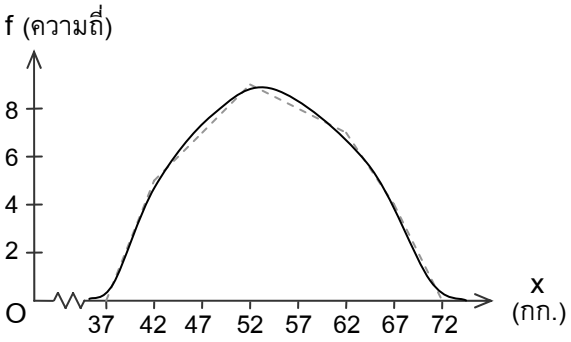
ฮิสโทแกรม (1) แสดงน้ำหนักนักเรียน 40 คน



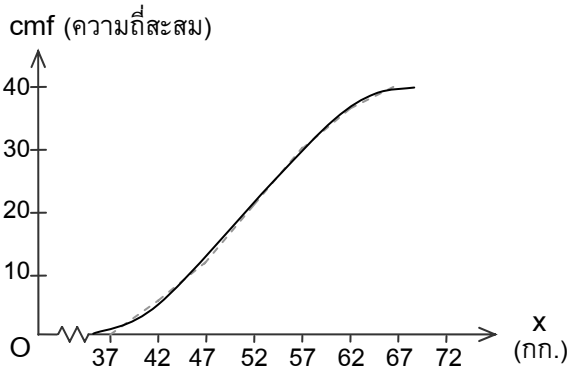
ฮิสโทแกรม (2) แสดงน้ำหนักนักเรียน 40 คน



รูปหลายเหลี่ยมของความถี่ แสดงน้ำหนักนักเรียน 40 คน



เส้นโค้งของความถี่ แสดงน้ำหนักนักเรียน 40 คน



เส้นโค้งของความถี่สะสม (Ogive)
แสดงน้ำหนักนักเรียน 40 คน

การหาค่ากลางของข้อมูล

ค่ากลางของข้อมูล เป็นตัวเลขที่ใช้แทนข้อมูลทั้งหมด จะช่วยให้วิเคราะห์ข้อมูลได้อย่างกว้างๆ ซึ่งค่ากลางที่นิยมใช้ มี 3 ชนิด ได้แก่ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยม

1. *ค่าเฉลี่ยเลขคณิต* (Arithmetic Mean)

• ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูล $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_N$ ใช้สัญลักษณ์ว่า $\bar{X}$ (อ่านว่า x-bar) เป็นค่ากลางที่ให้ความสำคัญกับ *ค่าของข้อมูล* โดยตรง จึงเหมาะกับชุดข้อมูลที่มีค่าใกล้เคียงกันทุกค่า ไม่มีค่าใดสูงหรือต่ำผิดปกติไปจากค่าอื่นๆ (มิฉะนั้นค่าที่ได้จะไม่มีคุณภาพ)

ข้อมูลที่ยังไม่ได้แจกแจงความถี่ (Ungrouped Data)

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$$

X_i คือข้อมูลตัวที่ i, และมีข้อมูลทั้งหมด N ตัว

ข้อมูลที่ยังไม่ได้แจกแจงความถี่ คิดแบบถ่วงน้ำหนัก (Weighted)

$$\bar{X} = \frac{w_1X_1 + w_2X_2 + w_3X_3 + \ldots + w_NX_N}{w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_iX_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i}$$

X_i คือข้อมูลตัวที่ i, w_i คือน้ำหนักของข้อมูลตัวที่ i, และมีข้อมูลทั้งหมด N ตัว

ข้อมูลที่แจกแจงความถี่แล้ว (Grouped Data)

$$\bar{X} = \frac{f_1X_1 + f_2X_2 + f_3X_3 + \ldots + f_kX_k}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_iX_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_iX_i}{N}$$

X_i กึ่งกลางชั้นที่ i, f_i คือความถี่ชั้นที่ i, มีทั้งหมด k ชั้น, และมีข้อมูลทั้งหมด N ตัว

ข้อมูลที่แจกแจงความถี่แล้ว (สูตรลดทอน)

$$\bar{X} = a + I\bar{D} \qquad \text{เมื่อ } \bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_iD_i}{N}$$

a คือกึ่งกลางของชั้นใดชั้นหนึ่งที่เลือก (ชั้นใดก็ได้), I คือความกว้างชั้น (เท่ากันทุกชั้น)

D_i เป็นจำนวนเต็ม โดยให้ชั้นที่มีค่า a นั้นเป็น $D = 0$ และชั้นที่มีข้อมูลน้อยลง $D = -1, -2, \ldots$ ไปเรื่อยๆ ส่วนชั้นที่ข้อมูลสูงขึ้น $D = 1, 2, \ldots$ ไปเรื่อยๆ

หมายเหตุ สัญลักษณ์ $\sum$ (Sigma) ใช้แทนผลรวม โดยมีตัวแปร i กำกับไว้ว่าในแต่ละพจน์จะแปรค่าจากเท่าใดจนถึงเท่าใด (เช่น $i = 1$ ถึง N) และสมบัติของ $\sum$ ที่ควรทราบมีดังนี้

- $\sum_{i=1}^{N} c = N \cdot c$
- $\sum_{i=1}^{N} c\,x_i = c \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i$
- $\sum_{i=1}^{N} (x_i \pm y_i) = \sum_{i=1}^{N} x_i \pm \sum_{i=1}^{N} y_i$

c เป็นค่าคงที่

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตรวม (Combined Arithmetic Mean) ของข้อมูลหลายๆ ชุด

$$\bar{X}_c = \frac{(\sum X)_c}{N_c} = \frac{N_1\bar{X}_1 + N_2\bar{X}_2 + N_3\bar{X}_3 + \ldots + N_k\bar{X}_k}{N_1 + N_2 + N_3 + \ldots + N_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i\bar{X}_i}{\sum_{i=1}^{k} N_i}$$

$\bar{X}_i$ คือค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดที่ i, N_i คือจำนวนข้อมูลชุดที่ i จากทั้งหมด k ชุด

หมายเหตุ อาจมองในแง่ว่า เป็นการนำค่าเฉลี่ยแต่ละชุด มาถ่วงน้ำหนักด้วยจำนวนข้อมูลก็ได้

2. *มัธยฐาน* (Median; Med)

• มัธยฐาน คือค่าที่มีตำแหน่งอยู่กึ่งกลางของข้อมูลทั้งหมด (เมื่อเรียงลำดับข้อมูลจากน้อยไปมาก หรือมากไปน้อย) เป็นค่ากลางที่ให้ความสำคัญกับ *ลำดับของข้อมูล* (บอกให้ทราบว่ามีข้อมูลที่มีค่ามากกว่าค่านี้ กับน้อยกว่าค่านี้ อยู่ปริมาณเท่าๆ กัน) จึงยังคงใช้ได้ดีกับข้อมูลชุดที่มีบางค่าสูงหรือต่ำกว่าค่าอื่นอย่างผิดปกติ

ข้อมูลที่ยังไม่ได้แจกแจงความถี่ (Ungrouped Data)

Med คือข้อมูล *ในตำแหน่งที่* $\frac{N+1}{2}$ (ตำแหน่งกึ่งกลาง)

เมื่อมีข้อมูลทั้งหมด N ตัว และเรียงลำดับแล้ว

ข้อมูลที่แจกแจงความถี่แล้ว (Grouped Data)

$$\text{Med} = L + I\left(\frac{\frac{N}{2} - \sum f_L}{f_{\text{Med}}}\right)$$

ข้อสังเกต ใช้ $\frac{N}{2}$ โดยไม่ต้องบวกหนึ่ง

L คือขอบล่างชั้นที่มีมัธยฐานอยู่ (ตัวที่ $N/2$) ซึ่งชั้นนั้นมีความกว้าง I และมีความถี่เป็น f_{Med}

$\sum f_L$ คือความถี่รวมของทุกชั้นที่มีค่าข้อมูลน้อยกว่า (หรือ คือความถี่สะสมของชั้นที่ข้อมูลน้อยกว่า)

3. *ฐานนิยม* (Mode; Mo)

• ฐานนิยม คือค่าข้อมูลตัวที่ปรากฏบ่อยครั้งที่สุด (มีความถี่สูงที่สุด) เป็นค่ากลางที่ให้ความสำคัญกับ *ความถี่ของข้อมูล* จะเหมาะสมที่สุดกับข้อมูลเชิงคุณภาพ เช่น การลงคะแนนเลือกตั้ง

ข้อมูลที่ยังไม่ได้แจกแจงความถี่ (Ungrouped Data)

Mo คือข้อมูลตัวที่มีความถี่มากที่สุด

หมายเหตุ โดยทั่วไปจะเป็นฐานนิยมร่วมกันได้ไม่เกิน 2 ค่า

ข้อมูลที่แจกแจงความถี่แล้ว (Grouped Data)

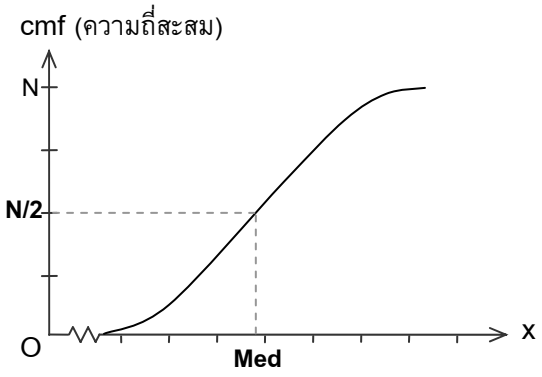
$$\text{Mo} = L + I\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)$$

L คือขอบล่างชั้นที่มีฐานนิยมอยู่ (ชั้นที่ความถี่สูงสุด) ซึ่งทุกๆ ชั้นมีความกว้าง I

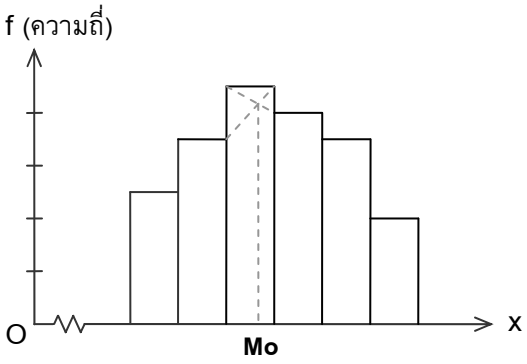
d_1 คือผลต่างความถี่ ชั้นนั้นกับชั้นที่ค่าข้อมูลน้อยลง

d_2 คือผลต่างความถี่ ชั้นนั้นกับชั้นที่ค่าข้อมูลมากขึ้น

• นอกจากการคำนวณจากข้อมูลโดยตรงแล้ว เรายังสามารถหาค่ามัธยฐานได้จากเส้นโค้งของความถี่สะสม และหาฐานนิยมได้จากฮิสโทแกรม ดังภาพ



การหาค่ามัธยฐานจาก
เส้นโค้งของความถี่สะสม



การหาค่าฐานนิยมจากฮิสโทแกรม

• <u>ข้อสังเกต</u> ในการคำนวณค่ากลาง จะพบว่าข้อมูลบางลักษณะไม่เหมาะสมกับค่ากลางบางชนิด ซึ่งมีผลสรุปไว้คร่าวๆ ดังตารางนี้

ลักษณะข้อมูล		ค่าเฉลี่ยเลขคณิต	มัธยฐาน	ฐานนิยม
ยังไม่แจกแจง	- ข้อมูลเชิงคุณภาพ	ไม่เหมาะสม	ไม่เหมาะสม	ใช้ได้
	- เกาะกลุ่มกันปกติ	ใช้ได้	ใช้ได้	ใช้ได้
	- บางค่าต่างไปจนผิดปกติ	ไม่เหมาะสม	ใช้ได้	ใช้ได้
แจกแจงแล้ว	- ทุกชั้นกว้างเท่ากัน	ใช้ได้	ใช้ได้	ใช้ได้
	- มีอันตรภาคชั้นเปิด	ไม่เหมาะสม	ใช้ได้	ใช้ได้
	- บางชั้นกว้างไม่เท่ากัน	ไม่เหมาะสม	ใช้ได้	ไม่เหมาะสม

• <u>สมบัติของค่าเฉลี่ยเลขคณิต</u>

(1) $N\bar{X} = \sum_{i=1}^{N} X_i$ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คูณกับจำนวนข้อมูล จะได้เป็นผลรวมข้อมูลทั้งหมด

(2) $\sum_{i=1}^{N} (X_i - \bar{X}) = 0$ ผลรวมของค่าเบี่ยงเบนทั้งหมดเป็นศูนย์

(3) $\sum_{i=1}^{N} (X_i - K)^2$ จะน้อยที่สุด ก็เมื่อ $K = \bar{X}$

• <u>สมบัติของมัธยฐาน</u>

$\sum_{i=1}^{N} |X_i - K|$ จะน้อยที่สุด ก็เมื่อ $K = \text{Med}$ (คล้ายข้อ 3 ของ $\bar{X}$)

• <u>สมบัติของค่ากลางทั้ง 3 ชนิด</u>

(1) ค่ากลางที่ได้ จะมีค่าอยู่ระหว่างข้อมูลที่น้อยที่สุดกับมากที่สุด เสมอ

(2) ถ้าข้อมูลชุด Y ทุกๆ ตัว สัมพันธ์กับข้อมูลชุด X แต่ละตัว ตามสมการ $Y_i = mX_i + c$ จะได้ว่า (ค่ากลางของ Y) $= m \cdot$ (ค่ากลางของ X) $+ c$ ด้วย

4. *ค่ากลางอื่นๆ*

- *ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต* (Geometric Mean; GM)

ข้อมูลที่ยังไม่ได้แจกแจงความถี่ $$GM = \sqrt[N]{X_1X_2X_3\ldots X_N} = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} X_i}$$

X_i คือข้อมูลตัวที่ i, และมีข้อมูลทั้งหมด N ตัว

ข้อมูลที่แจกแจงความถี่แล้ว $$GM = \sqrt[\sum_{i=1}^{k} f_i]{X_1^{f_1}\, X_2^{f_2}\, X_3^{f_3}\ldots X_k^{f_k}} = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{k} X_i^{f_i}}$$

X_i กึ่งกลางชั้นที่ i, f_i คือความถี่ชั้นที่ i, มีทั้งหมด k ชั้น, และมีข้อมูลทั้งหมด N ตัว

หมายเหตุ สัญลักษณ์ $\prod$ (Pi) ใช้แทนผลคูณ โดยมีตัวแปร i กำกับไว้ว่าในแต่ละตัวคูณจะแปรค่าจากเท่าใดจนถึงเท่าใด (เช่น $i = 1$ ถึง N) คล้ายสัญลักษณ์ $\sum$ (Sigma)

- *ค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก* (Harmonic Mean; HM)

ข้อมูลที่ยังไม่ได้แจกแจงความถี่ $$HM = \frac{N}{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \frac{1}{X_3} + \ldots + \frac{1}{X_N}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{X_i}\right)}$$

X_i คือข้อมูลตัวที่ i, และมีข้อมูลทั้งหมด N ตัว

ข้อมูลที่แจกแจงความถี่แล้ว $$HM = \frac{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_k}{\frac{f_1}{X_1} + \frac{f_2}{X_2} + \frac{f_3}{X_3} + \ldots + \frac{f_k}{X_k}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i}{\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{f_i}{X_i}\right)} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{f_i}{X_i}\right)}$$

X_i กึ่งกลางชั้นที่ i, f_i คือความถี่ชั้นที่ i, มีทั้งหมด k ชั้น, และมีข้อมูลทั้งหมด N ตัว

- *กึ่งกลางพิสัย* (Midrange)

ข้อมูลที่ยังไม่ได้แจกแจงความถี่ $$Midrange = \frac{X_{max} + X_{min}}{2}$$

X_{max} คือข้อมูลที่มีค่าสูงที่สุด, X_{min} คือข้อมูลที่มีค่าต่ำที่สุด

ข้อมูลที่แจกแจงความถี่แล้ว $$Midrange = \frac{U_{max} + L_{min}}{2}$$

U_{max} คือขอบบนของชั้นที่ค่าข้อมูลสูงที่สุด, L_{min} คือขอบล่างของชั้นที่ค่าข้อมูลต่ำที่สุด

โจทย์

(1) ส่วนสูงนักเรียน 8 คน วัดได้ดังนี้ 112, 120, 114, 122, 112, 110, 114, 112 ซม. จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยม

(2) [Ent'38] จากข้อมูลที่กำหนดให้ ชุด A: 1, 3, 2, 2, 5, 3, 4, 4, 3 และชุด B: 1, 2, 4, 1, 2, 5, 2, 5, 1, 5, 5, 3 พิจารณาข้อความต่อไปนี้ ข้อใดถูกหรือผิดบ้าง

ก. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลสองชุดนี้ เท่ากัน

ข. มัธยฐานของข้อมูลสองชุดนี้ เท่ากัน

(3) ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วยค่าดังนี้ 5, 1, 3, 2, 5, 4, 2, 7, 8, 3, 2, 1, 9, 8, 3, 5, 6, 9, 4, 3 ถามว่าข้อมูลชุดนี้มีการแจกแจงแบบใด ค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยมเป็นเท่าใด

(4) จงหาข้อมูล 4 จำนวน ซึ่งมีฐานนิยมและมัธยฐานเป็น 70 เท่ากัน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น 75 และพิสัยเป็น 80

(5) ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบของนักเรียน 10 คน เป็น 65 คะแนน ถ้านักเรียน 7 คนแรกมีคะแนนสอบดังนี้ 55, 43, 67, 80, 85, 74, 38 คะแนน ส่วนอีก 3 คน มีคนได้คะแนนเท่ากัน 2 คน และมากกว่าอีกคนหนึ่งอยู่ 11 คะแนน จงหามัธยฐาน และฐานนิยมของคะแนนสอบของนักเรียน 10 คนนี้

(6) [Ent'ต.ค.41] ข้อมูลชุดหนึ่งเรียงลำดับจากน้อยไปมากได้ 10, 20, 30, 30, a, b, 60, 60, 90, 120 ถ้าฐานนิยมและมัธยฐานเป็น 30 และ 40 ตามลำดับแล้ว ข้อมูลชุดต่อไปนี้จะมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่าใด 11, 22, 33, 34, a+5, b+6, 67, 68, 99, 130

(7) [Ent'40] คะแนนสอบของนักเรียนกลุ่มหนึ่งมีเส้นโค้งความถี่เป็นโค้งเบ้ซ้าย โดยที่ 80 เปอร์เซ็นต์ของนักเรียนทั้งหมดสอบได้คะแนนเท่ากันคือ 75 คะแนน สมชายสอบได้คะแนนเท่ากับค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบ โดยที่คะแนนของสมชายต่างจากฐานนิยมอยู่ 6 คะแนน สมชายสอบได้คะแนนเท่าใด

(8) ครอบครัวหนึ่งมีบุตร 5 คน คนโตอายุ 15 ปี คนสุดท้องอายุ 4 ปี ค่าเฉลี่ยอายุบุตรทุกคนเป็น 11 ปี มัธยฐานเป็น 12 ปี หากบุตรคนที่ 4 อายุน้อยกว่าคนที่ 2 อยู่ 4 ปี จงหาค่าเฉลี่ยของอายุบุตรในอีก 3 ปีข้างหน้า

(9) [Ent'41] ความสัมพันธ์ระหว่างกำไร (y) และราคาทุน (x) ของสินค้าชนิดหนึ่งเป็น $y = 7 + 0.25x$ ถ้าราคาทุนของสินค้า 5 ชิ้นเป็น 32, 48, 40, 56, 44 บาท แล้ว จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของกำไรของสินค้า 5 ชิ้นนี้

(10) จากการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนัก (กก.; W) กับส่วนสูง (ซม.; H) ของคน 15 คน พบว่าเป็นไปตามสมการ $3W = H - 15$ ถ้าค่าเฉลี่ยของส่วนสูง 6 คนแรกเป็น 159 ซม. และของอีก 9 คนที่เหลือเป็น 156 ซม. ให้หาค่าเฉลี่ยของน้ำหนักคน 15 คนนี้

(11) ข้อมูลชุดหนึ่งมี $\bar{X}$ เป็น 11 ถ้ามีข้อมูลค่า 29 เพิ่มอีกตัว จะทำให้ $\bar{X}$ กลายเป็น 13 ให้หาว่าเดิมมีข้อมูลอยู่กี่ตัว

(12) ข้อมูล N จำนวน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น 15 ภายหลังพบว่าอ่านข้อมูลผิด คือจาก 21 อ่านผิดเป็น 12 จึงทำการหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตใหม่ได้เป็น 16 จงหาจำนวนข้อมูล

(13) จากการหาตัวกลางเลขคณิต หรือ $\bar{X}$ ของข้อมูล 10 ตัว ได้ค่าเป็น 12 แต่ปรากฏว่าอ่านข้อมูลผิดไป จากข้อมูลจริงคือ 3 แต่อ่านเป็น 8 ดังนั้นค่า $\bar{X}$ ที่แท้จริงคือเท่าใด

(14) น้ำหนักเฉลี่ยของนักเรียนชายเป็น 70 กก. นักเรียนหญิงเป็น 55 กก. และน้ำหนักเฉลี่ยของนักเรียนทั้งหมด 150 คน เป็น 60 กก. ให้หาจำนวนนักเรียนชาย และนักเรียนหญิง

(15) จากผลสอบของนักเรียน 30 คนในห้องหนึ่ง พบว่าค่าเฉลี่ยของคะแนนนักเรียนชายเท่ากับจำนวนนักเรียนชายพอดี และค่าเฉลี่ยของคะแนนนักเรียนหญิงก็เท่ากับจำนวนนักเรียนหญิงด้วย หากค่าเฉลี่ยรวมทั้งห้องเป็น 50/3 คะแนน และจำนวนนักเรียนชายน้อยกว่านักเรียนหญิง จงหาจำนวนนักเรียนชาย

(16) คนกลุ่มหนึ่งเป็นชาย 40 คน และหญิง 60 คน เงินรวมกัน 18,630 บาท ถ้าค่าเฉลี่ยของเงินที่ผู้หญิงมีน้อยกว่าค่าเฉลี่ยของเงินที่ผู้ชายมี อยู่ 10 บาท จงหาผลรวมของค่าเฉลี่ยทั้งสองนี้

(17) [Ent'41] ตารางต่อไปนี้เป็นเกณฑ์การคิดคะแนนที่ผู้สอนกำหนดไว้ และผลการเรียนของนักเรียนคนหนึ่ง ถ้านักเรียนคนนี้ได้คะแนนเฉลี่ยตลอดภาคเป็น 79% แล้ว ให้หาคะแนนสอบปลายภาคที่นักเรียนคนนี้ได้รับ

	การบ้าน	สอบย่อย		สอบปลายภาค
		ครั้งที่ 1	ครั้งที่ 2	
เกณฑ์	20%	20%	30%	30%
คะแนนที่ได้ (100)	92	84	63	

(18) [Ent'มี.ค.44] กำหนดให้ $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ มีค่าเป็น 5, 6, a, 7, 10, 15, 5, 10, 10, 9 ตามลำดับ โดยที่ $a < 15$ ถ้าพิสัยของข้อมูลชุดนี้คือ 12

b เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $\sum_{i=1}^{10}(x_i - b)^2$ มีค่าน้อยที่สุด

และ c เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $\sum_{i=1}^{10}|x_i - c|$ มีค่าน้อยที่สุด แล้ว $a+b+c$ มีค่าเท่าใด

(19) [Ent'มี.ค.43] ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วย $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ โดยมีสมบัติดังนี้

$\sum_{i=1}^{20}|x_i - a|$ มีค่าน้อยที่สุดเมื่อ $a = 5$ และ $\sum_{i=1}^{20}(x_i - b)^2$ มีค่าน้อยที่สุดเมื่อ $b = 8$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้ ข้อใดถูกหรือผิดบ้าง

ก. ข้อมูลชุดนี้มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตน้อยกว่ามัธยฐาน

ข. ผลรวมของข้อมูลชุดนี้ทั้งหมด เท่ากับ 100

(20) กำหนดให้ $\sum_{i=1}^{3}(X_i + Y_i) = 9$ และ $\sum_{i=1}^{3}(X_i - Y_i) = 7$ หากต้องการให้ $\sum_{i=1}^{3}(X_i - a)^2$ มีค่าน้อยที่สุดเท่าที่เป็นไปได้ a ต้องมีค่าเท่าใด

(21) กำหนดข้อมูลชุดหนึ่งเป็น $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_N$ และกำหนดเงื่อนไขต่อไปนี้ จงหาค่า $\bar{X}$

(21.1) $\sum_{i=1}^{20}(X_i + 1)^2 = \sum_{i=1}^{20}(X_i - 3)^2$

(21.2) $\sum_{i=1}^{8}(X_i + 1)^2 = -1$ และ $\sum_{i=1}^{8}(X_i + 2)^2 = 9$

(21.3) $\sum_{i=1}^{N}X_i^2 = A$ และ $\sum_{i=1}^{N}(X_i + 2)^2 = B$

(22) จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยม ของข้อมูลตารางแจกแจงความถี่ต่อไปนี้

(22.1)

ข้อมูล	ความถี่
3 – 5	10
6 – 8	12
9 – 11	15
12 – 14	5
15 – 17	3

(22.2)

คะแนน	ความถี่
0 – 19	5
20 – 39	10
40 – 59	15
60 – 79	25
80 – 99	20

(22.3)

อันตรภาคชั้น	ความถี่
10 – 14	10
15 – 19	12
20 – 24	15
25 – 29	9
30 – 34	4

(22.4)

อันตรภาคชั้น	ความถี่
30 – 39	1
40 – 49	2
50 – 59	6
60 – 69	20
70 – 79	21
80 – 89	8
90 – 99	2
รวม	60

(22.5)

อันตรภาคชั้น	ความถี่
0 – 9	5
10 – 19	8
20 – 29	7
30 – 39	12
40 – 49	28
50 – 59	20
60 – 69	10
70 – 79	10
รวม	100

(22.6)

รายได้ (บาท)	จำนวนคน
2,100 – 2,199	1
2,000 – 2,099	2
1,900 – 1,999	6
1,800 – 1,899	10
1,700 – 1,799	12
1,600 – 1,699	7
1,500 – 1,599	2
รวม	40

(22.7)

ราคา (บาท)	90 – 94	95 – 99	100 – 104	105 – 109	110 – 114
จำนวนร้านค้า	5	20	30	35	10

(22.8)

น้ำหนัก (กก.)	60 – 62	63 – 65	66 – 68	69 – 71	72 – 74
ความถี่สัมพัทธ์	0.05	0.18	0.42	0.27	0.08

(23) จากความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลกับร้อยละของความถี่สะสมสัมพัทธ์ จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต

x	-4	-3	1	2	3
y	30	50	60	80	100

(24) จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยมของคะแนนสอบ จากผลสอบดังต่อไปนี้

น้อยกว่า 10 คะแนน	5 คน	น้อยกว่า 50 คะแนน	60 คน
น้อยกว่า 20 คะแนน	13 คน	น้อยกว่า 60 คะแนน	80 คน
น้อยกว่า 30 คะแนน	20 คน	น้อยกว่า 70 คะแนน	90 คน
น้อยกว่า 40 คะแนน	32 คน	น้อยกว่า 80 คะแนน	100 คน

(25) [Ent'มี.ค.42] เมื่อสร้างตารางแจกแจงความถี่ของคะแนนของนักเรียน 36 คน โดยใช้ความกว้างแต่ละอันตรภาคชั้นเป็น 10 แล้ว ปรากฏว่ามัธยฐานของคะแนนทั้งหมดอยู่ในช่วง 50 – 59 ถ้ามีนักเรียนที่สอบได้คะแนนต่ำกว่า 49.5 อยู่ 12 คน และต่ำกว่า 59.5 อยู่ 20 คน แล้ว มัธยฐานของคะแนนสอบมีค่าเท่าใด

(26) [Ent'38] อายุของเด็กกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงดังนี้ ถ้ามัธยฐานเป็น 7 ปีแล้ว a มีค่าเท่าใด

อายุ (ปี)	1 – 3	4 – 6	7 – 9	10 – 12
จำนวนเด็ก	3	a	6	4

(27) ตารางต่อไปนี้แสดงรายจ่ายต่อเดือนของครอบครัวจำนวน 100 ครัวเรือน หากมัธยฐานเป็น 49.5 แล้วค่า f_1, f_2 เป็นเท่าใด

รายจ่าย (ร้อยบาท)	0 – 19	20 – 39	40 – 59	60 – 79	80 – 99
จำนวนครัวเรือน	14	f_1	28	f_2	15

(28) [Ent'35] ในการสอบวิชาภาษาไทยของนักเรียน 25 คน สมัยเป็นนักเรียนคนหนึ่งที่เข้าสอบพบว่าได้ 62 คะแนน เป็นมัธยฐานพอดี และมี 8 คนที่ได้สูงกว่า 69 คะแนน ถ้ามีการจัดกลุ่มคะแนนสอบเป็นช่วงๆ กว้างเท่ากัน และคะแนนของสมัยตกอยู่ในอันตรภาคชั้น 60 – 69 แล้ว จำนวนนักเรียนที่สอบได้ในช่วง 60 – 69 คะแนน เป็นเท่าใด

<u>เฉลย</u> (1) 114.5, 113, 112 ซม. (2) ก. ถูก ข. ผิด (3) เบ้ขวา, 4.5, 4, 3 (4) 40, 70, 70, 120 (5) 70, 73 คะแนน (6) 55.5 (7) 69 คะแนน (8) 14 ปี (9) 18 บาท (10) 47.4 กก. (11) 8 ตัว (12) 9 ตัว (13) 11.5 (14) 50, 100 คน (15) 10 คน (16) 192.3+182.3= 374.6 บาท (17) 83 คะแนน (18) 19 (19) ผิดทั้ง 2 ข้อ (20) 8/3 (21.1) 1 (21.2) -7/8 (21.3) $\frac{B-A}{4N}-1$ (22.1) 8.6, 8.6, 9.2 (22.2) 61.5, 62.5, 66.17 คะแนน (22.3) 20.5, 20.5, 21.17 (22.4) 69.5, 69.98, 70.21 (22.5) 44.50, 45.93, 46.17 (22.6) 1802, 1791.17, 1770.93 บาท (22.7) 103.25, 103.67, 105.33 บาท (22.8) 67.45, 67.43, 67.35 (23) -0.7 (24) 44.5, 45.93, 46.17 (25) 57 คะแนน (26) 5 คน (27) 22, 21 (28) 6 คน

สถิติ (2) (Statistics) ค่าการกระจายของข้อมูล

<u>การวัดตำแหน่งของข้อมูล</u>

• ในบทเรียนสถิติ (1) เราได้ศึกษาการหาค่ากลางของข้อมูล ซึ่งเป็นตัวเลขที่ใช้แทนค่าข้อมูลทั้งหมด ที่นิยมใช้มี 3 ชนิด ได้แก่ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยม โดยที่ *มัธยฐาน* (Median; Med) เป็นค่าข้อมูลในตำแหน่งกึ่งกลางเมื่อถูกเรียงลำดับจากน้อยไปมากแล้ว ค่ามัธยฐานบอกให้ทราบว่า มีข้อมูลที่ค่าสูงกว่าค่านี้ และค่าต่ำกว่าค่านี้ อยู่เป็นปริมาณเท่าๆ กัน

ข้อมูลที่ยังไม่ได้แจกแจงความถี่ (Ungrouped Data)

Med คือข้อมูล *ในตำแหน่งที่* $\frac{1}{2}(N+1)$ (ตำแหน่งกึ่งกลาง)

เมื่อมีข้อมูลทั้งหมด N ตัว และเรียงลำดับแล้ว

ข้อมูลที่แจกแจงความถี่แล้ว (Grouped Data)

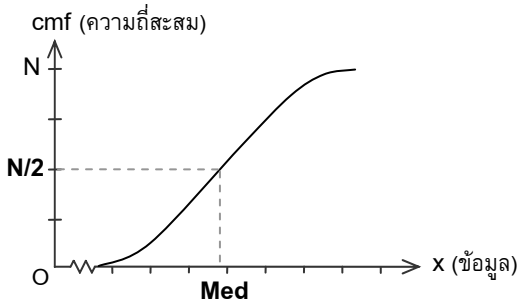
$$\text{Med} = L + I\left(\frac{\frac{N}{2} - \sum f_L}{f_{\text{Med}}}\right)$$

<u>ข้อสังเกต</u> ใช้ $\frac{N}{2}$ โดยไม่ต้องบวกหนึ่ง

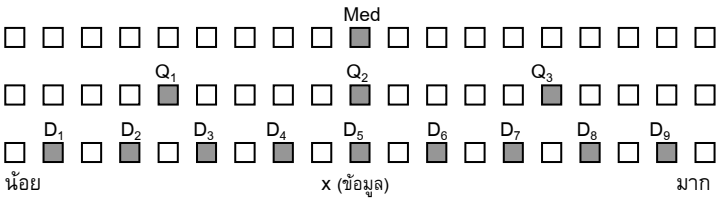
L คือขอบล่างชั้นที่มีมัธยฐานอยู่ (ตัวที่ $N/2$) ซึ่งชั้นนั้นมีความกว้าง I และมีความถี่เป็น f_{Med}

$\sum f_L$ คือความถี่รวมของทุกชั้นที่มีค่าข้อมูลน้อยกว่า (หรือ คือความถี่สะสมของชั้นที่ข้อมูลน้อยกว่า)

และสามารถหาค่ามัธยฐานได้จาก เส้นโค้งของความถี่สะสม ด้วย ดังภาพ



• เมื่อเรียงลำดับข้อมูลจากน้อยไปมากแล้ว นอกเหนือจากการระบุตำแหน่งกึ่งกลางของข้อมูล (คือแบ่งข้อมูลออกเป็นสองส่วนเท่าๆ กัน) เรายังสามารถระบุตำแหน่งใดๆ ของข้อมูลก็ได้ (คือแบ่งข้อมูลออกเป็นกี่ส่วนก็ได้) ถ้าเราแบ่งข้อมูลออกเป็น 4 ส่วนเท่าๆ กัน จุดแบ่งทั้งสามจุดนั้นจะเรียกว่า *ควอร์ไทล์* (Quartile) ที่ 1 หรือ Q_1, ควอร์ไทล์ที่ 2 (Q_2), และควอร์ไทล์ที่ 3 (Q_3) ตามลำดับ ความหมายของควอร์ไทล์ที่ 1 คือมีข้อมูลที่ต่ำกว่าค่านี้อยู่เป็นปริมาณ 1/4 และมากกว่าค่านี้อยู่อีก 3/4 โดยประมาณ



การบอกตำแหน่งข้อมูลที่นิยมใช้กันมีอีก 2 ชื่อ นั่นคือ *เดไซล์* (Decile; D) แทนการแบ่งข้อมูลเป็น 10 ส่วน และ *เปอร์เซ็นไทล์* (Percentile; P) แทนการแบ่งข้อมูลเป็น 100 ส่วน

• การคำนวณหาค่าควอร์ไทล์ เดไซล์ และเปอร์เซ็นไทล์ที่ต้องการ เป็นแบบเดียวกับการคำนวณหามัธยฐาน ดังสรุปได้ดังนี้

ข้อมูลที่ยังไม่ได้แจกแจงความถี่ (Ungrouped Data)

Q_r คือข้อมูล *ในตำแหน่งที่* $\frac{r}{4}(N+1)$ $\quad$ D_r คือข้อมูล *ในตำแหน่งที่* $\frac{r}{10}(N+1)$

P_r คือข้อมูล *ในตำแหน่งที่* $\frac{r}{100}(N+1)$

เมื่อมีข้อมูลทั้งหมด N ตัว และเรียงลำดับแล้ว

ข้อมูลที่แจกแจงความถี่แล้ว (Grouped Data)

$$Q_r = L + I\left(\frac{\frac{r}{4}N - \sum f_L}{f_{Qr}}\right) \qquad D_r = L + I\left(\frac{\frac{r}{10}N - \sum f_L}{f_{Dr}}\right)$$

$$P_r = L + I\left(\frac{\frac{r}{100}N - \sum f_L}{f_{Pr}}\right)$$

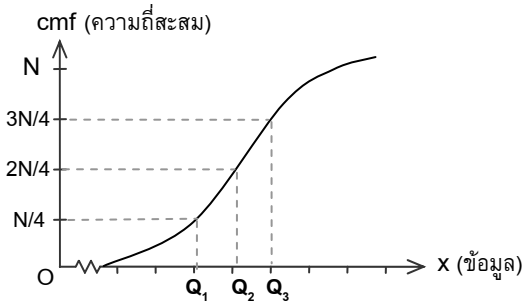
<u>ข้อสังเกต</u> ใช้ $\frac{r}{4}N, \frac{r}{10}N, \frac{r}{100}N$ โดยไม่ต้องบวกหนึ่ง

L คือขอบล่างชั้นที่มีควอร์ไทล์ (หรือเดไซล์หรือเปอร์เซ็นไทล์) ที่ต้องการอยู่

ซึ่งชั้นนั้นมีความกว้าง I และมีความถี่เป็น f_{Qr} (หรือ f_{Dr} หรือ f_{Pr})

$\sum f_L$ คือความถี่รวมของทุกชั้นที่มีค่าข้อมูลน้อยกว่า (หรือ คือความถี่สะสมของชั้นที่ข้อมูลน้อยกว่า)

และสามารถหาค่าได้จากเส้นโค้งของความถี่สะสมด้วยเช่นกัน ภาพด้านขวาเป็นตัวอย่างการหาค่าควอร์ไทล์ที่ 1, 2, และ 3 จากกราฟ



<u>โจทย์</u>

(1) “สมพรสอบได้คะแนนคิดเป็นเปอร์เซ็นไทล์ที่ 80 จากจำนวนผู้สอบ 4,000 คน” ข้อใดถูกต้อง

ก. สมพรสอบได้ที่ 80

ข. สมพรสอบได้ 80% ของคะแนนเต็ม

ค. ผู้ที่ได้คะแนนน้อยกว่าสมพร มีประมาณ 80 คน

ง. ผู้ที่ได้คะแนนมากกว่าสมพร มีประมาณ 800 คน

(2) ผลคะแนนสอบของนักเรียน 15 คนเป็นดังนี้ 16, 19, 32, 30, 4, 9, 4, 12, 20, 26, 12, 31, 20, 17, 24 จงหาคะแนนที่ตรงกับควอร์ไทล์ที่ 3, เดไซล์ที่ 6, และเปอร์เซ็นไทล์ที่ 80

(3) จากข้อมูลชุดหนึ่งได้แก่ 4, 5, 8, 9, 12, 15, 17, 19, 23 จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ P_{10}, D_2, P_{60} และ Q_3

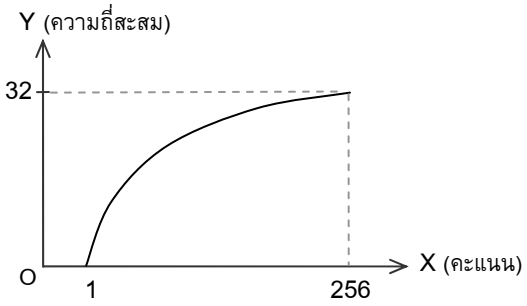
(4) ข้อมูลที่เรียงลำดับแล้วเป็นดังนี้ 5, 7, 8, 10, 12, 14, 15, X, 23, 24, 27, 28, 30 ถ้าทราบว่า $D_6 = 20$ แล้วจงหาค่า X

(5) กำหนดข้อมูลชุดหนึ่งเป็น 28, 15, 19, 11, 29, 12, 27, 24, 30 จงหาว่า

(5.1) 28 คิดเป็นเปอร์เซ็นไทล์ที่เท่าใด

(5.2) 15 คิดเป็นควอร์ไทล์ที่เท่าใด

(6) ผลสอบของนักเรียน 32 คน เขียนเป็นกราฟของความถี่สะสมได้ดังภาพ โดยเส้นโค้งนี้ตรงกับสมการ $Y = 4 \log_2 X$ จงหาว่าควอร์ไทล์ที่ 3 กับเปอร์เซ็นไทล์ที่ 50 มีค่าต่างกันอยู่เท่าใด



น้ำหนัก (กก.)	จำนวน (คน)
31 – 40	3
41 – 50	7
51 – 60	24
61 – 70	10
71 – 80	5
81 – 90	1

(7) จากการสำรวจน้ำหนักของนักเรียนได้ผลดังตาราง จงหาเดไซล์ที่ 6 และเปอร์เซ็นไทล์ที่ 92

คะแนน	จำนวนคน
30 – 39	2
40 – 49	5
50 – 59	6
60 – 69	11
70 – 79	11
80 – 89	4
90 – 99	1

(8) ผลการสอบของนักเรียน 40 คนเป็นดังตาราง หากอาจารย์ต้องการตัดเกรดเพียง 3 เกรดคือ A, B, F โดยต้องการให้เกรด A มีจำนวนนักเรียน 20% เกรด B มีจำนวน 40% และที่เหลือได้เกรด F ถามว่าจะต้องตัดเกรดที่คะแนนเท่าใด และหากได้ 71 คะแนนจะได้เกรดใด

ค่าจ้าง (บาท)	จำนวนคน
81 – 85	1
86 – 90	3
91 – 95	x
96 – 100	5
101 – 105	8
106 – 110	y
111 – 115	10
116 – 120	4

(9) [Ent'37] กำหนดค่าจ้างรายวันของคนงานกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงดังตาราง ถ้าข้อมูลชุดนี้มีค่าเปอร์เซ็นไทล์ที่ 25 เป็น 100.5 บาท และควอร์ไทล์ที่ 3 เป็น 110.5 บาทแล้ว จำนวนคนงานที่ได้ค่าจ้างรายวันต่ำกว่า 105.5 บาท เท่ากับเท่าใด

ค่าการกระจายของข้อมูล

• พิจารณาข้อมูลสองชุดได้แก่ ชุดที่ 1; *8, 10, 12, 20, 5, 1, 7, 7* มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต 7.5 และชุดที่ 2; *8, 7, 7, 8, 7, 8, 8, 7* มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต 7.5 เท่ากัน จะเห็นว่าค่ากลางของข้อมูลนั้นไม่สามารถบอกลักษณะข้อมูลชุดต่างๆ ได้อย่างสมบูรณ์ ควรใช้อีกค่าหนึ่งร่วมกันด้วย นั่นคือค่า *การกระจาย* (Variation) ค่าการกระจายยิ่งมาก แสดงว่าข้อมูลยิ่งแตกต่างกัน ไม่เกาะกลุ่มกัน เช่นในตัวอย่างข้างต้น ข้อมูลชุดที่ 1 จะมีค่าการกระจายมากกว่าชุดที่ 2

• การวัดการกระจายแบ่งเป็น 2 ประเภท คือ การกระจายสัมบูรณ์ (Absolute Variation) ซึ่งใช้สำหรับข้อมูลชุดนั้นเพียงชุดเดียว และการกระจายสัมพัทธ์ (Relative Variation) ซึ่งใช้เปรียบเทียบการกระจายระหว่างข้อมูลสองชุดได้

การกระจายสัมบูรณ์ที่นิยมใช้ มี 4 แบบ

1. *พิสัย* (Range)

เป็นค่าที่วัดได้รวดเร็ว แต่จะมีข้อผิดพลาดมากหากข้อมูลบางจำนวนมีค่าสูงเกินไป หรือต่ำเกินไปแบบผิดปกติ จึงเหมาะกับการวัดโดยคร่าวๆ ที่ไม่ต้องการความแม่นยำมากนัก

ข้อมูลที่ยังไม่ได้แจกแจงความถี่ (Ungrouped Data)

$$\text{Range} = X_{max} - X_{min}$$

X_{max} คือข้อมูลที่มีค่าสูงที่สุด, X_{min} คือข้อมูลที่มีค่าต่ำที่สุด

ข้อมูลที่แจกแจงความถี่แล้ว (Grouped Data)

$$\text{Range} = U_{max} - L_{min}$$

U_{max} คือขอบบนของชั้นที่ค่าข้อมูลสูงที่สุด, L_{min} คือขอบล่างของชั้นที่ค่าข้อมูลต่ำที่สุด

2. *ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์* (Quartile Deviation; QD)

บางครั้งเรียกว่า *กึ่งช่วงควอร์ไทล์* (Semi-interquartile Range)

ถึงแม้ว่าการวัดที่ได้จะไม่ละเอียดนัก เพราะใช้เพียงข้อมูลที่ใกล้เคียงกับควอร์ไทล์ที่ 1 และ 3 เท่านั้น แต่ก็มีส่วนดีเนื่องจากใช้ได้กับการแจกแจงความถี่ที่มีอันตรภาคชั้นเปิด และใช้ได้กับข้อมูลชุดที่มีบางจำนวนค่าสูงหรือต่ำเกินไปแบบผิดปกติ

ข้อมูลที่ยังไม่ได้แจกแจงความถี่ หรือข้อมูลที่แจกแจงความถี่แล้ว

$$QD = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

Q_3 คือข้อมูลในตำแหน่งควอร์ไทล์ที่ 3, Q_1 คือข้อมูลในตำแหน่งควอร์ไทล์ที่ 1

3. *ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย* (Mean Deviation; MD หรือ Average Deviation)

เป็นค่าที่วัดได้ละเอียดกว่าสองแบบแรกเพราะคำนวณจากข้อมูลทุกตัว แต่มีข้อเสียที่การคำนวณยุ่งยากกว่า

ข้อมูลที่ยังไม่ได้แจกแจงความถี่ (Ungrouped Data)

$$MD = \frac{\left|X_1 - \bar{X}\right| + \left|X_2 - \bar{X}\right| + \ldots + \left|X_N - \bar{X}\right|}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left|X_i - \bar{X}\right|}{N}$$

X_i คือข้อมูลตัวที่ i จากทั้งหมด N ตัว, $\bar{X}$ คือค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูล

ข้อมูลที่แจกแจงความถี่แล้ว (Grouped Data)

$$MD = \frac{f_1\left|X_1 - \bar{X}\right| + f_2\left|X_2 - \bar{X}\right| + \ldots + f_k\left|X_k - \bar{X}\right|}{f_1 + f_2 + \ldots + f_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i\left|X_i - \bar{X}\right|}{N}$$

X_i กึ่งกลางชั้นที่ i จาก k ชั้น ซึ่งมีความถี่ f_i, และมีข้อมูลทั้งหมด N ตัว, $\bar{X}$ คือค่าเฉลี่ยเลขคณิต

4. *<u>ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน</u>* (Standard Deviation; SD หรือ s)

เป็นค่าที่นิยมใช้มากที่สุด เนื่องจากมีความละเอียด เชื่อถือได้ สามารถคำนวณได้ง่ายกว่าส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย (โดยใช้สูตรที่จัดรูปแล้ว) และนำไปใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลขั้นสูงได้

ข้อมูลที่ยังไม่ได้แจกแจงความถี่ (Ungrouped Data)

$$s = \sqrt{\frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \ldots + (X_N - \bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})^2}{N}}$$

หรือจัดรูปได้ว่า $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} X_i^2}{N} - \bar{X}^2}$

X_i คือข้อมูลตัวที่ i จากทั้งหมด N ตัว, $\bar{X}$ คือค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูล

ข้อมูลที่แจกแจงความถี่แล้ว (Grouped Data)

$$s = \sqrt{\frac{f_1(X_1 - \bar{X})^2 + f_2(X_2 - \bar{X})^2 + \ldots + f_k(X_k - \bar{X})^2}{f_1 + f_2 + \ldots + f_k}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i(X_i - \bar{X})^2}{N}}$$

หรือจัดรูปได้ว่า $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} f_i X_i^2}{N} - \bar{X}^2} = I \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} f_i D_i^2}{N} - \bar{D}^2}$ เมื่อ $\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i D_i}{N}$

X_i กึ่งกลางชั้นที่ i จาก k ชั้น ซึ่งมีความถี่ f_i, และมีข้อมูลทั้งหมด N ตัว, $\bar{X}$ คือค่าเฉลี่ยเลขคณิต

D_i เป็นจำนวนเต็ม โดยให้ชั้นที่มีค่า a นั้นเป็น $D = 0$ และชั้นที่มีข้อมูลน้อยลง

$D = -1, -2, \ldots$ ไปเรื่อยๆ ส่วนชั้นที่ข้อมูลสูงขึ้น $D = 1, 2, \ldots$ ไปเรื่อยๆ

- <u>สมบัติของค่าการกระจายสัมบูรณ์</u>

(1) ค่าการกระจายเป็นบวกหรือศูนย์เสมอ โดยเป็นศูนย์ก็เมื่อข้อมูลทุกค่าเหมือนกันหมด

(2) ถ้าข้อมูลชุด Y ทุกๆ ตัว สัมพันธ์กับข้อมูลชุด X แต่ละตัว ตามสมการ $Y_i = mX_i + c$ จะได้ว่าค่าการกระจายของข้อมูลชุด Y เป็น $|m|$ เท่าของชุด X

<u>ข้อสังเกต</u> *ค่ากลาง* ถูกกระทบทั้งการบวกและคูณ แต่ *ค่าการกระจาย* ถูกกระทบเฉพาะการคูณ

- <u>สมบัติของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน</u>

(1) จากสมบัติของค่าเฉลี่ยเลขคณิต ที่ว่า $\sum_{i=1}^{N}(X_i - K)^2$ จะน้อยที่สุด ก็เมื่อ $K = \bar{X}$

ทำให้เราทราบว่า ค่า $M = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{N}(X_i - K)^2\right) \div N}$ จะน้อยที่สุดก็เมื่อ $M = SD$ $(K = \bar{X})$

(2) ค่า s^2 เรียกว่า *ความแปรปรวน* (Variance; Var)

ความแปรปรวนรวม (Combined Variance หรือ Pooled Variance) ของข้อมูลหลายชุด คำนวณจาก

$$s_p^2 + \bar{X}_c^2 = \frac{N_1(s_1^2 + \bar{X}_1^2) + N_2(s_2^2 + \bar{X}_2^2) + \ldots + N_k(s_k^2 + \bar{X}_k^2)}{N_1 + N_2 + \ldots + N_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i(s_i^2 + \bar{X}_i^2)}{\sum_{i=1}^{k} N_i}$$

$\bar{X}_i$ คือค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดที่ i, s_i^2 คือความแปรปรวนของข้อมูลชุดที่ i
N_i คือจำนวนของข้อมูลชุดที่ i จากทั้งหมด k ชุด

ส่วนการกระจายสัมพัทธ์ มี 4 แบบ คำนวณได้จากการกระจายสัมบูรณ์ โดยใช้คำว่า สัมประสิทธิ์ของ... (Coefficient of…) นำหน้า ได้แก่

สัมประสิทธิ์ของพิสัย $= \dfrac{X_{max} - X_{min}}{X_{max} + X_{min}}$

สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ $= \dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย $= \dfrac{MD}{\bar{X}}$

สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $= \dfrac{s}{\bar{X}}$

<u>หมายเหตุ</u> สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน เรียกสั้นๆ ว่า *สัมประสิทธิ์การแปรผัน* (Coefficient of Variation) เป็นค่าการกระจายสัมพัทธ์ที่นิยมใช้มากที่สุด

<u>ข้อสังเกต</u> *ค่ากลาง* และ *ค่าการกระจายสัมบูรณ์* มีหน่วยอย่างเดียวกับข้อมูล, *ความแปรปรวน* มีหน่วยเหมือนข้อมูลยกกำลังสอง, แต่ *ค่าการกระจายสัมพัทธ์* ไม่มีหน่วย

<u>โจทย์</u>

(10) ข้อมูลชุดหนึ่งมีค่า 12, 14, 14, 17, 18, 21 จงหาค่าการกระจายสัมบูรณ์ทั้งสี่แบบ

(11) โค้งความถี่สะสมของคะแนนนักเรียนจำนวน 400 คน เป็นไปตามสมการ $F = 100 \log_4 X$ จงหาค่าส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์

(12) ข้อมูลชุดหนึ่งมีส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์เป็น 2 และสัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์เป็น 2/3 จงหาค่าเปอร์เซ็นไทล์ที่ 75

(13) [Ent'38] ข้อมูล 4 จำนวนมีค่าดังนี้ 5, a, b, 1 โดยที่ $1 < a < b$ ถ้าข้อมูลชุดนี้มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 4 และความแปรปรวนเท่ากับ 5 แล้ว จงหาค่าของ $b - a$

(14) [Ent'37] ข้อมูล 7 จำนวนมีค่าต่างกันดังนี้ 9, 6, 15, a, 2, 4, 12 โดยที่ $2 < a < 12$ ถ้าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลเป็น 2 เท่าของส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ ค่า a จะเป็นเท่าใด

(15) ในการวัดความสูงของนักเรียน คำนวณค่า s ได้ 10 ซม. แต่พบว่าสเกลของไม้เมตรผิดพลาดขาดไป 10% ของส่วนสูงจริง ดังนั้นค่า s ที่ถูกต้องคือเท่าใด

(16) นักเรียนคนหนึ่งคิดว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น 42 จึงหาส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานได้ 6 แต่มาพบว่าที่จริงค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น 40 ดังนั้นส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานที่แท้จริงเป็นเท่าใด

(17) จงหาค่าความแปรปรวนของข้อมูลแต่ละชุด และความแปรปรวนรวมของทั้งสองชุด
ชุดที่ 1; 3, 6, 9, 12, 15 ชุดที่ 2; 3, 9, 15

(18) ข้อมูลสองชุดมีจำนวนเท่ากัน ชุดแรกมีค่าเฉลี่ยเลขคณิต 5 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 0 และชุดที่สองมีค่าเฉลี่ยเลขคณิต 3 ถ้าพบว่าข้อมูลรวมมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 3 จงหาส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลชุดที่ 2

(19) นักเรียนชาย m คน ทุกคนอายุ x ปี และนักเรียนหญิง n คน ทุกคนอายุ y ปี จงหาความแปรปรวนรวมของอายุนักเรียนทั้งหมด

(20) [Ent'36] ในการสอบของนักเรียนห้องหนึ่งซึ่งมี 60 คน ได้คะแนนรวม 1,320 คะแนน โดยมีความแปรปรวนเป็น 100 คะแนน^2 ถ้ามีนักเรียนได้ 32 คะแนนอยู่ 10 คน จงหาความแปรปรวนของคะแนนของนักเรียน 50 คนที่เหลือ

(21) [Ent'36] ถ้านักเรียน 20 คนมีส่วนสูงเฉลี่ย 150 ซม. และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 3 ซม. นักเรียนชายซึ่งมี 12 คนมีส่วนสูงเฉลี่ย 150 ซม. และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 2 ซม. ถามว่าส่วนสูงของนักเรียนหญิงหรือชายมีการกระจายมากกว่ากัน และมากกว่ากันกี่เท่า

(22) จงหาความแปรปรวนของข้อมูลชุดหนึ่ง ซึ่งมี $\sum_{i=1}^{10} X_i = 60$ และ $\sum_{i=1}^{10} (X_i - 5)^2 = 370$

(23) จากการสำรวจอายุการใช้งานแบตเตอรี่ 2 ยี่ห้อ ได้ผลดังนี้

ยี่ห้อ A; 30, 26, 32, 46, 21 เดือน ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น 31

ยี่ห้อ B; 28, 53, 40, 18, 34, 31 เดือน ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น 34

อยากทราบว่ายี่ห้อใดมีคุณภาพดีกว่ากัน

[Hint: คุณภาพดี หมายถึง ผลิตออกมาใช้งานได้ใกล้เคียงกันทุกชิ้น]

(24) กำหนดตารางแจกแจงความถี่ของคะแนนสอบนักเรียน 100 คน จงหาค่าการกระจายสัมบูรณ์ทั้งสี่แบบ

คะแนน	ความถี่
50 – 59	15
60 – 69	20
70 – 79	40
80 – 89	15
90 – 99	10

ค่ามาตรฐาน

- สมมตินาย ก สอบวิชาภาษาไทยได้ 80% และสอบวิชาภาษาอังกฤษได้ 87% ยังสรุปไม่ได้ทันทีว่าเขาสอบวิชาใดได้ดีกว่ากัน เพราะต้องคำนึงถึงค่าเฉลี่ย และค่าการกระจายของคะแนนแต่ละวิชาประกอบกันด้วย
- *ค่ามาตรฐาน* (Standard Score; z) เป็นค่าที่ใช้เทียบข้อมูลที่ดึงมาจากต่างชุดกันได้ เพราะเป็นการปรับค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานให้เท่ากัน

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s} \qquad \text{(ไม่มีหน่วย)}$$

ข้อสังเกต ค่า z ของข้อมูลที่ค่ามากกว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิต จะเครื่องหมายบวก, น้อยกว่าค่าเฉลี่ยจะเป็นลบ, ตรงกับค่าเฉลี่ยพอดี จะเป็น 0, และโดยทั่วไปค่า z จะไม่เกินช่วง ± 3

- สมบัติของค่ามาตรฐาน

(1) $\sum_{i=1}^{N} z_i = 0$ (ผลรวมของข้อมูลชุด z ใดๆ เป็น 0 เสมอ)

(2) $\bar{z} = 0$ เสมอ (ผลจากข้อ 1) และ $s_z = 1$ เสมอ

โจทย์

(25) นาย ก สอบวิชาภาษาไทยได้ 48 คะแนน และภาษาอังกฤษได้ 35 คะแนน โดยค่าเฉลี่ยของคะแนนสอบวิชาภาษาไทยและภาษาอังกฤษเป็น 45 กับ 32 คะแนนตามลำดับ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 12 กับ 10 คะแนนตามลำดับ ถามว่าเขาสอบวิชาใดได้ดีกว่ากัน

(26) นักเรียน 40 คนมีอายุรวมกัน 640 ปี และมีค่าความแปรปรวนของอายุเป็น 4 ปี^{2} ถ้า ก และ ข อยู่ในกลุ่มนี้โดยที่ ก อายุ 18 ปี และค่ามาตรฐานของอายุ ก น้อยกว่า ข อยู่ 0.5 แล้ว จงหาอายุของ ข

(27) คนงาน 100 คน มีอายุเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของอายุเป็น 25 และ 13 ปี ตามลำดับ ถ้าผลรวมของค่ามาตรฐานของอายุคนงาน 99 คน เป็น -0.25 แล้ว อายุของคนงานอีกคนที่เหลือเป็นเท่าใด

(28) ค่ามาตรฐานคะแนนสอบของ ก ข และ ค เป็น -1.6, 1.28, 2.4 ตามลำดับ ถ้า ก ได้คะแนนน้อยกว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตอยู่ 5 คะแนน และ ข ได้ 60 คะแนน ถามว่าคะแนนของ ค เป็นเท่าใด

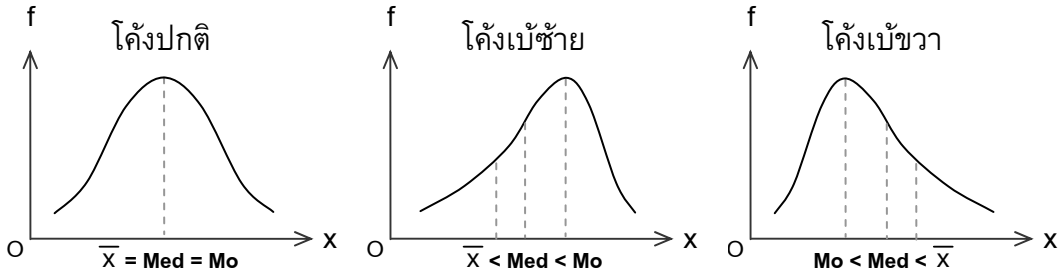
(29) [Ent'38] จากข้อมูลการสอบของนักเรียน 6 คนดังตาราง จงหาสัมประสิทธิ์ของการแปรผัน

คะแนน	30	40	45	60	85	100
ค่ามาตรฐาน	-1.2	-0.8	-0.6	0	1.0	1.6

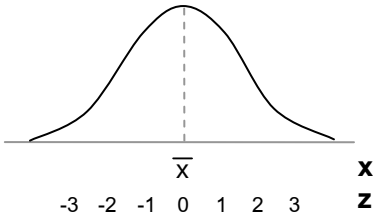
(30) [Ent'35] ในการสอบ นักเรียนที่ได้ 70 คะแนนคิดเป็นค่ามาตรฐาน 1 ถ้าสัมประสิทธิ์การแปรผันคือ 30% แล้ว จงหาคะแนนเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน พร้อมทั้งบอกด้วยว่าคนที่ได้ค่ามาตรฐานเป็น -1 นั้นมีคะแนนสอบเท่าใด

<u>การคำนวณเกี่ยวกับเส้นโค้งของความถี่</u>

• ลักษณะของเส้นโค้งของความถี่มี 3 แบบ (หรือกล่าวว่าลักษณะการแจกแจงมี 3 แบบ) คือ
(1) *โค้งปกติ* (Normal Curve) หรือ *โค้งรูประฆัง* (Belled-Shaped Curve) เป็นโค้งของข้อมูลที่พบบ่อยที่สุดโดยเฉพาะข้อมูลจากธรรมชาติ เช่น ส่วนสูง น้ำหนัก ปริมาณผลผลิตการเกษตร
(2) *โค้งเบ้ลาดทางซ้าย* (หรือทางลบ) (Negatively Skewed Curve)
(3) *โค้งเบ้ลาดทางขวา* (หรือทางบวก) (Positively Skewed Curve)
ซึ่งโค้งแต่ละแบบ บอกความสัมพันธ์ระหว่างค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยม ดังภาพ



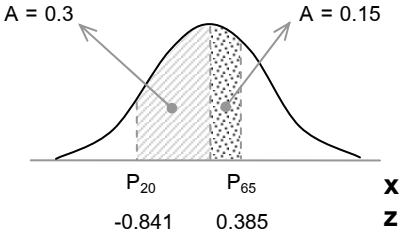
• เนื่องจากพื้นที่ใต้เส้นโค้งจะเท่ากับความถี่รวมพอดี (เป็นสิ่งที่ได้จากการสร้างฮิสโทแกรม) เราจึงสามารถคำนวณเกี่ยวกับการวัดตำแหน่งของข้อมูล (มัธยฐาน, ควอร์ไทล์, เดไซล์, เปอร์เซ็นไทล์) ได้ โดยจะศึกษาเฉพาะโค้งปกติซึ่งใช้ตารางท้ายบทเรียนในการหาค่าพื้นที่ใต้โค้ง



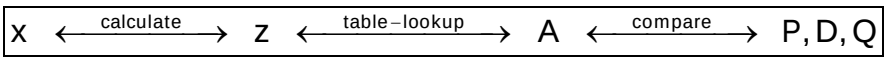
• ในทางปฏิบัตินั้นเป็นไปไม่ได้ที่จะสร้างตารางหลายตารางเพื่อใช้แทนข้อมูลที่มีค่ากลางและค่าการกระจายต่างๆ กัน ดังนั้นจึงต้องใช้วิธีเปลี่ยนค่า x ให้เป็นค่ามาตรฐาน z ก่อน (ค่าเฉลี่ยจะเป็น 0 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 1 ไม่ว่าจะเป็นข้อมูลชุดใด) เรียกโค้งปกติที่ปรับค่าข้อมูลให้เป็นค่ามาตรฐานแล้วนี้ว่า *โค้งปกติมาตรฐาน*

• สิ่งสำคัญคือในตารางนี้ พื้นที่ใต้โค้งรวมกันทั้งหมด (ความถี่รวม) จะถูกปรับให้เป็น 1.00 พอดี เพื่อให้การหาค่าเปอร์เซ็นไทล์ (หรือเดไซล์, ควอร์ไทล์) ต่างๆ จากการนำพื้นที่ที่ต้องการไปเทียบเป็นค่า z เป็นไปได้ง่ายขึ้น

• ค่าที่ระบุในตาราง แสดงพื้นที่ใต้โค้งที่วัดระหว่าง z=0 ไปถึง z ใดๆ โดยมีเพียงค่า z เป็นบวกเท่านั้น (ซีกขวาของโค้ง) เราสามารถหาพื้นที่ซีกซ้ายได้โดยอาศัยความสมมาตรของรูปกราฟ



• ตัวอย่างเช่น เราสามารถหาว่าเปอร์เซ็นไทล์ที่ 65 มีค่าเท่าใด จากการเปิดตารางที่พื้นที่ 0.15 ซึ่งในตารางระบุว่า z=0.385 (จากนั้นนำไปคำนวณกลับเป็นค่าข้อมูล x ได้) ในทำนองเดียวกัน เปอร์เซ็นไทล์ที่ 20 หาได้จากการเปิดตารางที่พื้นที่ 0.3 ได้ค่า z=0.841 แต่เนื่องจากเป็นพื้นที่ทางซีกซ้าย ค่า z ที่แท้จริงจึงเป็น -0.841



โจทย์

ตารางต่อไปนี้แสดงค่าพื้นที่ใต้โค้งปกติมาตรฐาน ระหว่าง z = 0 ถึง z = z หากโจทย์ไม่ได้กำหนดเป็นอย่างอื่น ให้ใช้ค่าจากตารางนี้

Z	A	z	A	z	A	z	A
0.00	0.0000	0.72	0.2642	1.20	0.3849	1.96	0.4750
0.44	0.1700	0.84	0.3000	1.25	0.3944	2.00	0.4773
0.50	0.1915	1.00	0.3413	1.29	0.4000	2.03	0.4788
0.67	0.2500	1.12	0.3686	1.50	0.4330	2.50	0.4938
0.71	0.2612	1.19	0.3830	1.56	0.4400	3.00	0.4987

(31) ให้หาพื้นที่ใต้โค้งปกติมาตรฐาน ในช่วงค่า z ที่กำหนด

(31.1) z = 0 ถึง 1.12

(31.2) z = 0 ถึง -2.03

(31.3) z = -1.19 ถึง 2

(31.4) z = 2 ถึง 3

(31.5) z < -1.19

(32) [Ent'40] คะแนนสอบที่มีการแจกแจงปกติชุดหนึ่งมีสัมประสิทธิ์การแปรผัน 24% และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 12 คะแนน ให้หาตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ของนักเรียนที่ได้ 65 คะแนน

(33) ผลการสอบของนักเรียน 300 คน มีการแจกแจงแบบปกติ ค่าเฉลี่ยของคะแนนสอบเป็น 72 คะแนน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 10 คะแนน ผู้ที่สอบได้เปอร์เซ็นไทล์ที่ 10 จะสอบได้กี่คะแนน

(34) [Ent'36] ถ้าคะแนนสอบวิชาภาษาไทยมีการแจกแจงปกติ ค่าเฉลี่ย 80 คะแนน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 15 คะแนน นักเรียนที่ได้คะแนนเป็นเดไซล์ที่ 3.3 จะมีผลสอบกี่คะแนน

(35) [Ent'35] ในการสอบครั้งหนึ่งซึ่งมีการแจกแจงแบบปกติ และมีคะแนนเต็ม 100 คะแนน ถ้าค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 60 และความแปรปรวนเท่ากับ 100 ข้อใดต่อไปนี้มีค่าสูงที่สุด

ก. คะแนน ณ เปอร์เซ็นไทล์ที่ 80

ข. คะแนนมาตรฐาน 1.50

ค. คะแนนดิบ 85

ง. คะแนน ณ เดไซล์ที่ 7

(36) [Ent'38] ข้อมูลที่แจกแจงแบบปกติชุดหนึ่งมีค่าสูงสุดเป็นเปอร์เซ็นไทล์ที่ 97.5, คะแนนต่ำสุดเป็นเปอร์เซ็นไทล์ที่ 33 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 10 ให้หาพิสัยของข้อมูลชุดนี้

(37) จากการสำรวจผู้สอบคณิตศาสตร์กลุ่มหนึ่ง พบว่าผลการสอบมีการแจกแจงแบบปกติ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น 97 คะแนน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 20 คะแนน ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ของคะแนนสอบเป็นเท่าใด [กำหนดพื้นที่ทางขวาของ z=0 เป็น 50%, z=0.25 เป็น 40.13%, z=0.5 เป็น 30.85%, z=0.675 เป็น 25.00%, และ z=0.75 เป็น 22.66%]

(38) การแจกแจงความถี่ของรายได้พนักงานบริษัทแห่งหนึ่งเป็นแบบปกติ ผู้มีรายได้ต่อเดือนต่ำกว่า 3,000 บาทมีอยู่ 33% ผู้มีรายได้ในช่วง 3,000 ถึง 5,000 บาทมี 61% และที่เหลือได้มากกว่า 5,000 บาท จงหาสัมประสิทธิ์การแปรผันของรายได้ทั้งหมดนี้

(39) [Ent'39] คะแนนสอบที่มีการแจกแจงเป็นโค้งรูประฆัง มีจำนวนนักเรียนได้ต่ำกว่า 40 คะแนนอยู่ 15.87% และสูงกว่า 70 คะแนนอยู่ 2.27% จงหาสัมประสิทธิ์การกระจายของคะแนนสอบกลุ่มนี้ และหาว่ามีนักเรียนที่สอบได้มากกว่า 30 คะแนนอยู่ร้อยละเท่าใด

(40) [Ent'40] ผลการสอบของนักเรียนห้องหนึ่งเป็นการแจกแจงปกติที่มีความแปรปรวน 9 ถ้าจำนวนนักเรียนที่ได้น้อยกว่า 60 คะแนนเท่ากับคนที่ได้มากกว่า 72 คะแนน ให้หาว่าจำนวนคนที่ได้น้อยกว่า 60 คะแนนคิดเป็นร้อยละเท่าใด

(41) ผลสอบของ 500 คนเป็นการแจกแจงปกติ มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 20 คะแนน, ก และ ข เป็นนักเรียนในกลุ่มนี้โดย ก สอบได้ 40% ของคะแนนเต็ม และ ข สอบได้ 20% ของคะแนนเต็ม ถ้าการสอบนี้เต็ม 200 คะแนนและมีคนได้คะแนนน้อยกว่า ก อยู่ 450 คน ข้อใดถูกต้อง

ก. คะแนนของ ก ได้เปอร์เซ็นไทล์ที่ 80 ข. คะแนนของ ข ได้เปอร์เซ็นไทล์ที่ 20

ค. มีคนได้คะแนนน้อยกว่า ข 118 คน ง. ไม่สามารถหาค่าเฉลี่ยได้เพราะข้อมูลไม่พอ

(42) คะแนนสอบของนักเรียน 1,000 คนมีการแจกแจงแบบปกติ โดยมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 10 ถ้ามีนักเรียน 900 คนได้ต่ำกว่า 80 คะแนน (กำหนดพื้นที่ใต้โค้งระหว่าง z=0 ถึง 1.3 เป็น 0.4) ข้อใดผิด

ก. คะแนนเฉลี่ยน้อยกว่า 80 ข. คะแนน 54 เป็นค่ามาตรฐาน -1.3

ค. คะแนน 54 เป็นเปอร์เซ็นไทล์ 10 ง. ผู้ได้คะแนน 54 ถึง 80 มีมากกว่า 800 คน

(43) [Ent'39] คะแนนสอบของนักเรียนกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงปกติ โดยมีสัมประสิทธิ์การแปรผัน 1/4 ถ้าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบเท่ากับ 3 แล้ว มัธยฐานเท่ากับเท่าใด

(44) [Ent'39] กำหนดพื้นที่ใต้โค้งปกติมาตรฐานทางขวามือของ z=0.67 เป็น 0.25 ถ้าข้อมูลชุดหนึ่งแจกแจงแบบปกติโดยส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์เป็น 2 และสัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์เป็น 2/3 จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและความแปรปรวน

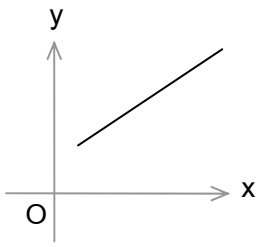
<u>เฉลย</u> (1) ง. (2) 26, 20, 29.2 (3) (4+5+15+18)/4=10.5 (4) 18 (5) 70, 1.2 (6) 64-16=48 คะแนน (7) 58.83, 74.5 กก. (8) 62.23, 76.77 คะแนน, เกรด B (9) 22 คน (10) 9, 2.625, 2.67, 3 (11) (64-4)/2=30 (12) 5 (13) 7-3=4 (14) 8 (15) 11.11 ซม. (16) 14.14 ซม. (17) 18, 24, 20.25 (18) 4 (19) $\frac{mx^2+ny^2}{m+n}-\left(\frac{mx+ny}{m+n}\right)^2$ (20) 96 (21) หญิง, $\sqrt{16.5}/2$ เท่า (22) 36 (23) ยี่ห้อ A (24) 50, 7.5, 8.95, 11.52 (25) อังกฤษ (26) 19 ปี (27) 28.25 ปี (28) 63.5 คะแนน (29) 5/12 (30) 53.85, 16.15, 37.7 คะแนน (31.1) 0.3686 (31.2) 0.4788 (31.3) 0.8603 (31.4) 0.0214 (31.5) 0.1170 (32) 89.44 (33) 59.1 คะแนน (34) 73.4 คะแนน (35) ค. (36) 24 (37) 18.8 คะแนน (38) 0.29 (39) 0.2, 97.73 (40) 2.27 (41) ค. (42) ง. (43) 12 (44) 3, 8.88

สถิติ (3) (ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน; Functional Relation Analysis)

• หากเรามีคู่อันดับ (x, y) จำนวนมากพอ (ควรจะมากกว่า 5 จุด; $N \geq 5$) หลังจากสร้าง *แผนภาพการกระจาย* (Scatter Diagram) เพื่อดูลักษณะกราฟแล้ว เราจะหาความสัมพันธ์ระหว่าง x กับ y ได้เป็นสมการในรูป $y = f(x)$ **เพื่อใช้ทำนายค่า y** ที่ x ที่กำหนด

• รูปแบบความสัมพันธ์ที่พบบ่อย ได้แก่ เส้นตรง พาราโบลา และเอ็กซ์โพเนนเชียล แต่ละรูปสมการจะมีค่าคงที่ที่บ่งบอกลักษณะของกราฟ เรียกว่า *พารามิเตอร์* (Parameter) สมการมาตรฐานที่ใช้หาพารามิเตอร์เหล่านั้น ได้แก่

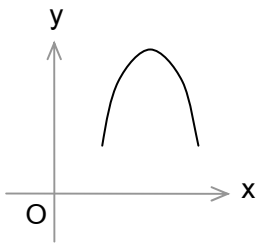
1. <u>ฟังก์ชันเส้นตรง</u> รูปทั่วไป $\boxed{Y = mX + c}$



หาค่าพารามิเตอร์ m กับ c โดยสมการ

$$\Sigma Y = m\Sigma X + cN \quad \text{_____(1)}$$
$$\Sigma XY = m\Sigma X^2 + c\Sigma X \quad \text{_____(2)}$$

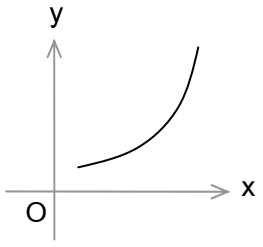
2. <u>ฟังก์ชันพาราโบลา</u> รูปทั่วไป $\boxed{Y = aX^2 + bX + c}$



หาค่า a, b และ c โดยสมการ

$$\Sigma Y = a\Sigma X^2 + b\Sigma X + cN \quad \text{_____(1)}$$
$$\Sigma XY = a\Sigma X^3 + b\Sigma X^2 + c\Sigma X \quad \text{_____(2)}$$
$$\Sigma X^2Y = a\Sigma X^4 + b\Sigma X^3 + c\Sigma X^2 \quad \text{_____(3)}$$

3. <u>ฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียล</u> รูปทั่วไป $Y = ab^X$ หรือ $\boxed{\log Y = \log a + X \log b}$



หาค่า $\log a$ กับ $\log b$ โดยสมการ

$$\Sigma (1 \log Y) = N \log a + \log b \, \Sigma X \quad \text{_____(1)}$$
$$\Sigma (X \log Y) = \log a \, \Sigma X + \log b \, \Sigma X^2 \quad \text{_____(2)}$$

<u>ข้อสังเกต</u> สมการเหล่านี้หาได้จากกระบวนการเดียวกัน นั่นคือ
สมการที่หนึ่ง เติมเครื่องหมาย Σ ทั้งสองข้างของสมการ
สมการที่สอง นำสมการแรกมาเติมตัวแปรต้น คือ X ไว้ภายใน Σ ทุกพจน์
สมการต่อๆไป หากจำนวนสมการยังไม่ครบ ให้เพิ่ม X ไว้ภายใน Σ อีก ทีละตัวๆ

• การหาค่าพารามิเตอร์ด้วยสมการเหล่านี้ เรียกว่า *ระเบียบวิธีกำลังสองน้อยที่สุด* (Method of Least Squares) เป็นวิธีที่ทำให้ค่า y ที่ได้ มี *ความคลาดเคลื่อนกำลังสอง* (Square Error หรือ $\Sigma (Y - \hat{Y})^2$) น้อยที่สุด

หมายเหตุ นิยมใช้ Y แทนค่าจริง และ $\hat{Y}$ แทนค่าที่ได้จากการประมาณด้วยฟังก์ชัน และข้อควรระวังคือ สมการที่หาได้ไม่สามารถทำนายค่า x จาก y ได้ ถ้าต้องการประมาณค่า x ก็ต้องเปลี่ยนฟังก์ชันทั้งหมด ให้เป็น $x = f(y)$ แทน (คือให้ y เป็นตัวแปรต้น)

• ตัวอย่าง จากการสอบถามรายจ่ายของ 8 ครอบครัวในหมู่บ้านหนึ่ง ได้ผลสัมพันธ์กับรายได้ดังตาราง จงหาความสัมพันธ์ที่ใช้ประมาณรายจ่ายจากรายได้ และถามว่าถ้าครอบครัวหนึ่งในหมู่บ้านนี้มีรายได้ $4,500$ บาท จะมีรายจ่ายประมาณเท่าใด

รายได้ (พันบาท)	1	3	4	6	8	9	11	14
รายจ่าย (พันบาท)	1	2	4	4	5	7	8	9

วิธีคิด โจทย์ต้องการทำนายรายจ่าย จากรายได้ แสดงว่าในที่นี้ Y คือรายจ่าย และ X คือรายได้ เมื่อวางคู่อันดับเหล่านี้ลงในแกนพิกัดฉากแล้วพบว่า มีความสัมพันธ์กันแบบเส้นตรง ดังนั้นสมการที่เราจะใช้คือ $Y = mX + c$ และดำเนินการหาค่า m, c โดย..

$$\rightarrow \Sigma Y = m\Sigma X + cN \text{ และ } \Sigma XY = m\Sigma X^2 + c\Sigma X$$

แทนค่า $\Sigma Y = 40$, $\Sigma X = 56$, $N = 8$, $\Sigma XY = 364$ และ $\Sigma X^2 = 524$ จะได้..

$$\rightarrow 40 = 56m + 8c \text{ และ } 364 = 524m + 56c$$

แก้ระบบสมการ ได้คำตอบ $m = 0.636$ และ $c = 0.545$

(1) ความสัมพันธ์ที่ใช้ประมาณรายจ่ายจากรายได้ คือ $Y = 0.636\,X + 0.545$ เมื่อ Y คือรายจ่าย (พันบาท) และ X คือรายได้ (พันบาท) ตอบ

(2) $\hat{Y} = 0.636(4.5) + 0.545 = 2.862$ ดังนั้น ครอบครัวที่มีรายได้ $4,500$ บาท จะมีรายจ่ายประมาณ $2,862$ บาท ตอบ

• ตัวอย่าง จากตัวอย่างที่แล้ว ถามว่าถ้าครอบครัวหนึ่งในหมู่บ้านนี้มีรายจ่าย $3,500$ บาท จะมีรายได้ประมาณเท่าใด

วิธีคิด โจทย์ต้องการทำนายรายได้จากรายจ่าย แสดงว่าหากเราจะใช้ Y เป็นรายจ่าย และ X เป็นรายได้เช่นเดิม จะต้องเปลี่ยนรูปสมการเป็น $X = mY + c$ และหาค่า m, c โดย..

$$\rightarrow \Sigma X = m\Sigma Y + cN \text{ และ } \Sigma XY = m\Sigma Y^2 + c\Sigma Y$$

แทนค่า $\Sigma X = 56$, $\Sigma Y = 40$, $N = 8$, $\Sigma XY = 364$ และ $\Sigma Y^2 = 256$ จะได้..

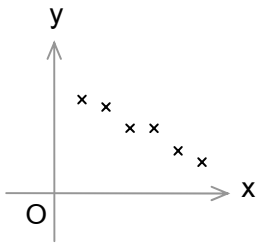
$$56 = 40m + 8c \text{ และ } 364 = 256m + 40c$$

แก้ระบบสมการ ได้คำตอบ $m = 1.5$ และ $c = -0.5$ ดังนั้น ความสัมพันธ์ที่ใช้ประมาณรายได้จากรายจ่าย คือ $X = 1.5Y - 0.5$ เมื่อ Y คือรายจ่าย (พันบาท) และ X คือรายได้ (พันบาท)

จึงได้ว่า ครอบครัวที่มีรายจ่าย $3,500$ บาท จะมีรายได้ประมาณ $4,750$ บาท ตอบ

โจทย์

(1) [Ent'40] พิจารณาแผนภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร x และ y ดังรูป สมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y อยู่ในรูปใดต่อไปนี้



ก. $y = x - 1$ ข. $y = a - bx, \quad a, b > 0$

ค. $y = a - bx^2, \quad a, b > 0$ ง. $y = a + bx, \quad a, b > 0$

(2) [Ent'38] จากการทดลองวัดความสัมพันธ์ระหว่างเวลา t (วินาที) และระยะทาง s (เมตร) ของวัตถุที่เคลื่อนที่ ได้ผลดังนี้

t	1	2	3	4
s	2	8	18	32

ถ้าความสัมพันธ์เป็นแบบเส้นตรงแล้ว เราจะทำนายระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ ในขณะที่ $t = 1.5$ วินาทีได้เท่าใด

(3) [Ent'30] ในการประมาณความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันเส้นตรง ของ x กับ y โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด เมื่อมีข้อมูล (x, y) ดังนี้ $(0,5)$, $(1,2)$, $(2,1)$ จงทำนายค่า y เมื่อ $x = \frac{1}{3}$

(4) [Ent'ต.ค.43] ถ้า $y = mx + c$ เป็นความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันเพื่อการทำนายรายจ่ายหมวดบริการลูกค้า (y) จากจำนวนพนักงานของโรงแรม (x) ในจังหวัดหนึ่ง จำนวนข้อมูลที่นำมาสร้างความสัมพันธ์เท่ากับ 5 และมีสมการดังนี้

$28 = 5c + 10m$ และ $67 = 10c + 30m$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้ ข้อใดถูกหรือผิดบ้าง

ก. ถ้า $x = 5$ ค่าประมาณของ $y = 8.9$ ข. $\bar{x} = 5.6$

(5) [Ent'ต.ค.41] กำหนดให้ความสัมพันธ์ระหว่างรายได้ (x) และรายจ่าย (y) ต่อเดือนของครอบครัวที่อาศัยในอำเภอหนึ่งเป็น $y = 200 + 0.85x$ ถ้าครอบครัว 2 ครอบครัวมีรายได้ต่างกัน $1,000$ บาท จะมีรายจ่ายโดยประมาณ ต่างกันเท่าใด

(6) [Ent'ต.ค.42] พิจารณาข้อมูลของ x และ y ดังนี้

x	-3	-1	0	1	3
y	0	a	a+3	a+4	a+6

เมื่อ a เป็นค่าคงที่ ให้ x และ y มีความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันเป็นกราฟเส้นตรงความชัน 1.55 ถ้า $x = 4$ จะประมาณค่า y ได้เท่าใด

(7) [Ent'มี.ค.43] ถ้าให้สมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่ใช้สำหรับประมาณจำนวนห้องพักที่มีแขกมาพัก (แทนด้วย y) จากจำนวนห้องพักที่มีการขอจองล่วงหน้า (x) คือ $y = a + 0.75x$ โดยที่ $\bar{x} = 40$, $\bar{y} = 60$ ถามว่าถ้า $x = 60$ แล้ว จำนวนห้องพักที่มีแขกมาพักจริงโดยประมาณเท่ากับเท่าใด

[Hint : จากสมการที่ 1 ของสมการเส้นตรง นำ N หารสองข้าง จะได้ $\bar{Y} = m\bar{X} + c$]

(8) [Ent'37] จากการสอบถามครอบครัว n ครอบครัว ที่มีรายได้ต่อเดือน $5,000$ ถึง $20,000$ บาท เกี่ยวกับรายจ่ายต่อเดือน ปรากฏผลดังนี้

รายได้ (พันบาท) : x	x_1 x_2 x_3 ... x_n
รายจ่าย (พันบาท) : y	y_1 y_2 y_3 ... y_n

และมีค่า $\bar{x} = 12$, $\bar{y} = 5$ โดยสมการเส้นตรงที่แทนความสัมพันธ์นี้ตัดแกน y ที่จุด $(0, -3)$ ถ้าครอบครัวมีรายได้ $15,000$ บาท จะมีรายจ่ายโดยประมาณเป็นเท่าใด

(9) [Ent'35] ถ้าค่าของตัวแปร x และ y คือ

x	-1	0	1	2	3
y	1	0	1	3	10

และสมการที่ใช้ประมาณความสัมพันธ์ระหว่างสองตัวแปรนี้คือ $y = kx^2$ จงหาค่า k

(10) [Ent'36] จากการสอบถามถึงรายจ่ายของครอบครัว 8 ครอบครัว ที่มีรายได้ตั้งแต่ 1,000 ถึง 14,000 บาท ได้สมการที่ใช้แสดงความสัมพันธ์ของรายได้ (X) และรายจ่าย (Y) คือ $Y = 0.636\,X + 0.545$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้ ข้อใดถูกหรือผิดบ้าง

ก. เราสามารถใช้สมการข้างต้นประมาณรายได้ เมื่อทราบรายจ่าย

ข. ถ้าเพิ่มข้อมูลอีก 7 ครอบครัว สมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์ยังคงเป็นสมการเดิม

(11) [Ent'33] สมการแสดงความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน ระหว่างต้นทุน (Y : พันบาท) กับจำนวนสินค้าที่ผลิต (X : ร้อยชิ้น) คือ $Y = 2X + 5$ ข้อความต่อไปนี้ข้อใดถูกหรือผิดบ้าง

ก. ถ้าต้นทุนเป็น $7,000$ บาท คาดว่าผลิตได้ 100 ชิ้น

ข. ถ้าผลิตเพิ่ม 200 ชิ้น คาดว่าต้นทุนเพิ่ม $4,000$ บาท

(12) [Ent'23] ตารางที่กำหนดให้นี้เป็นข้อมูลเกี่ยวกับเงินที่ใช้โฆษณาสินค้าต่อเดือน (X : หมื่นบาท) และเงินที่ได้จากการขายต่อเดือน (Y : แสนบาท)

X	5	1	3	4	2
Y	10	3	6	7	4

หาค่าต่างๆ ได้ดังนี้ $\Sigma X = 15$, $\Sigma Y = 30$, $\Sigma X^2 = 55$, $\Sigma Y^2 = 210$, $\Sigma XY = 107$ และกำหนดให้สัมพันธ์กันแบบเส้นตรง หากต้องการขายสินค้าให้ได้เดือนละ $12,000,000$ บาท ควรลงทุนโฆษณาเท่าใด

(13) [Ent'26] จากตารางซึ่งข้อมูลสัมพันธ์กันแบบเส้นตรง พิจารณาว่าข้อความใดถูกหรือผิดบ้าง

X	1	2	3	4
Y	2	5	7	8

ก. ถ้า $y = 10$ ทำนาย x ได้ 4.75 ข. $\hat{Y} = 2X + 0.5$

<u>ข้อมูลในรูปอนุกรมเวลา</u>

• หากข้อมูลที่เราสนใจ (Y) เป็นข้อมูลที่ตัวแปรต้นมีช่วงห่างเท่าๆ กัน เช่น ตัวแปรต้นเป็นปี พ.ศ. ที่ห่างเท่าๆ กันแล้ว เราจะเรียกข้อมูล Y ชุดนั้นว่า *ข้อมูลในรูปอนุกรมเวลา* (Time Series Data) ซึ่งจะสามารถแทนค่าตัวแปรต้น X ด้วยตัวเลขค่าน้อยๆ ได้เพื่อให้สะดวกในการคำนวณ วิธีที่นิยมที่สุดคือ ให้ข้อมูลตรงกลางเป็นเลข 0 แล้วนับขึ้นลงเป็น $\pm 1, \pm 2$ ต่อไปจนครบทุกจุด เพราะวิธีนี้จะทำให้ $\Sigma X = 0$ จึงแก้ระบบสมการหาพารามิเตอร์ได้ง่าย โดยเฉพาะสมการเส้นตรง กับสมการเอ็กซ์โพเนนเชียล

• <u>หมายเหตุ</u> หากจำนวนข้อมูลเป็นจำนวนคู่ ไม่มีจุดตรงกลาง ก็จะให้ปีระหว่างกลางนั้นเป็น ± 1 และคู่ถัดไปเป็น $\pm 3, \pm 5$ ไปเรื่อยๆ (เพื่อรักษาระยะห่างให้เท่าๆ กัน) แบบนี้ก็ยังได้ $\Sigma X = 0$ เช่นกัน

• <u>ตัวอย่าง</u> จงสร้างสมการทำนายประชากรในท้องที่หนึ่ง ถ้ากำหนดข้อมูลที่สำรวจได้ดังตาราง และจากนั้นให้ประมาณจำนวนประชากรในท้องที่นี้ในปี 2547

พ.ศ.	2535	2537	2539	2541	2543
จำนวนประชากร (พันคน)	0.8	0.9	1.1	1.4	2.0

<u>วิธีคิด</u> ให้ Y คือจำนวนประชากร และให้ X เป็น $-2, -1, 0, 1, 2$ แทน พ.ศ. $2535, 2537, \ldots$ ตามลำดับ เมื่อวางคู่อันดับเหล่านี้ลงในแกนพิกัดฉากแล้วพบว่า มีความสัมพันธ์กันแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล ดังนั้นสมการที่เราจะใช้คือ $\log Y = \log a + X \log b$ และจะหาค่า $\log a, \log b$ โดย..

$$\Sigma (\log Y) = N \log a + \log b \, \Sigma X \quad \text{และ} \quad \Sigma (X \log Y) = \log a \, \Sigma X + \log b \, \Sigma X^2$$

แทนค่า $\Sigma (\log Y) = 0.796$, $\Sigma X = 0$, $N = 5$, $\Sigma (X \log Y) = 2.274$ และ $\Sigma X^2 = 10$ จะได้.. $\rightarrow 0.796 = 5 \log a$ และ $2.274 = 10 \log b$

ได้คำตอบ $\log a = 0.159$ และ $\log b = 0.227$

(1) ความสัมพันธ์ที่ใช้ประมาณจำนวนประชากร คือ $\log Y = 0.159 + 0.227X$ เมื่อ Y คือจำนวนประชากร (พันคน) และ X แทนเวลาตามที่ได้กำหนด <u>ตอบ</u>

(2) ปี พ.ศ. 2547 มีค่า $X = 4$ จะได้ $\log \hat{Y} = 0.159 + 0.227(4) = 1.067$ หรือ $\hat{Y} \approx 11.668$ ในปี พ.ศ. 2547 จะมีประชากรประมาณ $11,668$ คน <u>ตอบ</u>

โจทย์

(14) [Ent'34] ข้อมูลอนุกรมเวลา (Y) มีค่าดังนี้

พ.ศ.	2526	2527	2528	2529	2530
Y	20	30	20	40	60

ถ้า Y สัมพันธ์กับเวลาในลักษณะเส้นตรงแล้ว จะสามารถทำนายค่า Y ในปี 2535 ได้เท่าใด

(15) [Ent'31] มูลค่าอุตสาหกรรมสิ่งทอส่งออกระหว่างปี 2520 ถึง 2524 เป็นดังนี้

พ.ศ.	2520	2521	2522	2523	2524
มูลค่า (ล้านบาท)	1	3	4	5	9

ถ้าพยากรณ์โดยใช้ความสัมพันธ์เส้นตรงแบบกำลังสองน้อยที่สุด จงหามูลค่าส่งออกเฉลี่ย 6 เดือนแรก ของปี 2525

วิธีลัดของสมการเส้นตรง

- ในกรณีทั่วๆ ไป ระบบสมการที่ใช้หาพารามิเตอร์นั้นมักจะแก้หาคำตอบได้ยาก (เนื่องจากความแตกต่างของตัวเลขสัมประสิทธิ์) สำหรับรูปแบบเส้นตรงนั้น เราใช้เมตริกซ์แก้ระบบสมการได้ผลเป็นสูตรลัดดังนี้

1. หาค่า m จากสูตร $\boxed{m = \dfrac{N\Sigma(XY) - \Sigma X \Sigma Y}{N\Sigma(X^2) - (\Sigma X)^2}}$

2. ต่อจากนั้นอาจหาค่า c โดยอาศัยสมบัติของค่าเฉลี่ยเลขคณิต คือ ใช้สมการ $\boxed{\bar{Y} = m\bar{X} + c}$ (ข้อสังเกต สมการนี้เป็นสมการที่ได้จากสมการที่ (1) ของรูปแบบเส้นตรงนั่นเอง)

เฉลย

(1) ข. (2) 5 เมตร (3) 4 (4) ก. ถูก และ ข. ผิด (5) 850 บาท (6) 11.2 (7) 75 (8) $7,000$ บาท (9) 1 (10) ก. และ ข. ผิด (11) ก. ผิด และ ข. ถูก (12) $676,000$ บาทต่อเดือน (13) ก. ผิด และ ข. ถูก (14) 97 (15) 4.9 ล้านบาท

เลขดัชนี (Index Number)

• *เลขดัชนี* (Index Number; I) คือค่าที่แสดงอัตราส่วน (การเปลี่ยนแปลง) ของสิ่งที่เราสนใจเปรียบเทียบระหว่างเวลาสองจุดใดๆ หรือเทียบกับจุดอ้างอิงที่เรียกว่า *เวลาฐาน* (Base Time) ก็ได้ เช่น เงินเดือนปีนี้เดือนละ 12,000 บาท เงินเดือนปีที่แล้วเดือนละ 10,000 บาท อาจกล่าวว่าดัชนีเงินเดือนของปีนี้เทียบกับปีที่แล้ว เป็น 1.2 (หรือ 120%) แต่หากต้องการใช้ช่วงเวลาสองปีที่แล้วซึ่งได้เงินเดือน 7,500 บาท เป็นเวลาฐาน ก็จะกล่าวได้ว่า ปีนี้มีดัชนี 1.6 (หรือ 160%) และปีที่แล้วมีดัชนี 1.33 (หรือ 133%) ข้อสังเกต เลขดัชนีไม่มีหน่วย และมักคิดเป็นร้อยละ

• เลขดัชนีสามารถแบ่งประเภทตามสิ่งที่เราสนใจได้หลายแบบ เช่น ดัชนีราคา (Price Index) ดัชนีปริมาณ (Quantity Index) ดัชนีมูลค่า (Value Index) ซึ่งจะสังเกตได้ว่าเลขดัชนีที่พบบ่อยในชีวิตประจำวันล้วนเป็นดัชนีราคา เช่น ดัชนีราคาสินค้า ดัชนีค่าครองชีพ และดัชนีราคาหุ้น

ดัชนีราคา (Price Index)

สัญลักษณ์ที่จะใช้ต่อไปนี้ได้แก่ P:Price (ราคา), Q:Quantity (ปริมาณ), n:new (ปีที่ต้องการ), o:old (ปีฐาน), และ Σ หมายถึง $\sum_{i=1}^{m}$ เมื่อ m เป็นจำนวนชนิดของสินค้า

1. *ดัชนีราคาแบบไม่ถ่วงน้ำหนัก หรือ ดัชนีราคาอย่างง่าย* (Simple Price Index)

1.1 *ดัชนีราคาอย่างง่ายแบบใช้ราคารวม* (I_{SA} ; Simple Aggregative)

$$I_{SA} = \frac{\Sigma P_n}{\Sigma P_o} \times 100$$

1.2 *ดัชนีราคาอย่างง่ายแบบค่าเฉลี่ยราคาสัมพัทธ์* (I_{SR} ; Simple average of Relative)

$$I_{SR} = \frac{1}{m}\sum \frac{P_n}{P_o} \times 100$$

2. *ดัชนีราคาแบบถ่วงน้ำหนัก* (Weighted Price Index) จะใช้ปริมาณเป็นตัวถ่วงน้ำหนัก

2.1 *ดัชนีราคาถ่วงน้ำหนักแบบใช้ราคารวม* (I_{WA} ; Weighted Aggregative)

- วิธีของลาสไพเยอเรส (Laspayres) $I_L = \frac{\Sigma P_n Q_o}{\Sigma P_o Q_o} \times 100$ ใช้ปริมาณของปีฐาน

- วิธีของพาเช่อ (Paasche) $I_P = \frac{\Sigma P_n Q_n}{\Sigma P_o Q_n} \times 100$ ใช้ปริมาณของปีที่ต้องการหา

- วิธีถ่วงด้วยปริมาณเฉลี่ยของปีฐานและปีที่ต้องการ $I_A = \frac{\Sigma P_n (Q_o+Q_n)/2}{\Sigma P_o (Q_o+Q_n)/2} \times 100$

- วิธีถ่วงด้วยปริมาณในช่วงเวลาใดๆ ที่กำหนดให้ $I_G = \frac{\Sigma P_n Q_g}{\Sigma P_o Q_g} \times 100$

2.2 *ดัชนีราคาถ่วงน้ำหนักแบบค่าเฉลี่ยราคาสัมพัทธ์* (I_{WR}) วิธีนี้ไม่นิยมใช้

โจทย์

(1) [Ent'มี.ค.44] ถ้าราคาเฉลี่ยของเมล็ดถั่วเหลืองในแต่ละเดือนของปี 2542 เป็นดังนี้ มกราคม 13 บาท/ก.ก. กุมภาพันธ์ 11 บาท/ก.ก. มีนาคม 12 บาท/ก.ก. ข้อความใดถูกหรือผิดบ้าง

ก. ดัชนีราคาเมล็ดถั่วเหลืองของเดือนกุมภาพันธ์เทียบกับมกราคม เท่ากับ 84.62%

ข. ดัชนีราคาเมล็ดถั่วเหลืองของเดือนมีนาคมเทียบกับกุมภาพันธ์ เพิ่มขึ้น 10.09%

(2) ถ้าราคาหม้อหุงข้าวยี่ห้อหนึ่ง 3 ขนาด ที่ร้านค้าได้จำหน่ายไปในเวลา 3 ปี เป็นดังตาราง หากใช้ปี 2534 เป็นปีฐาน ให้หาดัชนีราคาอย่างง่ายแบบใช้ราคารวม ของปี 2535

ขนาด	ราคา (ร้อยบาท)		
	2534	2535	2536
เล็ก	5.5	5.0	4.0
กลาง	7.0	6.5	6.0
ใหญ่	11.5	11.0	10.0

(3) ถ้าราคาและปริมาณสินค้าสี่ชนิดที่บริษัทแห่งหนึ่งขายได้ใน 3 ปี เป็นดังนี้ จงหาดัชนีราคา

รายการสินค้า	ปริมาณ			ราคาต่อหน่วย		
	2533	2534	2535	2533	2534	2535
ตู้เย็น	124	145	180	8,000	8,200	8,500
เตาแก๊ส	47	82	104	7,500	7,500	7,800
พัดลม	325	420	280	750	750	800
เครื่องซักผ้า	38	42	64	7,800	8,200	8,500

(3.1) I_{SA} ของปี 2534 โดยใช้ 2533 เป็นปีฐาน

(3.2) I_{SR} ของปี 2534 และ 2535 โดยใช้ 2533 เป็นปีฐาน

(3.3) I_{L} ของปี 2534 โดยใช้ 2533 เป็นปีฐาน

(3.4) I_{P} ของปี 2535 โดยใช้ 2533 เป็นปีฐาน

(3.5) I_{A} ของปี 2535 โดยใช้ 2534 เป็นปีฐาน

(4) จากตารางต่อไปนี้ ให้หาดัชนีราคา I_{SA}, I_{SR}, I_{L}, I_{P} และ I_{A} (ถ้าสามารถหาค่าได้) ของปี 2539 โดยใช้ปี 2537 เป็นปีฐาน

(4.1)

สินค้า	ราคา (ร้อยบาท)		
	2537	2538	2539
ก	12	15	16
ข	20	22	25
ค	18	20	20

(4.2)

สินค้า	ราคา (พันบาท)		ปริมาณ
	2537	2539	ปี 2539
ก	8	15	10
ข	10	20	12
ค	12	18	15

(5) ร้านขายขนมแห่งหนึ่งรวบรวมข้อมูลการขายได้ดังตาราง หากยึด 2537 เป็นปีฐาน ให้หาดัชนีราคาแบบลาสไพเยอเรส, แบบพาเช่อ, แบบถ่วงน้ำหนักโดยใช้ปริมาณเฉลี่ย, และดัชนีราคาอย่างง่ายแบบใช้ราคารวม ในปี 2539

รายการขนม	ปริมาณ (พัน)			ราคา (บาท)		
	2537	2538	2539	2537	2538	2539
A	2	3	4	3	3.5	4
B	2	2	4	3	3.5	4
C	2	3.5	4	2	2.5	3
D	2	1.5	4	2	3	4

(6) [Ent'38] ตารางต่อไปนี้แสดงราคาสินค้าของร้านอาทิตย์ ในการคิดดัชนีราคาแบบใช้ราคารวมของปี 2536 เมื่อปี 2530 เป็นปีฐาน จะได้ 109.97% ถ้าเปลี่ยนหน่วยสบู่จากก้อนเป็นโหล โดยราคาต่อก้อนเท่าเดิม ดัชนีราคาแบบใช้ราคารวมจะเป็นเท่าใด

รายการสินค้า	ราคาต่อหน่วย	
	2530	2536
สบู่ (ก้อน)	11	13
ยาย้อมผม	190	210
แชมพู	75	80
ยาสีฟัน	45	50

(7) จากตาราง ให้หาดัชนีราคารวมอย่างง่ายของปี 2539 และดัชนีราคาอย่างง่ายแบบค่าเฉลี่ยราคาสัมพัทธ์ของปี 2538 โดยใช้ปี 2529 เป็นปีฐาน

สินค้า	ราคา (ร้อยบาท)		I_{SA} ปี 2538 เทียบกับ 2529
	2538	2539	
A	10	13	125
B	13	15	130
C	15	17	125
D	18	18	150

(8) [Ent'ต.ค.43] ราคาและปริมาณสินค้า 3 ชนิด ที่ร้านค้าแห่งหนึ่งจำหน่ายในปี 2541 และ 2542 เป็นดังตาราง ถ้าดัชนีราคาถ่วงน้ำหนักแบบใช้ราคารวมโดยวิธีของพาเช่อในปี 2542 เมื่อใช้ปี 2541 เป็นปีฐานเท่ากับ 126 แล้ว ราคาของพัดลมในปี 2542 เป็นเท่าใด

ชนิด	ปริมาณ (หน่วย)		ราคาต่อหน่วย	
	2541	2542	2541	2542
หม้อหุงข้าว	15	20	500	500
กระติกน้ำร้อน	10	8	300	450
พัดลม	80	100	400	x

(9) [Ent'40] ตารางต่อไปนี้แสดงปริมาณและราคาสินค้าของร้านไฟฟ้า ถ้าดัชนีราคาในปี 2536 โดยใช้ปี 2532 เป็นปีฐาน แบบใช้ราคารวมโดยถ่วงน้ำหนักด้วยปริมาณในปีฐาน (ลาสไพเยอเรส) มีค่า 170 จงหาค่า a

รายการ	ราคา (พันบาท)		ปริมาณ	
	2532	2536	2532	2536
โทรทัศน์	5	8	100	105
วิทยุ	3	6	a	a

(10) [Ent'41] ตารางแสดงราคาสินค้า 3 ชนิดเป็นดังนี้ ถ้าราคาเฉลี่ยในปี 2535 และ 2536 เมื่อคิดโดยใช้ดัชนีราคาอย่างง่ายแบบค่าเฉลี่ยราคาสัมพัทธ์ เพิ่มจากปี 2534 ร้อยละ 3.33 และ 1.67 ตามลำดับ จงหาค่า x, y

สินค้า	ราคา (บาท)		
	2534	2535	2536
เข็มขัด	800	800	600
กระเป๋า	x	y	1,200
รองเท้า	1,000	1,000	1,100

(11) [Ent'มี.ค.42] ตัวแทนจำหน่ายหม้อหุงข้าวไฟฟ้ายี่ห้อหนึ่ง ขายหม้อหุงข้าวด้วยราคาและปริมาณดังต่อไปนี้ ถ้าดัชนีราคาอย่างง่ายแบบใช้ราคารวมของปี 2541 เทียบกับ 2540 เท่ากับ 96.00 แล้ว ดัชนีราคาแบบใช้ราคารวมโดยถ่วงน้ำหนักด้วยปริมาณในปีฐาน (ลาสไพเยอเรส) ของปี 2541 เมื่อใช้ 2540 เป็นปีฐาน มีค่าเท่าใด

ขนาด	ปริมาณ		ราคา	
	2540	2541	2540	2541
1 ลิตร	300	250	400	400
2 ลิตร	220	230	500	450
3 ลิตร	200	200	600	a
4 ลิตร	150	130	1000	950

ดัชนีราคาผู้บริโภค (Consumer Price Index)

เรียกอีกอย่างว่า ดัชนีค่าครองชีพ (Cost of Living) จะวัดจากรายจ่ายค่าอุปโภคบริโภคประจำของครอบครัวที่สุ่มสำรวจได้ โดยในประเทศไทยคิดแบบลาสไพเยอเรส ใช้ปี 2529 เป็นปีฐาน (ดังนั้น ดัชนีราคาผู้บริโภคของไทยในปี 2529 คือ 100)

ดัชนีราคาผู้บริโภคนำมาใช้ประโยชน์ในชีวิตประจำวันได้หลายอย่าง เช่น

- *หาอัตราเงินเฟ้อ เงินฝืด* $\boxed{\frac{I_{\text{this year}} - I_{\text{last year}}}{I_{\text{last year}}} \times 100}$ จะคิดปีต่อปีเท่านั้น

ค่าที่คำนวณได้ ค่าบวกหมายถึงเงินเฟ้อ และค่าลบหมายถึงเงินฝืด ซึ่งความรุนแรงจะแบ่งระดับเป็น อย่างอ่อน, ปานกลาง, และรุนแรง โดยแบ่งที่ค่า 10% และ 17% ตามลำดับ

- *หาค่าของเงินเปรียบเทียบกับปีอื่นๆ* $\boxed{P_{\text{desire year}} = \frac{P_{\text{this year}}}{I_{\text{this year}}} \times I_{\text{desire year}}}$

คำนวณได้โดยใช้ดัชนีราคาผู้บริโภคเป็นตัวเทียบบัญญัติไตรยางศ์

โจทย์

(12) กำหนดดัชนีราคาผู้บริโภคของประเทศไทย ดังตาราง

พ.ศ.	2519	2529	2530	2531	2532	2533	2535
ดัชนีราคาผู้บริโภค	50.6	100	102.5	106.4	108.4	115.0	130

ให้ตอบคำถามต่อไปนี้

(12.1) อัตราเงินเฟ้อของปี 2530 และ 2531 เป็นร้อยละเท่าใด

(12.2) นายสง่าได้เงินเดือนในปี 2519, 2529, 2530, 2531 เป็น 5000, 6000, 6100, และ 6200 บาท ตามลำดับ ให้หาเงินเดือนที่แท้จริงของเขาทั้งสี่ปี

(12.3) ในปี 2532 บริษัทแห่งหนึ่งให้ค่าจ้างขั้นต่ำแก่ลูกจ้าง วันละ 120 บาท เมื่อถึงปี 2533 บริษัทนี้ควรปรับค่าจ้างขั้นต่ำเป็นวันละเท่าใด

(12.4) สินค้าจำนวนหนึ่งขายในปี 2531 ได้มูลค่า 425 ล้านบาท หากนำสินค้าเหล่านี้ขายในปี 2530 ควรจะได้มูลค่าเท่าใด

(12.5) ปี 2529 ชายคนหนึ่งมีรายได้ 4,000 บาทต่อเดือน และภรรยามีรายได้ 3,500 บาทต่อเดือน ต่อมาปี 2535 เขามีรายได้ต่อเดือน 5,050 บาท ภรรยา 4,550 บาท และลูก 2,400 บาท ถามว่ารายได้ที่แท้จริงต่อเดือนของครอบครัวนี้ในปี 2535 เป็นเท่าใด

(13) [Ent'40] ในปี 2536 สุเมธมีรายได้ 10,000 บาทต่อเดือน ปี 2537 เขามีรายได้เพิ่มขึ้น 15% จากปี 2536 ถ้าดัชนีราคาผู้บริโภคของปี 2537 เมื่อใช้ 2536 เป็นปีฐานเท่ากับ 200 แล้ว ให้หารายได้ที่แท้จริงของเขาในปี 2537 เทียบกับ 2536

(14) [Ent'มี.ค.43] กำหนดดัชนีราคาผู้บริโภคของปีต่างๆ โดยมีปี 2535 เป็นปีฐาน ดังนี้

ปี	2535	2536	2537
ดัชนี	100	90	108

ถ้ารายได้ที่เป็นตัวเงินของชายผู้หนึ่งในปี 2536 เท่ากับ 900 บาท และรายได้ที่แท้จริงของเขาในปี 2537 เท่ากับรายได้ที่แท้จริงในปี 2536 เมื่อเทียบกับ 2535 แล้ว รายได้ที่เป็นตัวเงินที่เขาควรจะได้รับในปี 2537 เท่ากับเท่าใด

(15) ข้อความต่อไปนี้ ข้อใดถูกหรือผิดบ้าง

ปี	2533	2535	2537
ดัชนี	100	108.9	114.8
เงินเดือน	1,950	2,100	2,350

ก. เงิน 114.8 บาทในปี 2537 มีค่าเท่ากับเงิน 100 บาทในปี 2533

ข. เงินเดือนที่แท้จริงในปี 2537 มีค่า $\frac{2,350}{114.8}$ บาท เมื่อใช้ปี 2533 เป็นปีฐาน

(16) [Ent'ต.ค.41] ถ้าในปี 2538 นายเสริมได้รับเงินเดือน เดือนละ 16,000 บาท และในปี 2541 นายเสริมได้รับเงินเดือนใหม่เป็น 24,000 บาท โดยที่ดัชนีราคาผู้บริโภคของปี 2541 เทียบกับปี 2538 มีค่าเท่ากับ 125 พิจารณาข้อความต่อไปนี้ ข้อใดถูกหรือผิดบ้าง

ก. นายเสริมควรได้รับเงินเดือนใหม่เป็น 25,000 บาท

ข. รายได้ที่แท้จริงของนายเสริมในปี 2541 เป็น 19,200 บาท เทียบกับปี 2538

(17) จากตาราง ข้อใดถูกต้องเกี่ยวกับค่าจ้างเฉลี่ยที่แท้จริง

ปี	2530	2531	2532	2533
ค่าจ้างเฉลี่ย (บาท/ช.ม.)	1.20	1.30	1.40	1.50
ดัชนีราคาผู้บริโภค	100	113	114	116

ก. เพิ่มขึ้นปีละ 0.10 บาท/ช.ม. ข. เพิ่มขึ้นปีละ 0.15 บาท/ช.ม.

ค. เพิ่มขึ้นปีละ 0.20 บาท/ช.ม. ง. เพิ่มขึ้นปีละไม่เท่ากัน

(18) [Ent'41] ดัชนีราคาผู้บริโภคของคนกรุงเทพฯ ใน พ.ศ. 2537 – 2540 เป็นดังนี้

พ.ศ.	2537	2538	2539	2540
ดัชนีราคาผู้บริโภค	100	107	116	138

พิจารณาข้อความ ข้อใดถูกหรือผิดบ้าง

ก. ค่าครองชีพของปี 2540 สูงกว่า 2539 อยู่ร้อยละ 19

ข. ค่าครองชีพของปี 2540 สูงกว่า 2538 อยู่ร้อยละ 31

(19) [Ent'ต.ค.42] ในปี พ.ศ. 2540 สุเมธมีรายได้เดือนละ 15,000 บาท โดยที่รายได้ต่อเดือนที่แท้จริงของเขาเป็น 12,500 บาท เทียบกับปี 2538 ถ้าดัชนีราคาผู้บริโภคในปี 2541 สูงกว่า 2540 อยู่ 5% แล้ว ค่าครองชีพในปี 2541 สูงกว่าปี 2538 อยู่ร้อยละเท่าใด

ดัชนีราคาหุ้น (Stock Price Index)

เป็นค่าที่บ่งบอกอัตราส่วนของมูลค่าตลาดหุ้นในวันนั้นเทียบกับวันแรกสุดที่เปิดดำเนินการ (เช่น สำหรับตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย คือวันที่ 30 เมษายน 2518) นิยมเรียกหน่วยเป็น "จุด" เช่น ดัชนีราคาหุ้นตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย (SET; the Stock Exchange of Thailand) รวมทุกหมวดอุตสาหกรรม ในวันที่ 26 พฤศจิกายน 2546 ปิดที่ 630.83 จุด (เปลี่ยนแปลงเพิ่มขึ้นจากวันก่อน 25.79 จุด หรือ 4.26%) แปลว่า มูลค่าตลาดหุ้นรวมของวันนั้นเมื่อปิดทำการ (เวลา 18:00 น.) มีค่าเป็น 6.3083 เท่า ของมูลค่าในวันที่ 30 เมษายน 2518

หมายเหตุ ในเดือนพฤศจิกายน 2546 ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทยแบ่งหลักทรัพย์ออกเป็นหมวดอุตสาหกรรมย่อย 30 หมวด (เช่น ธุรกิจการเกษตร, อาหารและเครื่องดื่ม, ของใช้ในครัวเรือน, อัญมณีและเครื่องประดับ, เวชภัณฑ์และเครื่องสำอาง, สิ่งทอ เครื่องนุ่งห่ม, ธนาคาร, เงินทุนและหลักทรัพย์, ประกันภัยและประกันชีวิต, ฯลฯ) และมีจำนวนหลักทรัพย์รวมทุกหมวดทั้งสิ้น 389 หลักทรัพย์

เฉลย

(1) ก. ถูก และ ข. ผิด (2) 0.9375 (3.1) 1.025 (3.2) 1.019 และ 1.065 (3.3) 1.4315 (3.4) 1.0615 (3.5) 1.040 (4.1) 1.22, 1.231, – , – , – (4.2) 1.767, 1.792, – , 1.737, – (5) 1.5 (6) 112.22% (7) 1.5, 1.325 (8) 524.24 บาท (9) 56 (10) 1,000 และ 1,099 (11) a=600, ดัชนี=96.30 (12.1) 2.5% และ 3.8% (12.2) 9,881.42 บาท, 6,000 บาท, 5,951.22 บาท, 5,827.07 บาท (12.3) 127.31 บาท (12.4) 409.42 ล้านบาท (12.5) 9,230.77 บาท (13) 5,750 บาท (14) 1,080 บาท (15) ก. ถูก และ ข. ผิด (16) ก. ผิด และ ข. ถูก (17) ง. (18) ก. ถูก และ ข. ผิด (19) 26

โจทย์เอ็นทรานซ์ : ตุลาคม 2541

<u>ตอนที่ 1</u> ข้อ 1 – 6 เป็นข้อสอบแบบอัตนัย ข้อละ 2 คะแนน

1. ถ้า $A = \{\varnothing, 0, 1, \{0\}, \{0,1\}\}$ และ $P(A)$ เป็นเพาเวอร์เซตของ A แล้ว เซต $P(A) - A$ มีสมาชิกกี่ตัว

2. ถ้า L_1 เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-2, 0)$ และ $(-1, 2)$ และ L_2 เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิดและตั้งฉากกับ L_1 แล้ว พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่ล้อมรอบด้วยแกน x เส้นตรง L_1 และเส้นตรง L_2 เท่ากับกี่ตารางหน่วย

3. $\sec(2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}})$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

4. ให้ $\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j}$ โดย $a > 0$ ถ้า $\bar{u}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $-\bar{i} + 2\bar{j}$ แล้ว มุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{u}$ กับเวกเตอร์ $3\bar{i} - \bar{j}$ (มุมแหลม) มีขนาดกี่องศา

5. กำหนดให้ ความสัมพันธ์ระหว่างรายได้ (x) และรายจ่าย (y) ต่อเดือนของครอบครัวที่อาศัยในอำเภอหนึ่งมีสมการเป็น $y = 200 + 0.85x$ ครอบครัวสองครอบครัวในอำเภอนี้ซึ่งมีรายได้ต่างกัน 1,000 บาท จะมีรายจ่ายโดยประมาณต่างกันเท่าใด

6. ชาย 3 คน และหญิง 3 คน เข้าคิวในแถวเดียวกันเพื่อซื้อตั๋วภาพยนตร์ ความน่าจะเป็นที่หญิงทั้ง 3 คน จะยืนเรียงติดกันทั้งหมดในแถวมีค่าเท่ากับเท่าใด

<u>ตอนที่ 2</u> ข้อ 1 – 24 เป็นข้อสอบแบบปรนัย ข้อละ 3 คะแนน

1. จำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่หาร 210 ลงตัว มีจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 14 2. 15 3. 16 4. 17

2. กำหนดให้ A และ B เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\frac{3-x^2}{x+2} \geq 0$ และ $\left|2-x^2\right| \leq 2$ ตามลำดับ เซตในข้อใดเป็นสับเซตของ $B-A$

1. $\{-1.6, 1.6\}$ 2. $\{-1.7, 1.7\}$
3. $\{-1.8, 1.8\}$ 4. $\{-1.8, 1.7\}$

3. ประพจน์ $\sim p \rightarrow (q \rightarrow (r \vee p))$ สมมูลกับประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $(\sim p) \vee q \vee r$ 2. $p \vee (\sim q) \vee r$
3. $p \vee q \vee (\sim r)$ 4. $p \vee (\sim q) \vee (\sim r)$

4. พิจารณาการอ้างเหตุผลต่อไปนี้ เมื่อ p, q และ r เป็นประพจน์

ก. *เหตุ*	1) $p \vee (p \wedge \sim q)$	ข. *เหตุ*	1) $\sim p \rightarrow r$
	2) $p \rightarrow q$		2) $\sim r \vee s$
ผล	q		3) $\sim s$
		ผล	p

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก สมเหตุสมผล ข สมเหตุสมผล 2. ก สมเหตุสมผล ข ไม่สมเหตุสมผล
3. ก ไม่สมเหตุสมผล ข สมเหตุสมผล 4. ก ไม่สมเหตุสมผล ข ไม่สมเหตุสมผล

5. กำหนดให้ $S = \{ x \mid x$ เป็นจำนวนเต็ม และ $\left|x\right| \leq 5 \}$

และ $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4x + a^2}{x^4 + bx + 4}$ โดยที่ $a \in S, b \in S$

จำนวนคู่ลำดับ $(a, b) \in S \times S$ ทั้งหมดที่ทำให้ $f(1) = 0$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 15 2. 18 3. 20 4. 22

6. กำหนดให้ $f = \{ (x, y) \mid y = \log(x+1) + \log(x+2) - \log(4-x^2) \}$

และ $g = \{ (x, y) \mid y = 2^{x-1}$ และ $x \geq 0 \}$

ถ้า D_f = โดเมนของ f และ R_g = เรนจ์ของ g

แล้ว $D_f \cap R_g$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $[0, 1.5)$ 2. $[0.5, 2.5)$ 3. $[1, 3)$ 4. $[1.5, 4)$

7. สมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดเป็น $(0, -1)$ และผ่านโฟกัสทั้งสองของวงรี $3x^2 + 4y^2 - 16y + 4 = 0$ ผ่านจุดในข้อใดต่อไปนี้

1. $(\sqrt{\frac{2}{3}}, 1)$ 2. $(\sqrt{\frac{3}{2}}, 1)$ 3. $(\frac{1}{2}, 1)$ 4. $(\frac{1}{3}, 1)$

8. เซตคำตอบของสมการ $\log_2 (x^2-x-4)^2 = \log_{0.1}(0.01)$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $R-[-2,2]$ 2. $R-[-1,3]$ 3. $[-4,2]$ 4. $[-3,3]$

9. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $(1+i)(\overline{z+1}) = -1$ แล้ว ส่วนจริงของจำนวนเชิงซ้อน $z\,(z-\bar{z})^{15}$ เท่ากับข้อใด

1. $-\frac{3}{2}$ 2. $\frac{3}{2}$ 3. $-\frac{1}{2}$ 4. $\frac{1}{2}$

10. กำหนด $p(x) = x^6+ax^3-x+b$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริง ถ้า $x-1$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ -1 และ $x+1$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ 1 แล้ว x หาร $p(x)$ จะเหลือเศษเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1 2. 0 3. 1 4. 2

11. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ถ้า B เป็นเมตริกซ์ที่ $B = 2A^{-1}$ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นค่าของ $\det(3\,\text{adj}\,B)$

1. 6 2. 9 3. 12 4. 18

12. ในการสร้างเมตริกซ์ในรูปแบบ $\begin{bmatrix} x^2-1 & y \\ 0 & 2+x \end{bmatrix}$ แบบสุ่ม โดย x และ y เป็นสมาชิกของเซต $\{-2,-1,0,1,2\}$ ความน่าจะเป็นที่จะได้เมตริกซ์เอกฐาน มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2}{25}$ 2. $\frac{3}{25}$ 3. $\frac{2}{5}$ 4. $\frac{3}{5}$

13. บริษัทผลิตโทรศัพท์แห่งหนึ่ง ได้ผลิตโทรศัพท์รุ่นใหม่ออกมา 2 รุ่น คือรุ่น P_1 และ P_2 โดยที่รุ่น P_1 จะขายได้กำไรเครื่องละ 1,000 บาท และรุ่น P_2 จะขายได้กำไรเครื่องละ 500 บาท ในแต่ละวันบริษัทตั้งใจจะผลิตโทรศัพท์รุ่น P_1 ไม่น้อยกว่า 80 เครื่อง และรุ่น P_2 ระหว่าง 50 ถึง 100 เครื่อง ถ้าบริษัทมีความสามารถในการผลิตโทรศัพท์ทั้ง 2 รุ่นรวมกันในแต่ละวันไม่เกิน 150 เครื่อง แล้วบริษัทจะได้กำไรสูงสุดจากการผลิตโทรศัพท์ทั้ง 2 รุ่น เป็นจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 105,000 บาท 2. 115,000 บาท 3. 125,000 บาท 4. 130,000 บาท

14. จำนวนสมาชิกในเซต $\{100, 101, 102, \ldots, 600\}$ ซึ่งหารด้วย 8 หรือ 12 ลงตัว เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 84 2. 92 3. 100 4. 125

15. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3x+1}, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ \frac{2-\sqrt{5-x}}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$ ข. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

16. กำหนด f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ และ $F(x) = \sqrt{(f(x))^3 + 15}$ ถ้า $F(1) = f'(1) = 4$ แล้ว $F'(1)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{2}$
2. $\frac{3}{2}$
3. 8
4. 24

17. พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 - 3x + 2$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 2$ เฉพาะส่วนที่อยู่เหนือแกน x เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{2}$ ตารางหน่วย
2. $\frac{1}{6}$ ตารางหน่วย
3. $\frac{2}{3}$ ตารางหน่วย
4. $\frac{5}{6}$ ตารางหน่วย

18. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f(2) = -1$, $f'(1) = -3$, และ $f''(x) = 3$ ทุกค่า x แล้ว $f(0)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 5
2. 6
3. 12
4. 15

19. ถ้าจัดนักเรียน 6 คน ซึ่งมีเมตตาและปรานีรวมอยู่ด้วยให้เรียงแถวเป็น 2 แบบ แบบที่หนึ่งนักเรียนทั้งหมดยืนเป็นแถวตรงโดยที่เมตตาและปรานียืนติดกัน และแบบที่สองนักเรียนทั้งหมดยืนเป็นวงกลมโดยที่เมตตาและปรานียืนตรงกันข้าม แล้วจำนวนวิธีของการจัดแต่ละแบบแตกต่างกันเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 96
2. 120
3. 196
4. 216

20. ให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{a, b, c, d\}$ แล้ว

จำนวนสมาชิกของเซต $\{ f : A \to B \mid f$ ไม่เป็นฟังก์ชัน 1–1 $\}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 40
2. 34
3. 30
4. 24

21. จากการสำรวจแม่บ้านที่ดูละครโทรทัศน์จำนวน 200 คน ปรากฏว่ามี

65 คน ดูละครเรื่องที่ 1 90 คน ดูละครเรื่องที่ 2

45 คน ดูละครเรื่องที่ 2 เรื่องเดียว 35 คน ดูละครเรื่องที่ 3 เรื่องเดียว

15 คน ดูละครเรื่องที่ 1 และเรื่องที่ 3 35 คน ดูละครเรื่องที่ 2 และเรื่องที่ 3

และมี 30 คน ที่ไม่ได้ดูละครทั้ง 3 เรื่องนี้

ถ้าสุ่มเลือกแม่บ้านจากกลุ่มนี้มา 1 คน แล้วข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. ความน่าจะเป็นที่จะได้ผู้ที่ดูละครทั้ง 3 เรื่องนี้ เท่ากับ 0.05
2. ความน่าจะเป็นที่จะได้ผู้ที่ดูละครอย่างน้อยหนึ่งเรื่อง เท่ากับ 0.85
3. ความน่าจะเป็นที่จะได้ผู้ที่ดูละครเรื่องที่ 1 เรื่องเดียว เท่ากับ 0.2
4. ความน่าจะเป็นที่จะได้ผู้ที่ดูละครเรื่องที่ 3 เท่ากับ 0.45

22. ถ้าในปี 2538 นายเสริมได้รับเงินเดือน เดือนละ 16,000 บาท และในปี 2541 นายเสริมได้รับเงินเดือนใหม่เป็น 24,000 บาท โดยที่ดัชนีราคาผู้บริโภคของปี 2541 เทียบกับปี 2538 มีค่าเท่ากับ 125 พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้านายเสริมได้รับการปรับเงินเดือนขึ้นตามดัชนีราคาผู้บริโภค แล้วนายเสริมควรได้รับเงินเดือนใหม่เท่ากับ 25,000 บาท

ข. รายได้ที่แท้จริงของนายเสริมในปี 2541 เมื่อเทียบกับปี 2538 เท่ากับ 19,200 บาท

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. ถูก และ ข. ถูก 2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก 4. ก. ผิด และ ข. ผิด

23. ข้อมูลชุดหนึ่งเรียงลำดับจากน้อยไปมากได้เป็น 10, 20, 30, 30, a, b, 60, 60, 90, 120 ถ้าฐานนิยมและมัธยฐานของคะแนนชุดนี้เป็น 30 และ 40 ตามลำดับ

แล้วข้อมูลชุดต่อไปนี้คือ 11, 22, 33, 34, a+5, b+6, 67, 68, 99, 130 มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 50 2. 55.5 3. 60 4. 60.5

24. ถ้าน้ำหนักแรกเกิดของเด็กไทยมีการแจกแจงปกติ โดยในปี 2533 มีน้ำหนักเฉลี่ย 2,500 กรัม และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 250 กรัม และในปี 2540 มีน้ำหนักเฉลี่ย 3,240 กรัม และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 200 กรัม น้ำหนักแรกเกิดของเด็กไทยที่อยู่ในตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ที่ 97.73 ในปี 2533 จะอยู่ในตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ตามข้อใดต่อไปนี้ในปี 2540

กำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้โค้งปกติดังนี้

z	1.0	1.2	2.0	2.2
A	0.3413	0.3849	0.4773	0.4861

1. 11.51 2. 38.49 3. 48.61 4. 61.51

<u>ตอนที่ 3</u> ข้อ 25 – 28 เป็นข้อสอบแบบปรนัย ข้อละ 4 คะแนน

25. ถ้า $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ และ $B = \{1,2,3\}$ แล้ว
จำนวนฟังก์ชัน $f : A \to B$ ทั้งหมดซึ่ง $f(1) \neq 1$ หรือ $f(2) \neq 2$ หรือ $f(3) \neq 3$
เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 530 2. 612 3. 702 4. 814

26. ให้ I เป็นเซตของจำนวนเต็ม ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งกำหนดโดย $f(x) = 2x$ และ $g(x) = x-1$ ทุก $x \in I$ แล้ว เรนจ์ของ $(fog) + f$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\{ x \in I \mid \frac{x}{2}$ เป็นจำนวนเต็มคี่ $\}$ 2. $\{ x \in I \mid \frac{x}{2}$ เป็นจำนวนเต็มคู่ $\}$
3. เซตของจำนวนเต็มคี่ทั้งหมด 4. เซตของจำนวนเต็มคู่ทั้งหมด

27. ให้ $S = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ และ $F(x) = \sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \ldots$ โดย $x \in S$
ถ้า a เป็นสมาชิกของเซต S ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $F(a) \leq 1$ แล้ว $F(a)$ มีค่าเท่ากับข้อใด
ต่อไปนี้

1. 0 2. $\frac{1}{4}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4. 1

28. ให้ $f(x) = x^8 - x^6$ และ f' คืออนุพันธ์ของ f
ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งมี $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} (fof')(a_n)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 68 2. 92 3. 150 4. 192

<u>เฉลย</u>

ตอนที่ 1 (1) 29 (2) 0.8 (3) 3 (4) 45 (5) 850 (6) 0.2

ตอนที่ 2 (1) 3 (2) 3 (3) 2 (4) 1 (5) 3 (6) 2 (7) 1 (8) 4 (9) 4 (10) 1 (11) 3 (12) 4 (13) 3 (14) 1 (15) 2 (16) 2 (17) 4 (18) 1 (19) 4 (20) 1 (21) 4 (22) 3 (23) 2 (24) 1

ตอนที่ 3 (25) 3 (26) 1 (27) 4 (28) 4

โจทย์เอ็นทรานซ์ : มีนาคม 2542

ตอนที่ 1 ข้อ 1 – 6 เป็นข้อสอบแบบอัตนัย ข้อละ 2 คะแนน

1. ถ้า $A = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
และ $B = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, 6, 7, 8, \dots\}$
แล้ว $(A - B) \cup (B - A)$ มีสมาชิกกี่ตัว

2. ถ้า $A = \{p \mid p$ เป็นจำนวนเฉพาะบวก และ $p \mid (980 - p)^3\}$
แล้วผลบวกของสมาชิกทั้งหมดใน A มีค่าเท่าใด

3. $\log_{10}\sqrt{28} - \log_{\frac{1}{10}}\sqrt{325} + \log_{\frac{1}{100}} 91$ มีค่าเท่าใด

4. ถ้า $A = [a_{ij}]_{3\times 3} = \begin{bmatrix} x & y & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -x & 1 \end{bmatrix}$, $\det A = 1$ และโคแฟกเตอร์ของ $a_{21} = 3$
แล้ว $\det (A + I)$ เท่ากับเท่าใด
(เมื่อ I เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 3×3)

5. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $\left|(7 - 24i)(3 + 4i)z^6\right| = 1$ แล้ว $z\bar{z}$ มีค่าเท่าใด

6. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และ $f(3) = -2$, $f'(3) = 5$
ถ้า $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2 + 1}$ แล้ว $g'(3)$ มีค่าเท่าใด

<u>ตอนที่ 2</u> ข้อ 1 – 24 เป็นข้อสอบแบบปรนัย ข้อละ 3 คะแนน

1. ให้ S เป็นเซตของจำนวนจริง m ทั้งหมด
ที่ทำให้เส้นตรง $y = mx$ ตัดกับวงกลม $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$
ขอบเขตบนค่าน้อยที่สุดของ S คือจำนวนในข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{2}$ 2. $\frac{2}{3}$ 3. $\frac{3}{4}$ 4. $\frac{4}{5}$

2. กำหนดให้ p, q และ r เป็นประพจน์
ประพจน์ $\sim[(p \wedge q) \rightarrow (\sim q \vee r)]$ สมมูลกับประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $p \wedge \sim(q \rightarrow r)$
2. $\sim q \vee (\sim p \wedge r)$
3. $\sim(p \wedge q) \wedge (q \wedge r)$
4. $\sim(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge \sim r)$

3. พิจารณาการให้เหตุผลต่อไปนี้

ก. *เหตุ* 1) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
2) p
3) $\sim r \rightarrow q$
ผล $r \rightarrow t$

ข. *เหตุ* 1) $p \rightarrow (q \rightarrow \sim s)$
2) $p \wedge s$
ผล q

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก และ ข สมเหตุสมผล
2. ก สมเหตุสมผล แต่ ข ไม่สมเหตุสมผล
3. ก ไม่สมเหตุสมผล แต่ ข สมเหตุสมผล
4. ก และ ข ไม่สมเหตุสมผล

4. กำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์ในเซตของจำนวนจริง
โดยที่ $r = \{(x, y) \mid y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $D_r = [-1, 1]$, $D_{r^{-1}} = [-1, 1]$
2. $D_r = [-1, 1]$, $D_{r^{-1}} = [0, 1]$
3. $D_r = [0, 1]$, $D_{r^{-1}} = [-1, 1]$
4. $D_r = [0, 1]$, $D_{r^{-1}} = [0, 1]$

5. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x}$ และ $A = \{ x \in R \mid f^{-1}(x) + [f(x)]^2 = 2 \}$
พิจารณาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

ก. $\exists x \in A [x^2 - x - 6 = 0]$
ข. $\forall x \in A [x^2 + 2x - 3 = 0]$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. จริง ข. จริง
2. ก. จริง ข. เท็จ
3. ก. เท็จ ข. จริง
4. ก. เท็จ ข. เท็จ

6. ถ้า $1 + \cos^2\theta + \cos^4\theta + \ldots = a$ โดยที่ a เป็นจำนวนจริง
แล้ว $\cos(\pi - 2\theta)\sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\left(\frac{a-2}{a}\right)^2$ 2. $\left(\frac{a-2}{a}\right)^2$ 3. $-\left(\frac{a}{a+2}\right)^2$ 4. $\left(\frac{a}{a+2}\right)^2$

7. ให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $\cos(2\arcsin x)+2 = 4\sin^2(\arccos x)$
ข้อใดต่อไปนี้คือผลคูณของสมาชิกในเซต A

1. $-\frac{1}{4}$ 2. $-\frac{1}{2}$ 3. $\frac{1}{4}$ 4. $\frac{1}{2}$

8. ถ้าไฮเพอร์โบลา H มีสมการเป็น $16x^2-64x-9y^2-80=0$ แล้ววงรีที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดโฟกัสทั้งสองของ H และมีแกนโทคือแกนสังยุคของ H มีสมการเป็นข้อใดต่อไปนี้

1. $16x^2-64x+25y^2-464=0$ 2. $16x^2-64x+25y^2-336=0$
3. $25x^2-100x+16y^2-464=0$ 4. $25x^2-100x+16y^2-336=0$

9. วงรีวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ $(3,1)$ จุดโฟกัสจุดหนึ่งที่ $(5,1)$ และสัมผัสแกน y ที่จุด $(0,1)$ สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(-2,1)$ และมีรัศมีเท่ากับความยาวแกนโทของวงรี คือข้อใดต่อไปนี้

1. $x^2+y^2+4x-2y=0$ 2. $x^2+y^2+4x-2y-1=0$
3. $x^2+y^2+4x-2y-4=0$ 4. $x^2+y^2+4x-2y-15=0$

10. ถ้า x, y สอดคล้องกับระบบสมการ

$$9^{\log_3 x}+4^{\log_2 y}=16$$
$$\log_3 x-\log_{\frac{1}{3}} y=2-\log_3 2$$

แล้ว $\left|x^2-y^2\right|$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $5+\sqrt{7}$ 2. $5-\sqrt{7}$ 3. $5\sqrt{7}$ 4. $10\sqrt{7}$

11. ถ้า x_1 สอดคล้องระบบสมการ

$$x_1+2x_2+x_3=0$$
$$3x_1+x_2-2x_3=5$$
$$2x_1-3x_2-3x_3=9$$

และ $A=\begin{bmatrix} x_1+y & 2x_1 \\ 3 & y \end{bmatrix}$
แล้วผลบวกของ y ทั้งหมดที่ทำให้ A เป็นเมตริกซ์เอกฐาน เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. -1 3. -2 4. -3

12. กำหนดสมการจุดประสงค์ $P=7x+5y$ และอสมการข้อจำกัดคือ
$2x+y\geq 40,\ 2x+3y\leq 60,\ 0\leq x\leq 24,\ y\geq 0$
ถ้า (a,b) เป็นจุดมุมที่ได้จากอสมการข้อจำกัด และให้ค่า P น้อยที่สุด
แล้ว $a+b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 20 2. 24 3. 25 4. 28

13. ให้ $\left|\bar{u}+\bar{v}\right|=5\sqrt{2}$ และ $\left|\bar{u}-\bar{v}\right|=\sqrt{26}$ แล้ว $\bar{u}\cdot\bar{v}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3 2. 6 3. 8 4. 12

14. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ และ E เป็นจุดที่ทำให้ $\overline{CE} = 2\overline{BA}$
ถ้า $\overline{BE} = a\overline{CB} + b\overline{CA}$ เมื่อ a, b เป็นค่าคงตัว แล้ว $b-a$ คือค่าในข้อใดต่อไปนี้

1. -1 2. 2 3. 3 4. 5

15. ให้ $P(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามกำลังสาม ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง และสัมประสิทธิ์ของ x^3 เป็น 1 ถ้า $x-2$ หาร $P(x)$ เหลือเศษ 5 และ $(1+\sqrt{3}\,i)$ เป็นรากหนึ่งของ $P(x)$ แล้วรากที่เป็นจำนวนจริงของ $P(x)$ คือค่าในข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{4}$ 2. $\frac{4}{3}$ 3. $\frac{5}{4}$ 4. $\frac{4}{5}$

16. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} -3/2 & , \quad x \le -1 \\ \frac{2x^2+x-1}{2(x+1)} & , \quad -1 < x \le 1 \\ \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} & , \quad x > 1 \end{cases}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. f ต่อเนื่องที่จุด $x=-1$ ข. f ต่อเนื่องที่จุด $x=1$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. ก. ถูก, ข. ถูก 2. ก. ถูก, ข. ผิด
3. ก. ผิด, ข. ถูก 4. ก. ผิด, ข. ผิด

17. กำหนดให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริง และ $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ โดยที่ f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เป็น 2 ที่ $x=1$ และ $f''(1) = -4$ ถ้า $f(0) = 1$ แล้ว f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุดในข้อใดต่อไปนี้

1. $x=-3$ 2. $x=-1/3$
3. $x=1/3$ 4. $x=3$

18. ถ้า $\theta \in R$ และ $\int_{\sin\theta}^{1} (4x-3)\,dx = 0$ แล้ว $\cos 2\theta$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 หรือ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2. 0 หรือ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. -1 หรือ $\frac{1}{2}$ 4. -1 หรือ 1

19. ถ้า a และ b เป็นสัมประสิทธิ์ของ x^{-2} และ x^4 ของการกระจาย $\left(x^4 - \frac{1}{2x^2}\right)^{10}$ ตามลำดับ แล้ว $\frac{a}{b}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{2}{7}$ 2. $-\frac{1}{2}$ 3. $-\frac{1}{3}$ 4. $-\frac{4}{15}$

20. ในการเก็บตัวนักกีฬา ได้จัดให้นักกีฬาพักรวมกันห้องละ 2 คน ถ้ามีนักกีฬาจากต่างจังหวัด 4 คน และจากกรุงเทพฯ 4 คน แล้วจำนวนวิธีที่จะจัดให้มีเพียง 2 ห้องเท่านั้นที่แต่ละห้องมีนักกีฬาจากต่างจังหวัดและนักกีฬาจากกรุงเทพฯ พักด้วยกัน มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 36 2. 72 3. 108 4. 144

21. ถุงใบหนึ่งมีลูกแก้วขนาดเดียวกันอยู่ 10 ลูก เป็นสีแดง 3 ลูก สีขาว 5 ลูก สีดำ 2 ลูก สุ่มหยิบลูกแก้วจากถุงสองครั้งๆ ละลูกโดยไม่ใส่คืน ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกที่สองเป็นสีแดงเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{3}{10}$ 3. $\frac{27}{100}$ 4. $\frac{33}{100}$

22. ข้อมูลชุดหนึ่งมี 5 จำนวน มีฐานนิยม มัธยฐาน และค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น 15, 16 และ 17 ตามลำดับ และพิสัยของข้อมูลชุดนี้เท่ากับ 5 ความแปรปรวนของข้อมูลชุดนี้มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{31}{5}$ 2. $\frac{24}{5}$ 3. $\frac{22}{5}$ 4. $\frac{19}{5}$

23. เมื่อสร้างตารางแจกแจงความถี่ของคะแนนของนักเรียน 36 คน โดยใช้ความกว้างของแต่ละอันตรภาคชั้นเป็น 10 แล้ว ปรากฏว่ามัธยฐานของคะแนนทั้งหมดอยู่ในช่วง 50 – 59 ถ้ามีนักเรียนที่สอบได้คะแนนต่ำกว่า 49.5 คะแนน อยู่จำนวน 12 คน และมีนักเรียนได้คะแนนต่ำกว่า 59.5 คะแนน อยู่จำนวน 20 คน แล้วมัธยฐานของคะแนนการสอบครั้งนี้มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 53 2. 54 3. 56 4. 57

24. ตัวแทนจำหน่ายหม้อหุงข้าวไฟฟ้ายี่ห้อหนึ่ง ขายหม้อหุงข้าวขนาด 1 ลิตร, 2 ลิตร, 3 ลิตร และ 4 ลิตร ในรอบ 2 ปีที่ผ่านมาด้วยราคาและปริมาณดังต่อไปนี้

ขนาดของหม้อหุงข้าวไฟฟ้า	ปริมาณหม้อ		ราคา	
	2540	2541	2540	2541
1 ลิตร	300	250	400	400
2 ลิตร	220	230	500	450
3 ลิตร	200	200	600	a
4 ลิตร	150	130	1000	950

ถ้าดัชนีราคาอย่างง่ายแบบใช้ราคารวมของ พ.ศ. 2541 เมื่อเทียบกับ พ.ศ. 2540 เท่ากับ 96.00 แล้ว ดัชนีราคาแบบใช้ราคารวมโดยถ่วงน้ำหนักด้วยปริมาณในปีฐาน (วิธีของลาสไพเยอเรส) ของ พ.ศ. 2541 เมื่อใช้ พ.ศ. 2540 เป็นปีฐาน เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 80.00 2. 86.80 3. 90.00 4. 96.30

<u>ตอนที่ 3</u> ข้อ 25 – 28 เป็นข้อสอบแบบปรนัย ข้อละ 4 คะแนน

25. ถ้า $A = \{5, 6, 7, \ldots, 20\}$ และ $B = \{1, 2, 3, \ldots, 15\}$ แล้ว
จำนวนสมาชิกในเซต $\{ x \mid x$ เป็นสับเซตของ A และ x ไม่เป็นสับเซตของ $B \}$
เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 7×2^{10} 2. 31×2^{11} 3. 31×2^{10} 4. 63×2^{11}

26. กำหนด $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$
ถ้า $g = \{ (x, y) \mid y = f(1 - e^x)$ และ $y > 0 \}$ แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $D_g \subset R'_g$ 2. $D'_g \subset R_g$
3. $D_g \subset R_g \cup [1, \infty)$ 4. $R_g \subset D_g \cap [1, \infty)$

27. ถ้า $f(x) = x - 1$ แล้ว $\sum_{n=10}^{30} (fof)(n^2)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 9028 2. 9030 3. 9128 4. 9170

28. คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นหนึ่งมีการแจกแจงปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเลขคณิต
เป็น 64 คะแนน ถ้านักเรียนที่สอบได้คะแนนมากกว่า 80 คะแนนมีอยู่ 15.87% แล้วสัมประสิทธิ์
ของการแปรผันของคะแนนสอบวิชานี้คือข้อใดต่อไปนี้
(พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง z=0 ถึง z=1 คือ 0.3413)

1. 35% 2. 30% 3. 25% 4. 20%

<u>เฉลย</u>

ตอนที่ 1 (1) 7 (2) 14 (3) 1 (4) 6 (5) 0.2 (6) 0.62

ตอนที่ 2 (1) 3 (2) 1 (3) 4 (4) 2 (5) 2 (6) 1 (7) 2 (8) 2 (9) 4 (10) 3 (11) 4 (12) 1 (13) 2 (14) 4 (15) 1 (16) 1 (17) 2 (18) 3 (19) 1 (20) 4 (21) 2 (22) 3 (23) 4 (24) 4

ตอนที่ 3 (25) 2 (26) 4 (27) 3 (28) 3

โจทย์เอ็นทรานซ์ : ตุลาคม 2542

ตอนที่ 1 ข้อ 1 – 6 เป็นข้อสอบแบบอัตนัย ข้อละ 2 คะแนน

1. พื้นที่ของสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น จุดกำเนิด และจุดโฟกัสทั้งสองของวงรี $x^2+2y^2+4x-4y-2=0$ เท่ากับเท่าใด

2. ถ้า $f(x)=4x$ และ $g(x)=\dfrac{2}{x-1}$ แล้ว ค่า x ที่ทำให้ $(fog)(x)=(gof)(x)$ เท่ากับเท่าใด

3. ให้ A เป็นเมตริกซ์มิติ 3×3 ถ้า $M_{13}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, $M_{21}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ และ $M_{32}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ แล้ว $\det A$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

4. กำหนดให้ $A=\{x\in R \mid 5^{3^{2x}+3}=25^{5(3^{x-\frac{1}{2}})}\}$ ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดของ A มีค่าเท่ากับเท่าใด

5. ให้ u และ v เป็นฟังก์ชันของ x โดยที่ $v(x)=x^2-2x$ และ $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ และ $u(3)=-9$, $u'(3)=3$ แล้ว ค่าของ $f'(3)$ เท่ากับเท่าใด

6. ในการประชุมครั้งหนึ่ง มีผู้แทนจาก 3 ประเทศเข้าร่วมประชุม โดยมีผู้แทนประเทศละ 3 คน จำนวนวิธีทั้งหมดที่จะจัดให้ผู้แทนแต่ละประเทศต้องนั่งติดกันในการประชุมโต๊ะกลม เท่ากับเท่าใด

<u>ตอนที่ 2</u> ข้อ 1 – 24 เป็นข้อสอบแบบปรนัย ข้อละ 3 คะแนน

1. กำหนดให้ $f(x) = \frac{x}{1-x}$ และ $g(x) = \sqrt{x^2-1}$

ถ้า $A = D_{gof}$ และ $B = D_g$ แล้ว $(A \cup B')$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $R - \{-1, 1\}$
2. $(-1, \infty)$
3. $(\frac{1}{2}, 1) \cup (1, \infty)$
4. $(-1, 1) \cup (1, \infty)$

2. ให้ $A = \{ x \mid |x-2| < 4 \}$ และ $B = \{ x \mid 15x^{-2} - 8x^{-1} + 1 > 0 \}$

แล้ว $A \cap B$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-2, 3) \cup (5, 6)$
2. $(0, 3) \cup (5, 6)$
3. $(0, 3) \cup (3, 5) \cup (5, 6)$
4. $(-2, 0) \cup (0, 3) \cup (5, 6)$

3. สำหรับจำนวนเต็ม a, b ใดๆ ให้ (a, b) = ห.ร.ม. ของ a และ b

ให้ $A = \{1, 2, 3, \ldots, 400\}$ จำนวนสมาชิกของเซต $\{ x \in A \mid (x, 40) = 5 \}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. 30
2. 40
3. 60
4. 80

4. พิจารณาการอ้างเหตุผลต่อไปนี้

ก. *เหตุ*	1) $p \to (q \to \sim r)$		ข. *เหตุ*	1) $(p \wedge q) \to r$
	2) q			2) $\sim (r \vee s)$
	3) r			3) p
ผล	p		*ผล*	$\sim q$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก และ ข สมเหตุสมผล
2. ก สมเหตุสมผล แต่ ข ไม่สมเหตุสมผล
3. ก ไม่สมเหตุสมผล แต่ ข สมเหตุสมผล
4. ก และ ข ไม่สมเหตุสมผล

5. เอกภพสัมพัทธ์ U ที่กำหนดในข้อใดต่อไปนี้ที่ทำให้ประโยค

$\exists x [2x^2 + x - 1 \le 0 \ \wedge \ \sqrt{x^2 - 4x + 4} \le 3]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

1. U = เซตของจำนวนเต็มบวกคู่
2. U = เซตของจำนวนเต็มบวกคี่
3. U = เซตของจำนวนเต็มลบคู่
4. U = เซตของจำนวนเต็มลบคี่

6. ให้ $f(x) = \arcsin x$, $g(x) = \cos x$ และ $h(x) = (fog)(x)$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. โดเมนของ h คือเซตของจำนวนจริง และ $g(\frac{\pi}{2} - h(x)) = g(x)$

ข. h เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

7. $\{\cos A \mid 0 \le A \le \frac{4\pi}{3}$ และ $5-3\sin 3A$ มีค่ามากที่สุด $\}$
เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$
2. $\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\}$
3. $\{0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$
4. $\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$

8. ถ้า A เป็นจุดบนวงกลม $x^2+y^2+4x-6y+11=0$ ซึ่งอยู่ใกล้กับจุดโฟกัส F ของพาราโบลา $x^2-12x+4y+52=0$ มากที่สุด แล้วระยะระหว่างจุด A กับ F มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $7\sqrt{2}$
2. $8\sqrt{2}$
3. $7\sqrt{2}-2$
4. $8\sqrt{2}-2$

9. ให้ O เป็นจุดกำเนิด, A เป็นจุดบนแกน x และ B เป็นจุดในระนาบซึ่งทำให้เส้นตรง OB มีความชันเท่ากับ 2 และเส้นตรง AB มีความชันเท่ากับ 1
ถ้า $\theta = A\hat{B}O$ แล้ว $\sec^2\theta$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 10/9
2. 11/9
3. 10
4. 11

10. กำหนดให้ a, b เป็นคำตอบของสมการ $\log_3 x + 6\log_x 3 = 5$ โดยที่ $a<b$
ถ้า $A = \{ x \in I^+ \mid x \in [a,b]$ และ $3 \mid x \}$ เมื่อ I^+ เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก
แล้ว A มีจำนวนสมาชิกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 6
2. 7
3. 18
4. 19

11. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} x & 5 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -x \end{bmatrix}$ โดยที่ $\det A = -1$ และ x เป็นจำนวนจริง
ถ้า I เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 3×3 แล้ว $\det(2(I-A)A^t)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 4
2. 8
3. 12
4. 18

12. โรงงานแห่งหนึ่งต้องการผลิตสินค้า A และ B โดยที่มีราคาขายต่อชิ้นเป็น 10 และ 15 บาท ตามลำดับ ถ้าโรงงานนี้ผลิตสินค้า A ได้ x ชิ้น และผลิตสินค้า B ได้ y ชิ้น โดยมีอสมการข้อจำกัดดังนี้

$x \ge 0 \qquad 0 \le y \le 5 \qquad x+y \le 10$ และ $2x+y \le 16$

แล้วโรงงานจะขายสินค้าได้เงินมากที่สุดเป็นจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 120
2. 125
3. 130
4. 150

13. ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ทำมุมกัน 60° และ $|\bar{u}+\bar{v}| = \sqrt{37}$, $|\bar{u}-\bar{v}| = \sqrt{13}$
แล้ว $|\bar{u}| + |\bar{v}|$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 5
2. 7
3. $\sqrt{37}$
4. $\sqrt{50}$

14. กำหนดให้ O เป็นจุดกำเนิด $\overrightarrow{OA} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$, $\overrightarrow{OB} = 5\bar{i} - 2\bar{j}$
จากจุด A ลากเส้นตรงไปตั้งฉากกับ $\overrightarrow{OB}$ ที่จุด D แล้ว $\overrightarrow{OD}$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{7}{\sqrt{29}}(5\bar{i} - 2\bar{j})$
2. $\frac{7}{29}(5\bar{i} - 2\bar{j})$
3. $\frac{8}{\sqrt{29}}(5\bar{i} - 2\bar{j})$
4. $\frac{8}{29}(5\bar{i} - 2\bar{j})$

15. ถ้า $z = -2 + 2\sqrt{3}\,i$ เมื่อ $i^2 = -1$ แล้ว z^{17} อยู่ในควอดแรนต์ในข้อใดต่อไปนี้

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4

16. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า $A = \{ x \in R \mid (1+i)x^3 + (1+2i)x^2 - (1+i)x - (1+2i) = 0 \}$ แล้ว
$A \subseteq [-1.5, 1.5]$

ข. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $z^6 = \frac{1}{8}i$ แล้ว $|\bar{z}|$ เท่ากับ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

17. ให้ a เป็นจำนวนจริง กำหนดพจน์ที่ n ของอนุกรมคือ $\frac{1 + (n-2)\sqrt{a}}{1-a}$
ถ้าพจน์ที่ m คือ $\frac{1 + 38\sqrt{a}}{1-a}$ แล้วผลบวก m พจน์แรกของอนุกรมนี้มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{40 + 740\sqrt{a}}{1-a}$
2. $\frac{40 + 790\sqrt{a}}{1-a}$
3. $\frac{20 + 720\sqrt{a}}{1-a}$
4. $\frac{20 + 760\sqrt{a}}{1-a}$

18. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง โดยที่ $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{4 - x^2}$ เมื่อ $x \neq \pm 2$
และ $f(2) = a$, $f(-2) = b$ แล้ว a และ b เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

1. $a = 1, b = -3$
2. $a = 1, b = 3$
3. $a = -1, b = -3$
4. $a = -1, b = 3$

19. ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีกราฟผ่านจุด $(0, 2)$ และ $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$
แล้ว ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2
2. 3
3. 6
4. 8

20. ในจำนวนเด็ก 12 คน มีเด็กถนัดซ้าย 4 คน ถ้าเลือกเด็ก 5 คนโดยการสุ่มจากเด็กเหล่านี้
แล้วความน่าจะเป็นที่จะมีเด็กถนัดซ้ายอยู่ในกลุ่มที่เลือกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{35}{99}$
2. $\frac{47}{99}$
3. $\frac{63}{99}$
4. $\frac{92}{99}$

21. ให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{3, 4\}$

ถ้า $S = \{ f : A \cup B \rightarrow A \times B \mid f$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง $\}$

แล้วจำนวนสมาชิกของ S เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 120 2. 240 3. 360 4. 480

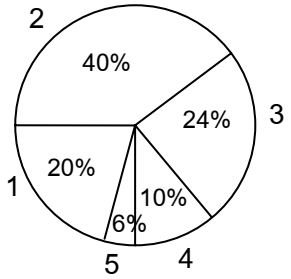
22. พิจารณาข้อมูลของ x และ y ดังนี้

x	-3	-1	0	1	3
y	0	a	a+3	a+4	a+6

เมื่อ a เป็นค่าคงที่ ให้ x และ y มีความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันเป็นกราฟเส้นตรง โดยที่ความชันเท่ากับ 1.55 ถ้า $x = 4$ จะประมาณค่า y ได้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 8.7 2. 10.8 3. 11.2 4. 12.8

23. แผนภูมิวงกลมต่อไปนี้แสดงจำนวนนักเรียนทั้งหมด 500 คนของโรงเรียนแห่งหนึ่ง จำแนกตามคะแนนสอบวิชาหนึ่ง



1. นักเรียนที่ได้คะแนน 1 – 20 คะแนน
2. นักเรียนที่ได้คะแนน 21 – 40 คะแนน
3. นักเรียนที่ได้คะแนน 41 – 60 คะแนน
4. นักเรียนที่ได้คะแนน 61 – 80 คะแนน
5. นักเรียนที่ได้คะแนน 81 – 100 คะแนน

ถ้าความแปรปรวนของคะแนนสอบเท่ากับ 481.44 พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ครึ่งหนึ่งของนักเรียนโรงเรียนนี้ได้คะแนนมากกว่า 40 คะแนน

ข. สัมประสิทธิ์ของการแปรผันของคะแนนสอบวิชานี้เท่ากับ 0.50

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

24. ในปี พ.ศ. 2540 สุเมธมีรายได้เดือนละ 15,000 บาท โดยที่รายได้ต่อเดือนที่แท้จริงของเขาเป็น 12,500 บาท เทียบกับปี พ.ศ. 2538

ถ้าดัชนีราคาผู้บริโภคในปี พ.ศ. 2541 สูงกว่าปี พ.ศ. 2540 อยู่ 5%

แล้วค่าครองชีพในปี พ.ศ. 2541 สูงกว่าปี พ.ศ. 2538 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

(โดยคิดจากดัชนีราคาผู้บริโภค เมื่อใช้ปี พ.ศ. 2538 เป็นปีฐาน)

1. 20% 2. 25% 3. 26% 4. 30%

<u>ตอนที่ 3</u> ข้อ 25 – 28 เป็นข้อสอบแบบปรนัย ข้อละ 4 คะแนน

25. ให้ $F(x) = f(g(x))$ ถ้า $g(x) = x^3 + 2x + 2$ และ $\int F(x)\,dx = 5x^3 + 2x + c$ แล้วค่าของ $f'(5)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 6 2. 5 3. 4 4. 3

26. กำหนดให้ $f(x) = \pi\left(\frac{x+7}{24}\right)$ เมื่อ $-3 < x \le 3$ และ $f(x+6) = f(x)$ ทุกๆ $x \in R$
ถ้า $g(x) = A + \arcsin x$ โดยที่ $A \in [0, \pi]$ และ $\cos A = 2/\sqrt{5}$
แล้วค่าของ $(g^{-1}of)(5)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{\sqrt{10}}$ 2. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 3. $\frac{-1}{\sqrt{5}}$ 4. $\frac{-1}{\sqrt{10}}$

27. กล่องใบหนึ่งบรรจุขนมชั้น 24 ชิ้น แต่ละชิ้นมี 4 ชั้นๆ ละสี ซึ่งมีสีเขียว ขาว แดง เหลือง และการเรียงลำดับสีของแต่ละชิ้นทั้ง 24 ชิ้นแตกต่างกันหมด ถ้าหยิบขนม 1 ชิ้นจากกล่องนี้โดยสุ่ม แล้วความน่าจะเป็นที่ชิ้นที่หยิบได้มีสองชั้นบนไม่ใช่สีแดงและไม่ใช่สีเหลืองเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{24}$ 2. $\frac{1}{12}$ 3. $\frac{1}{6}$ 4. $\frac{1}{4}$

28. ถ้าคะแนนสอบวิชาภาษาอังกฤษของนักศึกษาในมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่งมีการแจกแจงปกติ โดยมีคะแนนเฉลี่ยและความแปรปรวนของคะแนนเท่ากับ 60 และ 25 ตามลำดับ และผู้สอนกำหนดว่านักศึกษาที่จะสอบผ่านต้องได้คะแนนไม่น้อยกว่า 54 คะแนน ถ้านายขาว นายแดง และนายดำ สอบได้คะแนนอยู่ในตำแหน่งเปอร์เซ็นไตล์ที่ 10, 15 และ 33 ตามลำดับ
จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. นายขาวสอบไม่ผ่าน แต่นายแดงและนายดำสอบผ่าน

ข. นายดำสอบได้ 57.8 คะแนน

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

กำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้โค้งปกติดังนี้
พื้นที่จาก z=0 ถึง z=0.24 เท่ากับ 0.0948
พื้นที่จาก z=0 ถึง z=0.44 เท่ากับ 0.1700
พื้นที่จาก z=0 ถึง z=1.2 เท่ากับ 0.3849

เฉลย

ตอนที่ 1 (1) 2 (2) 0.2 (3) 15 (4) 1 (5) 5 (6) 432

ตอนที่ 2 (1) 4 (2) 4 (3) 2 (4) 3 (5) 4 (6) 2 (7) 2 (8) 1 (9) 1 (10) 2 (11) 4 (12) 2 (13) 2 (14) 2 (15) 3 (16) 1 (17) 1 (18) 4 (19) 3 (20) 4 (21) 3 (22) 3 (23) 4 (24) 3

ตอนที่ 3 (25) 1 (26) 1 (27) 3 (28) 1

โจทย์เอ็นทรานซ์ : มีนาคม 2543

<u>ตอนที่ 1</u> ข้อ 1 – 6 เป็นข้อสอบแบบอัตนัย ข้อละ 2 คะแนน

1. ให้ $A = \{0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm20\}$
และ $B = \{ x \in A \mid \sqrt{|x|} \text{ เป็นจำนวนเต็ม} \}$
จำนวนสมาชิกของเซต $\{ C \subset B \mid 0 \in C \text{ และ } 1 \notin C \}$ เท่ากับเท่าใด

2. ถ้า x เป็นรากของสมการ $2^{3x-1} \cdot 6^{x} \cdot 25^{5x-1} = 75^{x}$ แล้ว x มีค่าเท่ากับเท่าใด

3. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} C_{13}(A) & C_{23}(A) \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ แล้ว $\det(B^{-1})$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

4. ในการทอดลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน 1 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองลูกจะเป็นเลขที่หารด้วย 4 ไม่ลงตัว มีค่าเท่ากับเท่าใด

5. ถ้าให้สมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่ใช้สำหรับการประมาณจำนวนห้องพักที่มีแขกมาพักจริง (แทนด้วย y) จากจำนวนห้องพักที่มีการจองล่วงหน้า (แทนด้วย x) คือ
$y = a + 0.75x$ โดยที่ $\bar{x} = 40$ และ $\bar{y} = 60$
ถ้า $x = 60$ แล้ว จำนวนห้องพักที่มีแขกมาพักจริง โดยประมาณเท่ากับเท่าใด

6. กำหนดดัชนีราคาผู้บริโภคของปีต่างๆ โดยมีปี 2535 เป็นปีฐาน ดังนี้

ปี	2535	2536	2537
ดัชนี	100	90	108

ถ้ารายได้ที่เป็นตัวเงินของชายผู้หนึ่งในปี 2536 เท่ากับ 900 บาท และรายได้ที่แท้จริงของเขาในปี 2537 เท่ากับรายได้ที่แท้จริงของเขาในปี 2536 เมื่อเทียบกับรายได้ในปี 2535 แล้ว รายได้ที่เป็นตัวเงินที่เขาควรจะได้รับในปี 2537 เท่ากับเท่าใด

<u>ตอนที่ 2</u> ข้อ 1 – 24 เป็นข้อสอบแบบปรนัย ข้อละ 3 คะแนน

1. กำหนดให้ S เป็นเซตคำตอบของอสมการ $x^2 \le 8x + 20$

ถ้า $A = \{ x \in S \mid x$ เป็นจำนวนเฉพาะบวก $\}$ และ $B = \{ x \in S \mid x$ เป็นจำนวนเต็มคี่ $\}$

แล้ว $(A \times B) - (B \times A)$ มีจำนวนสมาชิกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 11 2. 15 3. 21 4. 23

2. ให้ $S = \{0, 1, 2, \ldots, 7\}$

และ นิยาม $a * b =$ เศษเหลือจากการหารผลคูณ ab ด้วย 6 ทุก $a, b \in S$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $x * 1 = x$ ทุก $x \in S$ ข. $\{4 * x \mid x \in S\} = \{0, 2, 4\}$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก แต่ ข. ผิด
3. ก. ผิด แต่ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

3. นิเสธของข้อความ $\exists x [P(x) \wedge \sim Q(x)]$ คือข้อความในข้อใดต่อไปนี้

1. $\forall x [P(x) \to \sim Q(x)]$
2. $\exists x [\sim P(x) \to Q(x)]$
3. $\forall x [P(x) \to Q(x)]$
4. $\exists x [Q(x) \to P(x)]$

4. กำหนดให้ *เหตุ* 1) $\sim p \to \sim q$ 3) $q \vee t$

2) $p \to (r \vee s)$ 4) $\sim t$

ผลในข้อใดต่อไปนี้ทำให้การอ้างเหตุผลนี้ สมเหตุสมผล

1. $s \to r$
2. $s \to \sim r$
3. $r \to \sim s$
4. $\sim r \to s$

5. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \mid y = \sqrt{9 - x^2}\}$ และ $s = \{(x, y) \mid y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}\}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $D_r \cap R_{s^{-1}} = \varnothing$ ข. $R_r \cap D_{s^{-1}} = (0, \infty)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

6. กำหนดให้ $f(x) = ax^3 + x^2 + x + b$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง และ $f(1) = 3$, $f'(1) = 0$ ถ้า $g(x) = f''(x)$ แล้ว $(gof)(-1)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -16 2. -4 3. 4 4. 16

7. ถ้าสามเหลี่ยม ABC มีมุม $BAC = 45°$, มุม $ACB = 60°$ และด้าน AC ยาว 20 นิ้ว แล้วพื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{300\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$ 2. $\frac{300\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ 3. $\frac{200\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$ 4. $\frac{200\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$

8. $\sec\left(\frac{1}{2}(\arcsin\frac{3}{5}+\arccos\frac{3}{5})\right)+\tan\left(\frac{1}{2}(\arcsin\frac{4}{5}+\arccos\frac{4}{5})\right)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\sqrt{2}$ 2. $\sqrt{3}$ 3. $1+\sqrt{2}$ 4. $2+\sqrt{3}$

9. กำหนดให้เส้นตรง $3x-4y-5=0$ ขนานกับเส้นตรง $x+ky+5=0$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริง ถ้าวงกลมซึ่งมีเส้นตรงทั้งสองนี้เป็นเส้นสัมผัส มีจุดศูนย์กลางอยู่บนแกน y และผ่านจุด $(a,1/4)$ แล้ว $|a|$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\sqrt{6}/2$ 2. $\sqrt{7}/2$ 3. $\sqrt{2}$ 4. $\sqrt{3}$

10. ให้ C เป็นวงกลม $x^2+y^2-2x-4y-20=0$ มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) และมีรัศมี r สมการพาราโบลาซึ่งมี (h,k) เป็นจุดยอด และ $x=r$ เป็นสมการไดเรกตริกซ์ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $y^2-4y+20x-16=0$ 2. $y^2+4y-16x-12=0$
3. $y^2-4y+16x-12=0$ 4. $y^2-4y+16x-14=0$

11. $\log_3\frac{3+3\sqrt{\sqrt{27}}}{(\sqrt{3}+5\sqrt{\sqrt{3}}+6)}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{4}-\log_3(3^{1/4}+2)$ 2. $\frac{1}{4}-\log_3(3^{1/2}+2)$
3. $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\log_3 19$ 4. $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\log_3 19$

12. กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}\cos 2x & -\sin x\cos x\\ 2\sin 3x & \cos 3x\end{bmatrix}$ และ

$S=\{x\in[0,\pi]\mid 2\det(A^2)-3\sqrt{3}\det(A)+\det(\sqrt{3}\,I)=9$ เมื่อ I คือเมตริกซ์เอกลักษณ์มิติ $2\times 2\}$ ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดของ S มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2\pi}{6}$ 2. $\frac{3\pi}{6}$ 3. $\frac{4\pi}{6}$ 4. $\frac{5\pi}{6}$

13. แม่ค้าคนหนึ่งทำขนมขายส่งสองชนิด โดยขายขนมชนิดแรกราคาชิ้นละ 12 บาท ชนิดที่สองราคาชิ้นละ 10 บาท ถ้าแม่ค้าทำขนมชนิดแรก x ชิ้น และชนิดที่สอง y ชิ้น โดยมีอสมการข้อจำกัดดังนี้

$x\geq 0,\ y\geq 0$ $5x+6y\leq 15000$ และ $3x+2y\leq 6000$

แล้ว แม่ค้าจะขายขนมได้เงินสูงสุดเมื่อขายขนมทั้งสองชนิดรวมกัน เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2575 ชิ้น 2. 2625 ชิ้น 3. 2875 ชิ้น 4. 3205 ชิ้น

14. ให้ $\bar{u}=\bar{i}+3\bar{j}$, $\bar{v}=2\bar{i}+\bar{j}$

ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $(\bar{u}+\bar{v})$ และ $(\bar{u}-\bar{v})$ แล้ว $\cos\theta$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 2. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ 3. $\frac{1}{5}$ 4. $\frac{2}{5}$

15. กำหนดให้ $|\bar{u}-\bar{v}|=3$ และ $\bar{u}\cdot\bar{v}=-2$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\bar{u}+\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ข. $|\bar{u}|^2+|\bar{v}|^2=3$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

16. ถ้า $z_1=\cos 12^\circ+i\sin 12^\circ$ และ $z_2=-\cos 16^\circ-i\sin 16^\circ$ แล้ว $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{15}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$
2. $\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$
3. $\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$
4. $\frac{-\sqrt{3}-i}{2}$

17. ให้ z_1, z_2, z_3, z_4 เป็นรากของสมการ $z^4+z^2+2=0$ $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2
2. 4
3. $2^{5/2}$
4. $2^{9/4}$

18. ถ้าลำดับเลขคณิต $a_1, a_2, a_3, \ldots$ มีพจน์ที่ 10 และพจน์ที่ 15 เป็น -19 และ -34 ตามลำดับ แล้ว $\sum_{i=1}^{20}(a_i+2i)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -30
2. -15
3. 10
4. 20

19. กำหนดให้ $f(x)=x^3+cx^2-9x$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริง ถ้าค่าวิกฤตค่าหนึ่งของ f คือ 1 แล้ว f เป็นฟังก์ชันลดในเซตใดต่อไปนี้

1. $(-3,1)$
2. $(-\infty,-3)\cup(1,\infty)$
3. $(-1,4)$
4. $(-\infty,-1)\cup(4,\infty)$

20. ให้ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f โดยที่ $f(x)=3x^2-6x+3$ ถ้า $F(0)=-1$ และ F มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ในช่วง $[0,2]$ ที่จุด $x=c$ แล้ว $F(c)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1
2. 0
3. 1
4. 2

21. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ และ $g(x)=(x+1)f(x)$ ถ้า $\int g(x)\,dx=x^2-x+c$ แล้ว $f'(1)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{4}$
2. $\frac{5}{4}$
3. $\frac{3}{2}$
4. $\frac{5}{2}$

22. ในโรงเรียนแห่งหนึ่ง มีนักกีฬาฟุตบอลและนักกีฬาบาสเกตบอลรวมกัน 30 คน เป็นนักกีฬาฟุตบอล 17 คน และนักกีฬาบาสเกตบอล 18 คน ถ้าจะเลือกประธานกีฬาของโรงเรียน 1 คน และรองประธานกีฬา 1 คน จากนักกีฬากลุ่มนี้ โดยที่ประธานต้องเป็นทั้งนักกีฬาฟุตบอลและบาสเกตบอล แล้วจำนวนวิธีการเลือกดังกล่าวมีทั้งหมดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 125
2. 130
3. 145
4. 150

23. ถ้าต้องการเขียนจำนวนที่มี 7 หลัก โดยใช้ตัวเลขโดด 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 และให้มีเลขโดด 3, 4, 5 อยู่ติดกันตรงกลางระหว่างเลขโดดคู่และเลขโดดคี่ โดยแต่ละจำนวนไม่มีเลขซ้ำ แล้วจะเขียนได้ทั้งหมดเป็นจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 8 2. 16 3. 24 4. 48

24. โรงเรียนแห่งหนึ่งมีนักเรียนชั้น ม.6 จำนวน 300 คน สมชาย สมศักดิ์และสมศรี เป็นนักเรียนชั้น ม.6 ของโรงเรียนนี้โดยที่

เกรดเฉลี่ยของสมชายอยู่ในตำแหน่งเดไซล์ที่ 8.15

เกรดเฉลี่ยของสมศักดิ์คิดเป็นค่ามาตรฐานเท่ากับ 1

นักเรียนชั้น ม.6 ที่ได้เกรดเฉลี่ยมากกว่าสมศรีมีจำนวน 50 คน

ถ้าสมมติว่าเกรดเฉลี่ยของนักเรียนชั้น ม.6 มีการแจกแจงปกติ ข้อใดต่อไปนี้เป็นรายชื่อนักเรียนเรียงลำดับจากคนที่ได้เกรดเฉลี่ยมากที่สุดไปน้อยที่สุด

(กำหนดพื้นที่ใต้โค้งปกติ z=0 ถึง z=1 มีค่าเท่ากับ 0.3413)

1. สมชาย สมศักดิ์ สมศรี
2. สมศักดิ์ สมศรี สมชาย
3. สมศรี สมศักดิ์ สมชาย
4. สมศักดิ์ สมชาย สมศรี

<u>ตอนที่ 3</u> ข้อ 25 – 28 เป็นข้อสอบแบบปรนัย ข้อละ 4 คะแนน

25. ให้ $f, g : R \to R$ กำหนดโดย $f(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$

และ $g(x) =$ จำนวนเต็มซึ่งน้อยที่สุด ที่มากกว่าหรือเท่ากับ x

(เช่น $g(1.01) = 2$, $g(-6) = -6$, $g(-7.99) = -7$ เป็นต้น)

ถ้า $F(x) = (fog)(x)$ และ $G(x) = (gof)(x)$ แล้วข้อใดต่อไปนี้เป็นเท็จ

1. $D_F = (-\infty, \infty)$
2. $R_F = (0,1)$
3. $G(x) = 1$ เมื่อ $x > 0$
4. $G(x) = 0$ เมื่อ $x < 0$

26. ถ้า $f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 1 \\ x-1, & 0 < x \le 1 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$

แล้ว $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x^2) + \lim\limits_{x \to 1^+} \left[\dfrac{f(x-1)}{x+2} \right]$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\dfrac{4}{3}$
2. -1
3. 0
4. $\dfrac{1}{3}$

27. กล่องใบหนึ่งมีลูกหินสีขาว 5 ลูก สีเขียว 3 ลูก สีน้ำเงิน 2 ลูก ถ้าหยิบลูกหินอย่างสุ่มครั้งละ 1 ลูก โดยไม่ใส่คืน 3 ครั้ง แล้วความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกหินสีเดียวกันอย่างน้อย 2 ลูก มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{24}$ 2. $\frac{23}{24}$ 3. $\frac{1}{4}$ 4. $\frac{3}{4}$

28. ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วย $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{20}$ โดยมีสมบัติดังนี้

$\sum_{i=1}^{20}(x_i-5)^2=500$, $\sum_{i=1}^{20}|x_i-a|$ มีค่าน้อยที่สุด เมื่อ $a=5$

และ $\sum_{i=1}^{20}(x_i-b)^2$ มีค่าน้อยที่สุด เมื่อ $b=8$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ข้อมูลชุดนี้มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตน้อยกว่าค่ามัธยฐาน
2. ผลรวมของข้อมูลชุดนี้ทั้งหมดเท่ากับ 100
3. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลชุดนี้มีค่าเท่ากับ 5
4. สัมประสิทธิ์ของการแปรผันของข้อมูลชุดนี้มีค่าเท่ากับ 50%

<u>เฉลย</u>

ตอนที่ 1 (1) 128 (2) 0.25 (3) 0.1 (4) 0.75 (5) 75 (6) 1080

ตอนที่ 2 (1) 2 (2) 3 (3) 3 (4) 4 (5) 2 (6) 1 (7) 4 (8) 3 (9) 4 (10) 3 (11) 1 (12) 4 (13) 2 (14) 1 (15) 2 (16) 1 (17) 4 (18) 3 (19) 1 (20) 3 (21) 1 (22) 3 (23) 4 (24) 2

ตอนที่ 3 (25) 2 (26) 1 (27) 4 (28) 4

โจทย์เอ็นทรานซ์ : ตุลาคม 2543

ตอนที่ 1 ข้อ 1 – 28 เป็นข้อสอบแบบปรนัย ข้อละ 3 คะแนน

1. กำหนดให้ A, B, C เป็นเซต โดยที่ $A \cap B \subset B \cap C$
ถ้า $n(A) = 25,\ n(C) = 23,\ n(B \cap C) = 7,\ n(A \cap C) = 10$ และ $n(A \cup B \cup C) = 49$
แล้ว $n(B)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 11 2. 14 3. 15 4. 18

2. กำหนดให้ $A = \{ x \mid |x - 4| > 5 \}$
$B = \{ x \mid \sqrt{x+3} - \sqrt{x} \le 1 \}$
ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $A \cup B = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
2. $(A \cap B)' = (9, \infty)$
3. $B - A = [1, 9)$
4. $A - B = (-\infty, -1)$

3. ให้ p, q, r, s และ t เป็นประพจน์ ถ้าประพจน์ $(p \wedge q) \to (r \vee s)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ
แล้ว ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นเท็จ

1. $(p \wedge r) \leftrightarrow (s \wedge t)$
2. $(p \wedge s) \to (q \vee t)$
3. $(p \wedge s) \vee (r \wedge t)$
4. $(r \to p) \wedge (s \to t)$

4. กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์คือ $U = \{ 2n \mid n \in I^+ \}$ เมื่อ I^+ เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก
พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\exists x [2^{2x+3} - 18(2^x) + 4 = 0]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ข. $\exists x [\log_2(x+2) + \log_2(x-1) = 2]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

5. ให้ $f(x) = (x+1)^2$ และ $g(x) = \sqrt{x} + 1$
$D_{fog} \cap R'_{gof}$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $[0, 1)$ 2. $[0, 2)$ 3. $[1, \infty)$ 4. $[2, \infty)$

6. ให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ และ $B = \{a, b\}$
และให้ $S = \{ f \mid f : A \to B$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง $\}$
จำนวนสมาชิกของเซต S เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 22 2. 25 3. 27 4. 30

7. ถ้า $(fog)(x) = 3x - 14$ และ $f(\frac{1}{3}x + 2) = x - 2$ แล้ว

$(g^{-1}of)(x)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $3x - 4$ 2. $3x - 6$ 3. $3x - 8$ 4. $3x - 10$

8. ถ้า $\sin x = \frac{3}{5}$ และ $\tan x = -\frac{3}{4}$ แล้ว

$\det\left(2\begin{bmatrix}\operatorname{cosec} x & \sec x \\ 1 & \cos x\end{bmatrix}\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{1}{6}$ 2. $-\frac{1}{3}$ 3. $-\frac{2}{3}$ 4. -1

9. ถ้า $\arctan x = \arctan\frac{1}{4} - 2\arctan\frac{1}{2}$ แล้ว

$\sin(180° + \arctan x)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{13}{5\sqrt{17}}$ 2. $\frac{16}{5\sqrt{17}}$ 3. $\frac{-13}{5\sqrt{17}}$ 4. $\frac{-16}{5\sqrt{17}}$

10. กำหนดให้ P เป็นพาราโบลา $y = x^2$ และ L เป็นเส้นตรง $x - y - 2 = 0$

ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่าง P และ L มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{7\sqrt{2}}{8}$ หน่วย 2. $\frac{7}{8}$ หน่วย 3. $\frac{7\sqrt{2}}{16}$ หน่วย 4. $\frac{7}{16}$ หน่วย

11. กำหนดวงกลม C มีจุดศูนย์กลางที่ $(-1, 2)$ และสัมผัสแกน x ที่จุด P

เส้นตรง L ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม C และมีความชันเป็น 1 ถ้า Q เป็นจุดตัดของ

C และ L ที่อยู่ในควอดรันต์ที่ 2 แล้ว กำลังสองของระยะ PQ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $6 - 4\sqrt{2}$ หน่วย 2. $7 - 4\sqrt{2}$ หน่วย

3. $8 - 4\sqrt{2}$ หน่วย 4. $9 - 4\sqrt{2}$ หน่วย

12. กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $x^{\log_3 x^3} = 9x$

และ B เป็นเซตคำตอบของสมการ $\log_3 x^x = \frac{x}{3}$

ถ้า $C = \{ab \mid a \in A \text{ และ } b \in B\}$ แล้วเซตในข้อใดต่อไปนี้เป็นสับเซตของ C

1. $\{3^{-1/3}, 3^2\}$ 2. $\{3^{-1/3}, 3^{4/3}\}$

3. $\{3^{4/3}, 3^2\}$ 4. $\{3^{-1/3}, 3^{2/3}\}$

13. กำหนดให้เส้นโค้ง $y = 2^{2x} - 2^{x+2} - 45$ ตัดแกน x ที่จุด A ถ้าเส้นตรงที่ผ่านจุด A

และจุด $B(0, b)$ ขนานกับเส้นตรง $y = (\log_3 2)x - 4$ แล้ว b มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2 2. 1 3. -1 4. -2

14. ให้ A, B และ C เป็นเมตริกซ์มิติ 3×3 ถ้า $\det(A) = -3$ และ

$A^tB - 2A^tC^t = -3A^{-1}$ แล้ว $\det(2C - B^t)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -3 2. -1 3. 1 4. 3

15. บริษัทแห่งหนึ่งผลิตเก้าอี้โยกมีกำไร 50 บาท/ตัว และผลิตเก้าอี้นั่งธรรมดามีกำไร 30 บาท/ตัว ถ้าบริษัทผลิตเก้าอี้โยก x ตัว/วัน และเก้าอี้นั่งธรรมดา y ตัว/วัน แล้วจะมีเงื่อนไขการผลิตดังนี้ $6x+3y\le 900$ และ $3x+4y\le 600$
แล้ว บริษัทจะมีกำไรมากที่สุดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $4,500$ บาท/วัน
2. $7,500$ บาท/วัน
3. $7,800$ บาท/วัน
4. $9,500$ บาท/วัน

16. ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ และ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$
ถ้า $\bar{u}+\bar{v}$ ตั้งฉากกับ $\bar{u}-2\bar{v}$ และ $\bar{u}+2\bar{v}$ ตั้งฉากกับ $2\bar{u}-\bar{v}$
และ $|\bar{u}|=\sqrt{2}$ แล้ว $\cos\theta$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{-1}{\sqrt{10}}$
2. $\frac{-1}{\sqrt{6}}$
3. $\frac{-1}{\sqrt{4}}$
4. $\frac{-1}{\sqrt{2}}$

17. กำหนดให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ $2z_1\bar{z}_2=1+\bar{z}_2$
และ $z_1=(\cos\frac{\pi}{18}+i\sin\frac{\pi}{18})^6$ ข้อใดต่อไปนี้คืออินเวอร์สการคูณของ z_2

1. $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}$
2. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}$
3. $\sqrt{3}i$
4. $-\sqrt{3}i$

18. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $|z|=|3-4i|$ และ $|z-1|=\sqrt{30}$ แล้ว
ส่วนจินตภาพของ z อยู่ในเซตใดต่อไปนี้

1. $\{-4,4\}$
2. $\{-\sqrt{21},\sqrt{21}\}$
3. $\{-3,3\}$
4. $\{-\sqrt{24},\sqrt{24}\}$

19. ให้ $f(x)=x^3-x^2+g(x)$ และ $f'(2)=f(2)=2$
แล้ว $\left(\frac{g}{f}\right)'(2)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -2
2. $1/2$
3. 0
4. 2

20. ให้ $5,x,20,\ldots$ เป็นลำดับเลขคณิตที่มีผลบวกของ 12 พจน์แรกเป็น a และ
$5,y,20,\ldots$ เป็นลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์ที่ 6 เป็น b โดยที่ $y<0$ แล้ว $a+b$ มีค่าเท่าใด

1. 205
2. 395
3. 435
4. 845

21. ถ้า $\sum_{i=1}^{10}x_i=-8$, $\sum_{i=1}^{10}y_i=4$ และ $\sum_{i=1}^{10}(5-x_i)(y_i+2)=76$ แล้ว $\sum_{i=1}^{10}(x_iy_i)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -60
2. -30
3. 30
4. 60

22. กำหนดให้ $f(x)=ax^3-4x^2+1$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว และ $g(x)=\begin{cases}f(x) & ,x>1\\ f'(x) & ,x<1\\ 0 & ,x=1\end{cases}$
ถ้า $g(x)$ มีลิมิตที่ 1 แล้ว a เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0
2. $\frac{5}{2}$
3. $\frac{8}{3}$
4. 3

23. ถ้าเส้นโค้ง $y = f(x)$ ผ่านจุด $(0,1)$ และ $(4,c)$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริง และความชันของเส้นโค้งนี้ที่จุด (x,y) ใดๆ มีค่าเท่ากับ $\sqrt{x}-1$ แล้ว c มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{4}{3}$ 2. $\frac{7}{3}$ 3. 8 4. 9

24. ในการจัดคน 6 คน ซึ่งมีนาย ก และนาย ข รวมอยู่ด้วย เข้าพักในห้อง 3 ห้อง โดยที่ห้องที่หนึ่งพักได้ 3 คน ห้องที่สองพักได้ 2 คน และห้องที่สามพักได้ 1 คน ความน่าจะเป็นที่นาย ก และนาย ข จะได้พักห้องเดียวกันเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{15}$ 2. $\frac{3}{15}$ 3. $\frac{4}{15}$ 4. $\frac{5}{15}$

25. กล่องใบหนึ่งมีบัตรอยู่ 5 ใบ หมายเลข $1,2,3,4,5$ หยิบบัตร 2 ใบโดยหยิบทีละใบแบบไม่คืนที่ ให้ x เป็นหมายเลขบัตรใบแรกที่หยิบได้ และ y เป็นหมายเลขบัตรใบที่สองที่หยิบได้ ความน่าจะเป็นที่จะได้ $x<y$ และ $4<xy<12$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{5}$ 2. $\frac{2}{5}$ 3. $\frac{3}{5}$ 4. $\frac{4}{5}$

26. ค่าแรงงานต่อวันของคนงานกลุ่มหนึ่งจำนวน 8 คน เป็น 150, 152, 158, 168, 170, 177, 180, 185 บาท ถ้าสุ่มเลือกคนงานจากกลุ่มนี้มา 2 คนแล้ว ความน่าจะเป็นที่จะได้คนงานอย่างน้อยหนึ่งคนที่มีค่าแรงงานต่อวันต่ำกว่าค่าแรงงานเฉลี่ยของคนงานกลุ่มนี้ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{14}$ 2. $\frac{5}{14}$ 3. $\frac{9}{14}$ 4. $\frac{11}{14}$

27. ถ้า $y = mx+c$ เป็นความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันเพื่อการทำนายรายจ่ายหมวดบริการลูกค้า (y) จากจำนวนพนักงานของโรงแรม (x) ในจังหวัดหนึ่ง และจำนวนข้อมูลทั้งหมดที่นำมาสร้างความสัมพันธ์เท่ากับ 5 โดยมีสมการปกติดังนี้

$28 = 5c+10m$ ___(1) และ $67 = 10c+30m$ ___(2)

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า $x = 5$ ค่าประมาณของ $y = 8.9$

ข. $\bar{x} = 5.6$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

28. กำหนดข้อมูลสองชุดดังนี้

ชุดที่หนึ่ง คือ 5, 8, 6, 7, 9 ชุดที่สอง คือ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

ถ้าสัมประสิทธิ์ของการแปรผันของข้อมูลชุดที่หนึ่งเป็น 2 เท่าของข้อมูลชุดที่สอง และความแปรปรวนของข้อมูลชุดที่สองเท่ากับ 9 แล้ว ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดที่สองเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $21\sqrt{2}$ 2. $42\sqrt{2}$ 3. 18 4. 16

<u>ตอนที่ 2</u> ข้อ 1 – 8 เป็นข้อสอบแบบอัตนัย ข้อละ 2 คะแนน

1. ถ้า $A = \{\varnothing, 0, 1, \{0,1\}\}$
และ $B = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{0, \{0,1\}\}, \{0, \{1\}\}\}$
แล้ว เซต $P(A) - B$ มีจำนวนสมาชิกเท่าใด

2. ให้ x, y, z เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่าเรียงติดกันจากน้อยไปมาก
ถ้า y เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยที่สุดที่ทำให้ $\sqrt[3]{x+y+z}$ เป็นจำนวนเต็มบวก
แล้ว y มีค่าเท่าใด

3. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ แล้ว
$\det(4(A^{-1})) + \det(4(A^{-1})^2) + \det(4(A^{-1})^3) + \ldots + \det(4(A^{-1})^6)$ มีค่าเท่าใด

4. กำหนดจุด $A(3,-2), B(9,4)$ และ $O(0,0)$ ถ้าแบ่งส่วนของเส้นตรง AB เป็น 3 ส่วน เท่าๆ กันที่จุด C และ D แล้ว $\overline{OC} \cdot \overline{OD}$ มีค่าเท่าใด

5. ให้ $f(x) = x^2 - c$ โดยที่ c เป็นค่าคงตัว ซึ่ง $c \geq 4$
ถ้าพื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ จาก $x = -2$ ถึง $x = 1$ เท่ากับ 24 ตารางหน่วย
แล้ว c มีค่าเท่าใด

6. จำนวนเลขสามหลักซึ่งหารด้วย 5 ลงตัว และตัวเลขหลักสิบแตกต่างจากตัวเลขหลักร้อย มีจำนวนทั้งหมดเท่าใด

7. อายุของคนงานกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงปกติโดยมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น $\bar{x}$ และความแปรปรวนเป็น s^2 สมหวังมีอายุ $\bar{x} - 0.51s$ ปี จำนวนคนในกลุ่มนี้ที่มีอายุน้อยกว่าสมหวังมีจำนวนเป็นร้อยละเท่าใด (พื้นที่ใต้โค้งปกติระหว่าง z=0 และ z=0.51 เท่ากับ 0.195)

8. ราคาและปริมาณสินค้า 3 ชนิดที่ร้านค้าแห่งหนึ่งจำหน่ายในปี พ.ศ. 2541 และ พ.ศ. 2542 เป็นดังตาราง

ชนิดสินค้า	ปริมาณ (หน่วย)		ราคาต่อหน่วย (บาท)	
	2541	2542	2541	2542
หม้อหุงข้าว	15	20	500	500
กระติกน้ำร้อน	10	8	300	450
พัดลม	80	100	400	x

ถ้าดัชนีราคาถ่วงน้ำหนักแบบใช้ราคารวมโดยวิธีของพาเช่อ ของปี พ.ศ. 2542 เมื่อใช้ปี พ.ศ. 2541 เป็นปีฐาน เท่ากับ 126 แล้ว ราคาของพัดลมในปี พ.ศ. 2542 เป็นเท่าใด (บาท)

เฉลย

ตอนที่ 1 (1) 4 (2) 4 (3) 3 (4) 3 (5) 1 (6) 4 (7) 2 (8) 2 (9) 1 (10) 1 (11) 3 (12) 2 (13) 4 (14) 4 (15) 3 (16) 1 (17) 4 (18) 2 (19) 1 (20) 2 (21) 4 (22) 2 (23) 2 (24) 3 (25) 1 (26) 3 (27) 2 (28) 1

ตอนที่ 2 (1) 13 (2) 9 (3) 15.75 (4) 35 (5) 9 (6) 162 (7) 30.5 (8) 525.24

โจทย์เอ็นทรานซ์ : มีนาคม 2544

<u>ตอนที่ 1</u> ข้อ 1 – 8 เป็นข้อสอบแบบอัตนัย ข้อละ 2 คะแนน

1. กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\log_4 \log_3 \log_2 (x^2+2x) \le 0$
จำนวนเต็มที่เป็นสมาชิกของ A มีทั้งหมดกี่จำนวน

2. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} x & -1 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ 4 & 2y & 9 \end{bmatrix}$ ถ้าไมเนอร์ของ a_{32} เท่ากับ 23 และโคแฟกเตอร์ของ a_{23}
เท่ากับ -44 แล้ว $x+y$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

3. กำหนดให้ a, b, c เป็น 3 พจน์เรียงติดกันในลำดับเรขาคณิต และมีผลคูณเป็น 27 ถ้า
a, b+3, c+2 เป็น 3 พจน์เรียงติดกันในลำดับเลขคณิตแล้ว $a+b+c$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

5. กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งทำให้พจน์ที่ไม่มี x ในการกระจาย $\left(x^2+\dfrac{1}{2x}\right)^n$
คือพจน์ที่ 9 สัมประสิทธิ์ของ x^{15} ในการกระจายนี้เท่ากับเท่าใด

6. ในการสร้างเมตริกซ์ในรูป $\begin{bmatrix} x^2 & x-4 \\ -x & x-1 \end{bmatrix}$ แบบสุ่ม โดยที่ $x \in \{0,1,2,3,4\}$
ความน่าจะเป็นที่จะได้เมตริกซ์เอกฐานเท่ากับเท่าใด

7. ถ้าเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = (x-1)^2(2x-\dfrac{5}{4})$ ที่จุด $(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{16})$ ทำมุม θ กับแกน x โดย
ที่ $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ แล้ว $\sin^2 \dfrac{\theta}{2}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

8. กำหนดให้ $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ มีค่าเป็น 5, 6, a, 7, 10, 15, 5, 10, 10, 9 ตามลำดับ
โดยที่ $a < 15$ ถ้า พิสัยของข้อมูลชุดนี้เท่ากับ 12
b เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i - b)^2$ มีค่าน้อยที่สุด
และ c เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $\sum\limits_{i=1}^{10}|x_i - c|$ มีค่าน้อยที่สุด แล้ว $a+b+c$ มีค่าเท่าใด

<u>ตอนที่ 2</u> ข้อ 1 – 28 เป็นข้อสอบแบบปรนัย ข้อละ 3 คะแนน

1. กำหนดให้ A, B, C เป็นเซต ถ้า $n(B) = 42$, $n(C) = 28$, $n(A \cap C) = 8$, $n(A \cap B \cap C) = 3$, $n(A \cap B \cap C') = 2$, $n(A \cap B' \cap C') = 20$ และ $n(A \cup B \cup C) = 80$ แล้ว $n(A' \cap B \cap C)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 5 2. 7 3. 10 4. 13

2. ให้ A, B และ F เป็นเซตซึ่งกำหนดดังนี้

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{ \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$

$F = \{f : B \to A \mid f(x) \notin x \text{ ทุกเซต } x \in B \}$

จำนวนสมาชิกของ F เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 24 2. 60 3. 100 4. 120

3. กำหนดให้ $x+1$ และ $x-1$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม $p(x) = 3x^3 + x^2 - ax + b$ เมื่อ a, b เป็นค่าคงตัว เศษเหลือที่ได้จากการหาร $p(x)$ ด้วย $x - a - b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 15 2. 17 3. 19 4. 21

4. กำหนดให้ $A = \{ x \mid |x-1| \le 2 \text{ และ } \frac{1}{|x+1|} > \frac{1}{2} \}$

และ $B = \{ x \mid x^2 + 2x < 0 \}$

$A \cap B$ คือช่วงในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-1, 0)$ 2. $[-1, 0)$ 3. $(0, 1)$ 4. $(0, 1]$

5. กำหนดให้ p, q, r เป็นประพจน์

ถ้าประพจน์ $p \to (q \wedge r)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ และ $(p \vee q) \leftrightarrow r$ มีค่าความจริงเป็นจริง แล้ว พิจารณาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

ก. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \sim r$ ข. $p \leftrightarrow (q \vee \sim r)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. จริง และ ข. จริง 2. ก. จริง และ ข. เท็จ
3. ก. เท็จ และ ข. จริง 4. ก. เท็จ และ ข. เท็จ

6. เอกภพสัมพัทธ์ในข้อใดที่ทำให้ข้อความ $(\forall x [x^2 \le 2x + 3]) \wedge (\exists y [y^2 - 4 > 0])$ มีค่าความจริงเป็นจริง

1. $[-3, 0]$ 2. $[-1.5, 1.5]$ 3. $[-1, 2]$ 4. $[-0.5, 2.5]$

7. กำหนดความสัมพันธ์ $r = \{(x,y) \mid |y| = \frac{1}{x^2-1}\}$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $D_r = (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$ ข. $r^{-1} = \{(x,y) \mid y = \pm\sqrt{\frac{1+x}{x}}\}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

8. กำหนดให้ $f(x) = \frac{x}{1+x}, x \neq -1$ และ $g(x) = \frac{x}{1-x}, x \neq 1$

ข้อใดต่อไปนี้ **ผิด**

1. $(fog)^{-1}(x) = x \quad , x \neq 1$
2. $(f^{-1}og^{-1})(x) = x \quad , x \neq -1$
3. $(f^{-1}og)(x) = \frac{x}{1+2x} \quad , x \neq 1$
4. $(g^{-1}of)(x) = \frac{x}{1+2x} \quad , x \neq -1$

9. กำหนดให้ $f(x) = 2\sin\frac{x}{2}$ และ $g(x) = \sqrt{x^2-1}$

เซต $(R_f \cap D_g) - R_{gof}$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\{-1, 1\}$
2. $\{-2, 2\}$
3. $[2,-\sqrt{3}] \cup [1,2]$
4. $[-2,-1] \cup (\sqrt{3},2]$

10. รูปสามเหลี่ยม ABC มี a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ตามลำดับ ถ้า $\cos B = 1/4$ และ $(a+b+c)(a-b+c) = 30$ แล้ว ac มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 12
2. 20
3. 20/3
4. 40/3

11. กำหนดให้ A และ B เป็นจุดโฟกัสของวงรี $x^2+2y^2+4x-4y+2=0$ และวงรีนี้ตัดแกน x ที่จุด C และ D โดยทำให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยม พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ข. พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD เท่ากับ $4\sqrt{2}$ ตารางหน่วย

ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

12. กำหนดให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,4)$ และมีความชันเท่ากับ 3/4 ถ้าเส้นตรง L สัมผัสวงกลม C ซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุด $(1,2)$ แล้ว จุดใดต่อไปนี้เป็นจุดบนวงกลม C

1. $(1,\frac{2}{5})$
2. $(1,\frac{16}{5})$
3. $(-\frac{13}{5},2)$
4. $(\frac{3}{5},2)$

13. เซตคำตอบของอสมการ $2^{x^2(x-3)} < 8^{(\frac{2}{3}-x)}$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(1,\infty)$ 2. $(-2,100)$ 3. $(-10,10)$ 4. $(-\infty,2)$

14. กำหนดให้ $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ โดยที่ $a_{ij}=\begin{cases}2^{i-1} & ,i=j\\ 2 & ,i\neq j\end{cases}$

$\det\left(4\dfrac{\text{adj}(A^t)}{\det(A)}\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -16 2. -4 3. 4 4. 16

15. กำหนดให้ $P=ax+2y$ และมีเงื่อนไขข้อจำกัดดังนี้ $2x+y\le 50,\ x+2y\le 70,$ $x\ge 0,\ y\ge 0$ ถ้าค่าสูงสุดของ P เท่ากับ 100 แล้ว a เท่ากับค่าในข้อใดต่อไปนี้

1. 1 2. 2 3. 4 4. 6

16. ให้ $\bar{u}=a\bar{i}+b\bar{j}$ โดยที่ $a>0$ และ $b>0$ และ $\bar{u}\cdot(5\bar{i}-2\bar{j})=14$ ถ้า $\bar{u}$ ทำมุม θ กับเวกเตอร์ $\bar{i}$ และ $\cos\theta=3/5$ แล้ว $a+b$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 7 2. 14 3. 18 4. 21

17. ให้ A, B, C เป็นจุดในระนาบ และ O เป็นจุดกำเนิด โดยที่ $\overrightarrow{OA}=3\bar{i}-2\bar{j}$ และ $\overrightarrow{OB}=2\bar{i}+5\bar{j}$ ถ้า $\overrightarrow{AC}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ แล้ว $\left|\overrightarrow{OC}\right|^2$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\dfrac{113}{9}$ 2. $\dfrac{98}{9}$ 3. $\dfrac{193}{9}$ 4. $\dfrac{153}{9}$

18. ถ้า $2z^3=1+\sqrt{3}i$ และ $\dfrac{z^{18}}{i-z^{27}}=a+bi$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงแล้ว $a+b$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1 2. 0 3. 1 4. 2

19. กำหนดให้ $z=i^9+i^{10}+\ldots+i^{126}$ เมื่อ $i^2=-1$ แล้ว $2z^{-1}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $1+i$ 2. $1-i$ 3. $-1+i$ 4. $-1-i$

20. กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่ทำให้ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต $7+15+23+\ldots$ มีค่าเท่ากับ 217 แล้ว $\dfrac{2^n+2^{n+1}+\ldots+2^{2n}}{2^8}$ มีค่าข้อใดต่อไปนี้

1. 127 2. 128 3. 127.5 4. 128.5

21. กำหนดให้ $f(x)=ax^3+bx$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง และ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ -2 ที่จุด $x=1$ ถ้า $g(x)=x^3+f'(x)$ แล้ว g เป็นฟังก์ชันลดในช่วงใดต่อไปนี้

1. $(0,2)$ 2. $(-3,-1)$ 3. $(-1,1)$ 4. $(-2,0)$

22. กำหนดให้ $f(x)=ax^3+bx^2+2x-2$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง ถ้า $f'(1)=5$ และ $f''(0)=-12$ แล้ว $\int(f'(x)+f''(x))\,dx$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $5x^3+9x^2-10x+c$ 2. $5x^3+9x^2+10x+c$
3. $5x^3-9x^2+10x+c$ 4. $5x^3-9x^2-10x+c$

23. ให้ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งอนุพันธ์ของ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[0,1]$ และ $g(x)=\frac{f(x)}{x^4+1}$ ถ้า $f(1)=f'(1)=1$ และ $f(0)=f'(0)=-2$ แล้ว $\int_0^1 g''(x)\,dx$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{5}{2}$ 2. $-\frac{1}{2}$ 3. $\frac{3}{2}$ 4. $\frac{7}{2}$

24. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. จำนวนวิธีในการจัดเด็ก 5 คน และผู้ใหญ่ 5 คน ถ่ายรูปหมู่ โดยให้เด็กยืนแถวหน้าและผู้ใหญ่ยืนแถวหลัง เท่ากับ $5!\,5!$

ข. จำนวนวิธีในการจัดชาย 6 คน หญิง 6 คน นั่งโต๊ะกลม 2 โต๊ะที่ต่างกัน ซึ่งมีโต๊ะละ 6 ที่นั่ง โดยที่ชายและหญิงนั่งแยกโต๊ะกัน เท่ากับ $5!\,5!$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

25. ความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนหนึ่งสอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์เท่ากับ $2/5$ และสอบผ่านวิชาภาษาอังกฤษเท่ากับ $1/3$ ถ้าความน่าจะเป็นในการสอบผ่านอย่างมากหนึ่งวิชา เท่ากับ $13/15$ แล้ว ความน่าจะเป็นที่เขาจะสอบผ่านอย่างน้อยหนึ่งวิชาเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{7}{15}$ 2. $\frac{4}{15}$ 3. $\frac{3}{5}$ 4. $\frac{1}{5}$

26. ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่ง ปรากฏว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน เป็น 55 และ 10 ตามลำดับ โดยที่นาย ก ได้คะแนนคิดเป็นค่ามาตรฐานเท่ากับ 1.3 และเมื่อรวมคะแนนเก็บระหว่างภาคการศึกษา ซึ่งนักเรียนทุกคนได้คนละ 5 คะแนนแล้ว นาย ข ได้คะแนนรวมน้อยกว่าคะแนนรวมของนาย ก 8 คะแนน ข้อใดต่อไปนี้เป็นคะแนนรวม และค่ามาตรฐานของคะแนนรวมของนาย ข ตามลำดับ

1. $60,\ 0.5$
2. $60,\ 1$
3. $65,\ 0.5$
4. $65,\ 1$

27. กำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้โค้งปกติดังนี้

z	0.97	1.58
A	0.334	0.443

คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่งมีการแจกแจงปกติ นายคณิตและนายวิทยาเป็นนักเรียนห้องนี้ ถ้าปรากฏว่ามีนักเรียน 5.7 เปอร์เซ็นต์ที่สอบได้คะแนนมากกว่านายคณิต และมีนักเรียน 16.6 เปอร์เซ็นต์ที่สอบได้คะแนนน้อยกว่านายวิทยา และนายคณิตได้คะแนนมากกว่านายวิทยาอยู่ 51 คะแนน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของการสอบครั้งนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 12 2. 15 3. 18 4. 20

28. ถ้าราคาเฉลี่ยของเมล็ดถั่วเหลืองต่อกิโลกรัม ในแต่ละเดือนของปี พ.ศ. 2542 ที่จังหวัดหนึ่งเป็นดังนี้

เดือน มกราคม ราคา 13 บาท

เดือน กุมภาพันธ์ ราคา 11 บาท

เดือน มีนาคม ราคา 12 บาท

แล้ว พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ดัชนีราคาเมล็ดถั่วเหลืองของเดือนกุมภาพันธ์ เทียบกับของเดือนมกราคม เท่ากับ 84.62 เปอร์เซ็นต์

ข. ดัชนีราคาเมล็ดถั่วเหลืองของเดือนมีนาคม เทียบกับของเดือนกุมภาพันธ์ เพิ่มขึ้น 10.09 เปอร์เซ็นต์

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

<u>เฉลย</u>

ตอนที่ 1 (1) 4 (2) 9 (3) 13 (4) 0.5 (5) 27.5 (6) 0.4 (7) 0.1 (8) 19

ตอนที่ 2 (1) 2 (2) 4 (3) 4 (4) 1 (5) 2 (6) 4 (7) 2 (8) 3 (9) 4 (10) 1 (11) 2 (12) 1 (13) 4 (14) 1 (15) 3 (16) 2 (17) 1 (18) 2 (19) 4 (20) 3 (21) 4 (22) 1 (23) 3 (24) 2 (25) 3 (26) 3 (27) 4 (28) 2

โจทย์เอ็นทรานซ์ : ตุลาคม 2544

<u>ตอนที่ 1</u> ข้อ 1 – 8 เป็นข้อสอบแบบอัตนัย ข้อละ 2 คะแนน

1. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $S = \{ f : A \to A \mid f(x) \le x+1 \text{ ทุก } x \in A \}$ จำนวนฟังก์ชันทั้งหมดที่เป็นสมาชิกของ S เท่ากับเท่าใด

2. ให้ช่วงเปิด (a, b) เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\log(3x+4) > \log(x-1) + 1$ แล้ว $a+b$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

3. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & a \end{bmatrix}$ และ $C_{11}(A) = 2$ แล้ว $\det(-3A^{-1})$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

4. ให้ $z = -1 - \sqrt{3}\,i$ แล้ว $z^6 + \overline{z}^6$ เท่ากับเท่าใด

5. ถ้า c เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3cn^3 - n^2 + cn}{(2n+1)^3} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-2)^{n-1}}{3^{n-2}}$ แล้ว c มีค่าเท่าใด

6. ถ้าเส้นตรง $x = a$ แบ่งครึ่งพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \sqrt{2x}$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 8$ แล้ว a^3 มีค่าเท่าใด

7. กำหนดความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A, B และ $A \cap B$ ดังนี้ $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$ และ $P(A \cap B) = 0.1$ แล้ว $P(A' \cup B')$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

8. ร้านค้าแห่งหนึ่งขายพัดลม 3 ขนาด ในการหาดัชนีราคาพัดลมทั้ง 3 ขนาด ถ้าดัชนีราคาอย่างง่ายแบบใช้ราคารวมของ พ.ศ. 2543 โดยใช้ พ.ศ. 2542 และ พ.ศ. 2541 เป็นปีฐาน เท่ากับ 80 และ 120 ตามลำดับแล้ว ราคาเฉลี่ยของพัดลมทั้ง 3 ขนาด ใน พ.ศ. 2542 เมื่อหาโดยใช้ดัชนีราคาอย่างง่ายแบบใช้ราคารวม เพิ่มขึ้นจากราคาเฉลี่ยของพัดลมทั้ง 3 ขนาดในพ.ศ. 2541 ร้อยละเท่าใด

<u>ตอนที่ 2</u> ข้อ 1 – 28 เป็นข้อสอบแบบปรนัย ข้อละ 3 คะแนน

1. ให้ A, B, C เป็นเซตที่มีสมาชิก เซตละ 2 ตัว และ $a \in A, b \in B, c \in C$ โดยที่ $A \cup B \cup C = \{a, b, c, d\}$ ถ้า $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \varnothing$ แล้ว พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $d \in A$ ข. $B = C$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

2. ถ้า $-2 \le x \le 2$ และ $8 \le y \le 13$ แล้ว ค่ามากที่สุดของ $\frac{(1/2)^x + 1}{y + 2}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1
2. $1/2$
3. $1/3$
4. $1/8$

3. กำหนดให้ $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริง ถ้า $x - 1$ และ $x + 3$ ต่างก็หาร $P(x)$ แล้วเหลือเศษ 5 ดังนั้น $a + 2b$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -11
2. -1
3. 1
4. 9

4. พิจารณาข้อความต่อไปนี้ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์คือเซตของจำนวนจริง

ก. $\exists x [\cot 2x - \cot x = 0]$ ข. $\forall x [\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x]$

ค่าความจริงของข้อความ ก. และข้อความ ข. เป็นไปตามข้อใดต่อไปนี้

1. ก. เป็นจริง และ ข. เป็นจริง
2. ก. เป็นจริง และ ข. เป็นเท็จ
3. ก. เป็นเท็จ และ ข. เป็นจริง
4. ก. เป็นเท็จ และ ข. เป็นเท็จ

5. กำหนดให้ p, q, r เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็น จริง เท็จ และเท็จ ตามลำดับ ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเหมือนกับประพจน์ $(p \to \sim q) \vee (r \wedge \sim p)$

1. $(\sim r \to p) \wedge (q \vee r)$
2. $(q \wedge \sim r) \leftrightarrow (\sim p \to \sim q)$
3. $(\sim p \vee r) \to (q \wedge \sim r)$
4. $(p \to q) \vee (\sim r \leftrightarrow q)$

6. ถ้า $r = \{(x, y) \in R \times R \mid 2x^3 + 3xy^2 - x^2 + y^2 = 0\}$ แล้ว เรนจ์ของ r^{-1} เท่ากับข้อใด

1. $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$
2. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$
3. $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (-\frac{1}{3}, \infty)$
4. $(-\infty, \infty)$

7. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ และ $g(x) = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$ จำนวนในข้อใดต่อไปนี้เป็นสมาชิกของ R_{gof}

1. $\frac{1}{\sqrt{2}}$
2. $\frac{1}{\sqrt{4}}$
3. $\frac{1}{\sqrt{8}}$
4. $\frac{1}{\sqrt{14}}$

8. กำหนดให้ $f(x+1) = 3x+2+f(x)$ และ $g(3x-1) = 2x+8$ ถ้า $f(0) = 1$ แล้ว $g^{-1}(f(2))$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1 2. 0 3. 1 4. 2

9. ถ้า $\sin 15^\circ + \sin 55^\circ = x$ และ $\cos 15^\circ + \cos 55^\circ = y$ แล้ว $(x+y)^2 - 2xy$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $4\cos^2 20^\circ$ 2. $2\cos^2 20^\circ$ 3. $4\cos^2 40^\circ$ 4. $2\cos^2 40^\circ$

10. ถ้า $0 < x < \frac{\pi}{4}$ แล้ว

เซตคำตอบของ $\log_{0.5}(\sin x) + \log_{0.5}(\sin 2x) < \log_{0.5}(\cos x) + \log_{0.5}(\cos 2x)$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\varnothing$ 2. $(0, \frac{\pi}{6})$ 3. $(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6})$ 4. $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$

11. ให้ C เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงรี $x^2 + 2y^2 + 4x - 4y + 2 = 0$ และผ่านจุดโฟกัสทั้งสองของวงรีนี้ ถ้าวงกลม C ตัดเส้นตรง $y = -x$ ที่จุด A และ B แล้ว ระยะ AB ยาวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\sqrt{3}$ หน่วย 2. $\sqrt{5}$ หน่วย 3. $\sqrt{6}$ หน่วย 4. $\sqrt{8}$ หน่วย

12. กำหนดให้ P เป็นพาราโบลา $y^2 - 2y - 8x - 7 = 0$ ซึ่งมี L เป็นเส้นไดเรกตริกซ์ สมการวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดโฟกัสของ P และมี L เป็นเส้นสัมผัส คือข้อใดต่อไปนี้

1. $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14 = 0$ 2. $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$
3. $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$ 4. $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 14 = 0$

13. เซตคำตอบของสมการ $4 \cdot 3^{2x} + 9 \cdot 2^{2x} = 13 \cdot 6^x$ เป็นเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $[-1, 0]$ 2. $[-3, 1]$ 3. $[-2, 2]$ 4. $[1, 3]$

14. ให้ $f(x) = \det\left(\begin{bmatrix} x^2 & -x & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ x & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$ ถ้าช่วง $[a, b]$ เป็นเซตคำตอบของอสมการ $f(x) \geq -2$ แล้ว $|a-b|$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{2}{3}$ 3. $\frac{4}{3}$ 4. $\frac{5}{3}$

15. ค่าของ x, y ที่ทำให้ $P = 2x + 3y$ มีค่าสูงสุดตามเงื่อนไขข้อจำกัดที่กำหนดให้ต่อไปนี้ $x + y \geq 4$, $3x + 2y \leq 10$, $2x - y \leq 1$, $x \geq 0$ และ $y \geq 0$ สอดคล้องกับข้อใดต่อไปนี้

1. $x + y = 5$ 2. $x + y = 4$ 3. $x + y = \frac{39}{8}$ 4. $x + y = \frac{33}{8}$

16. กำหนดให้ $|\bar{u}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $|\bar{u} + \bar{v}| = 5$, $|\bar{u} - \bar{v}| = 4$ ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ แล้ว θ อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. $(0, \frac{\pi}{6})$ 2. $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$ 3. $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ 4. $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$

17. กำหนดจุด $A(1,1), B(4,10), C(7,9)$ และ D เป็นจุดที่อยู่บนด้าน AB โดยที่ $\frac{|\overline{AD}|}{|\overline{AB}|} = \frac{2}{3}$ ถ้า θ คือมุมระหว่าง $\overrightarrow{CA}$ และ $\overrightarrow{DC}$ แล้ว $\cos\theta$ คือค่าในข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{-2}{\sqrt{5}}$ 2. $\frac{-2}{\sqrt{10}}$ 3. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ 4. $\frac{2}{\sqrt{10}}$

18. ถ้า $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{39}}{4}i$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ $ax^2 - 3x + c = 0$ โดยที่ a และ c เป็นจำนวนจริงแล้ว เศษที่เหลือจากการหาร $ax^2 - 3x + c$ ด้วย $x + 2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 8 2. 12 3. 16 4. 20

19. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & , x \neq 1 \\ 2 & , x = 1 \end{cases}$ และ $g(x) = x^3 + x - 2$

ถ้า $h(x) = f(x)g(x)$ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. h ต่อเนื่องที่จุด $x = 1$ และ $\lim_{x\to 1} h(x) = 0$
2. h ต่อเนื่องที่จุด $x = 1$ และ $\lim_{x\to 1} h(x) = 4$
3. h ไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = 1$ และ $\lim_{x\to 1} h(x) = 0$
4. h ไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = 1$ และ $\lim_{x\to 1} h(x) = 4$

20. กำหนดให้ g เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์ทุกจุด $x > 0$ และ $g'(3) = 3$ จำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ $g(x^n + 2x) = 4x^3 + 6x^2 + 31$ คือจำนวนในข้อใดต่อไปนี้

1. 5 2. 6 3. 7 4. 8

21. ให้ f เป็นฟังก์ชันพหุนามกำลังสาม ซึ่งมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับสามเท่าของค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ และ $f(0) = 2$ ถ้า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -1$ และมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 1$ แล้ว $f(4)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -28 2. -24 3. 24 4. 28

22. กำหนดให้เส้นโค้ง $y = f(x)$ ผ่านจุด $(1,0)$ และมีความชันที่จุด (x,y) ใดๆ เป็น $3x^2 - 4x + \frac{2}{x^2}$ ถ้า (a,b) เป็นจุดตัดระหว่างเส้นโค้งนี้กับเส้นตรง $x - 2 = 0$ แล้ว $a + b$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{2}$ 2. 2 3. $\frac{7}{2}$ 4. 4

23. คนกลุ่มหนึ่งเป็นชายและหญิงจำนวนเท่ากัน โดยที่อัตราส่วนของจำนวนวิธีที่ชายและหญิงยืนสลับที่กันเป็นแถวตรง กับจำนวนวิธีที่ชายและหญิงยืนสลับที่กันเป็นวงกลม เท่ากับ $10:1$ จำนวนวิธีที่จะเลือกตัวแทน 2 คนจากคนกลุ่มนี้ โดยมีชายอย่างน้อย 1 คน เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 30 2. 35 3. 40 4. 45

24. ห้างสรรพสินค้าแห่งหนึ่งจัดรายการสมนาคุณแก่ลูกค้า โดยจะให้ลูกค้าทุกคนสุ่มหยิบคูปองส่วนลดได้ 2 ใบ จากกล่องซึ่งมีคูปองทั้งหมด 12 ใบ ซึ่งมีคูปองมูลค่า 50 บาท 5 ใบ คูปองมูลค่า 100 บาท 3 ใบ คูปองมูลค่า 200 บาท 3 ใบ และคูปองมูลค่า 500 บาท 1 ใบ ความน่าจะเป็นที่ลูกค้าคนที่หนึ่งจะสุ่มหยิบคูปอง 2 ใบ และได้คูปองที่มีมูลค่าส่วนลดรวมมากกว่า 300 บาท มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{11}{66}$ 2. $\frac{14}{66}$ 3. $\frac{20}{66}$ 4. $\frac{23}{66}$

25. นักเรียนอนุบาล 4 คน มีอายุเป็น x_1, x_2, x_3, x_4 ปี โดยมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของอายุเป็น 5.5 ปี และ $\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 141$ ถ้ามีนักเรียนที่อายุ 3 ปี มาเพิ่มอีก 1 คน แล้ว สัมประสิทธิ์ของการแปรผันของอายุของนักเรียนทั้ง 5 คนนี้ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 2. 1 3. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 4. 5

26. ถ้าตารางแจกแจงความถี่ของข้อมูลชุดหนึ่ง ซึ่งมีความกว้างของแต่ละอันตรภาคชั้นเท่ากันเป็นดังต่อไปนี้

ชั้นที่	จุดกึ่งกลางของอันตรภาคชั้น	ความถี่สะสม
1	...	8
2	...	16
3	...	36
4	25	40
5	30	50

ให้ $\bar{x}$ เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิต และ med เป็นมัธยฐานของข้อมูล ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $\bar{x} = 19$ และ $med = 19.75$ 2. $\bar{x} = 19$ และ $med = 17.5$
3. $\bar{x} = 20$ และ $med = 19.75$ 4. $\bar{x} = 20$ และ $med = 17.5$

27. ถ้าจากการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนชั่วโมงต่อสัปดาห์ที่ใช้ในการทบทวนวิชาต่างๆ (แทนด้วย X) และผลการเรียนเฉลี่ย หรือ GPA (แทนด้วย Y) ได้สมการที่ใช้ประมาณผลการเรียนเฉลี่ย จากจำนวนชั่วโมงต่อสัปดาห์ที่ใช้ในการทบทวนวิชาต่างๆ เป็นสมการเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ 0.02 และระยะตัดแกน Y เท่ากับ 2.7

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้าจำนวนชั่วโมงที่ใช้ในการทบทวนวิชาต่างๆ เพิ่มขึ้น 10 ชั่วโมงต่อสัปดาห์ ผลการเรียนเฉลี่ยเพิ่มขึ้น 0.2

ข. ถ้าผลการเรียนเฉลี่ยเท่ากับ 3 ทำนายว่าจำนวนชั่วโมงที่ใช้ในการทบทวนวิชาต่างๆ เท่ากับ 15 ชั่วโมงต่อสัปดาห์

ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. ก. ถูก และ ข. ถูก 2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก 4. ก. ผิด และ ข. ผิด

28. พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง $z = -1.2$ ถึง $z = 0$ เท่ากับ 0.3849 คะแนนสอบของนักเรียนกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงแบบปกติโดยมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 50 คะแนน และ 10 คะแนน ตามลำดับ ถ้านายคำนวณสอบได้ในตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์เท่ากับ 88.49 แล้ว นายคำนวณสอบได้คะแนนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 58 คะแนน 2. 60 คะแนน 3. 62 คะแนน 4. 65 คะแนน

เฉลย

ตอนที่ 1 (1) 96 (2) 3 (3) 1.8 (4) 128 (5) 4.8 (6) 128 (7) 0.9 (8) 50

ตอนที่ 2 (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 3 (5) 3 (6) 1 (7) 3 (8) 1 (9) 1 (10) 4 (11) 3 (12) 4 (13) 3 (14) 4 (15) 1 (16) 2 (17) 1 (18) 4 (19) 4 (20) 2 (21) 4 (22) 4 (23) 2 (24) 2 (25) 1 (26) 3 (27) 2 (28) 3

โจทย์เอ็นทรานซ์ : มีนาคม 2545

<u>ตอนที่ 1</u> ข้อ 1 – 8 เป็นข้อสอบแบบอัตนัย ข้อละ 2 คะแนน

1. กำหนดให้ $S = \{ n \in I^+ \mid n \le 1000$ และ ห.ร.ม.ของ n และ 100 เท่ากับ $1 \}$ จำนวนสมาชิกของเซต S เท่ากับเท่าใด

2. $-\sin^2 1° + \sin^2 2° - \sin^2 3° + \ldots - \sin^2 89° + \sin^2 90°$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

3. x ที่สอดคล้องกับสมการ $\frac{\log 2x}{\log 3} + \log_3(x-12) = \log_{\sqrt{3}}[\sqrt{x}\ (\sqrt{x+5} - \sqrt{x-5})]$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

4. กำหนดให้ $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{10}\right)^{k-1}$ และ $S = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^{k-1}$ จำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ $S - S_n = \frac{1}{9}(10^{-5})$ เท่ากับเท่าใด

5. ถ้า a คือจำนวนจริงที่ทำให้พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยโค้ง $y = a^2x^2 + 4ax + 10$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 1$ มีค่าน้อยที่สุด แล้วพื้นที่ที่ได้เท่ากับเท่าใด

6. กล่องใบหนึ่งบรรจุสลากสีแดงซึ่งเขียนหมายเลข 1, 2, 3 ไว้สลากละหนึ่งหมายเลข รวมกับสลากสีเขียวซึ่งเขียนหมายเลข 1, 2, 3 ไว้สลากละหนึ่งหมายเลขเช่นเดียวกัน ถ้าจับสลากสองใบจากกล่องโดยจับทีละใบแบบไม่ใส่กลับคืน ความน่าจะเป็นที่จะได้สลากสีเหมือนกัน หรือหมายเลขเดียวกัน เท่ากับเท่าใด

7. จากข้อมูลความสูงของพ่อ และลูก (ซึ่งมีอายุ 10 ปี) กลุ่มหนึ่ง ปรากฏความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันเป็น $y = 0.9x + 54.8$ เมื่อ y แทนความสูงของพ่อ และ x แทนความสูงของลูก ปรากฏว่าความสูงเฉลี่ยของเด็กในกลุ่มนี้เท่ากับ 120 เซนติเมตร ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของความสูงของเด็กเท่ากับ 8 เซนติเมตร ถ้าเด็กคนหนึ่งในกลุ่มนี้มีค่ามาตรฐานของความสูงเท่ากับ -1.8 แล้ว เราประมาณความสูงของพ่อได้เท่ากับกี่เซนติเมตร

8. ตัวแทนจำหน่ายกระติกน้ำร้อนยี่ห้อหนึ่ง ขายกระติกน้ำร้อน 3 ขนาด ในปี 2543 และ 2544 ด้วยราคาดังต่อไปนี้

ขนาดของกระติกน้ำร้อน	ราคา (บาท)		ราคาสัมพัทธ์
	2543	2544	
เล็ก	600	660	1.10
กลาง	800	1,000	1.25
ใหญ่	1,000	a	b

ถ้าดัชนีราคาอย่างง่ายแบบใช้ราคารวมของ พ.ศ. 2544 เมื่อเทียบกับ พ.ศ. 2543 เท่ากับ 120 แล้ว ราคาเฉลี่ยของกระติกน้ำร้อนทั้ง 3 ขนาดใน พ.ศ. 2544 เมื่อหาโดยใช้ดัชนีราคาอย่างง่ายแบบใช้ค่าเฉลี่ยราคาสัมพัทธ์ เพิ่มขึ้นจากราคาเฉลี่ยของกระติกน้ำร้อนทั้ง 3 ขนาดนี้ใน พ.ศ. 2543 ร้อยละเท่าใด

<u>ตอนที่ 2</u> ข้อ 1 – 28 เป็นข้อสอบแบบปรนัย ข้อละ 3 คะแนน

1. กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์คือเซต $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ และ A, B, C เป็นเซตซึ่งมีเงื่อนไขว่า $n(A) = n(B) = n(C) = 3$ และ $n(A \cap B) = n(B \cap C) = n(A \cap C) = 2$ ถ้า $A \cup B \cup C = U$ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้ **ผิด**

1. $n(A \cup B) = 4$
2. $n(A \cup (B \cap C)) = 3$
3. $n(A \cap (B \cup C)) = 2$
4. $n(A \cap B \cap C) = 1$

2. กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $12 + x - x^2 < 0$ และ B เป็นเซตคำตอบของอสมการ $|3 - |x|| < 1$ เซต $A \cap B$ เป็นสับเซตของช่วงใดต่อไปนี้

1. $(-5, -3)$
2. $(-3, -1)$
3. $(1, 3)$
4. $(3, 5)$

3. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้าเอกภพสัมพัทธ์คือเซต $U = (0, 1) \cup (2, \infty)$ แล้ว ประพจน์ $\forall x [(x - \frac{1}{2})^2 < \frac{1}{4}$ หรือ $(x-1)^2 > 1]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ข. ถ้า p, q, r เป็นประพจน์ แล้ว $p \to (q \wedge r)$ สมมูลกับ $(p \to q) \vee (p \to r)$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

4. ให้ p, q, r, s เป็นประพจน์ ถ้า $[p \to (q \to r)] \leftrightarrow (s \wedge r)$ มีค่าความจริงเป็นจริง และ $\sim p \vee s$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $p \to q$ มีค่าความจริงเป็นจริง
2. $q \to r$ มีค่าความจริงเป็นจริง
3. $r \to s$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ
4. $s \to p$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

5. กำหนดให้ $r_1 = \{(x, y) \mid e^{x+y} \le 1\}$ และ $r_2 = \{(x, y) \mid \ln(x-3y+5) \ge 0\}$ พื้นที่ของบริเวณที่เป็นกราฟของ $r_1 \cap r_2$ ซึ่งอยู่เหนือแกน x เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1.5 ตารางหน่วย
2. 2 ตารางหน่วย
3. 2.5 ตารางหน่วย
4. 3 ตารางหน่วย

6. กำหนดให้ I เป็นเซตของจำนวนเต็ม และให้ f, g เป็นฟังก์ชันจาก I ไป I ซึ่งกำหนดโดย $f(x) = 2x$ และ $g(x) = \begin{cases} x/2 & , x \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ x & , x \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$ แล้ว $gof - f$ เป็นฟังก์ชันจาก I ไป I ที่มีสมบัติตามข้อใดต่อไปนี้

1. หนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง
2. หนึ่งต่อหนึ่งแต่ไม่ทั่วถึง
3. ทั่วถึงแต่ไม่หนึ่งต่อหนึ่ง
4. ไม่หนึ่งต่อหนึ่งและไม่ทั่วถึง

7. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{5-g(x)}$ โดยที่ $g(x) = \sqrt{5+2x}$
ถ้า $D_{fog} = [a,b]$ แล้ว $4(a+b)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 15 2. 20 3. 25 4. 30

8. กำหนดให้ f, g เป็นฟังก์ชันที่มีสมบัติว่า $f^{-1}(g(x)) = x+2$ ทุก $x \in R$
พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $f(2x) = g(2(x-1))$ ทุก $x \in R$ ข. $g^{-1}(f(x))$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มใน R
ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

9. กำหนดให้ $0 \le \theta \le 2\pi$
เซตคำตอบของอสมการ $\frac{\cos^2\theta - \cos\theta}{\sin\theta - 1/2} < 0$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(0, \frac{\pi}{3})$
2. $(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6})$
3. $(0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{5\pi}{6}, \pi)$
4. $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2})$

10. วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลาง (h, k) อยู่บนเส้นตรง $2x+3y=6$ โดยที่ h, k เป็นจำนวนเต็ม ถ้าวงกลมวงนี้มีเส้นตรง $2x-y=1$ และเส้นตรง $2x+y=-3$ เป็นเส้นสัมผัสแล้ว ความยาวรัศมีของวงกลมนี้อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. $[2,4]$ 2. $[4,5]$ 3. $[5,6]$ 4. $[6,7]$

11. กำหนดให้ F_1 และ F_1 เป็นจุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลา $x^2+6x-y^2-14y-41=0$ ถ้า $P_1(0,y_1)$ และ $P_2(0,y_2)$ เป็นจุดสองจุดที่ทำให้พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม $P_1F_1F_2$ และพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม $P_2F_1F_2$ ต่างก็เท่ากับ $2\sqrt{2}$ ตารางหน่วยแล้ว $|y_1^2 - y_2^2|$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 28 2. 56 3. 84 4. 120

12. กำหนดให้ $a>0$ เป็นคำตอบของสมการ $4^a - 9\cdot 2^{a-1} + 2 = 0$
เซตคำตอบของอสมการ $2\log_a(x+2) - \log_a(x-1) < 4$ เป็นสับเซตของช่วงใดต่อไปนี้

1. $(-3,3)$ 2. $(-2,7)$ 3. $(0,8)$ 4. $(1,10)$

13. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} (\tan 30°)^x & -1 \\ (\cot 60°)^x & 2 \end{bmatrix}$ และ $\det(A) = 9$
A^{-1} คือเมตริกซ์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} 2/9 & -1/3 \\ 1/9 & 1/3 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 2/9 & 1/3 \\ -1/9 & 1/3 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/9 & 2/9 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 2/9 & 1/9 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

14. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า $x \in R$ และ $\det\left(\begin{bmatrix} x & x & x \\ 1 & x & x \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}\right) = -4$ แล้ว $|x| \leq 2$

ข. กำหนดให้ $a, b \in R$ และ $A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 2b & 3 \end{bmatrix}$ ถ้า $A = b\,\text{adj}\,A$ แล้ว $|a+b| \geq 2$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

15. น้ำมันดีเซล 100 ลิตร ราคาต้นทุนลิตรละ 12 บาท และน้ำมันปาล์ม 120 ลิตร ราคาต้นทุนลิตรละ 8 บาท ถ้าจะผสมน้ำมันสองชนิดนี้รวมกันให้มีจำนวนไม่น้อยกว่า 150 ลิตร และขายน้ำมันผสมนี้ในราคาลิตรละ 11 บาท ให้ได้กำไรมากที่สุดแล้ว กำไรที่ได้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 230 บาท
2. 260 บาท
3. 330 บาท
4. 460 บาท

16. กำหนดจุด $P(-1,2)$, $R(3,3)$, $O(0,0)$ และ Q เป็นจุดบนส่วนของเส้นตรง $\overline{PR}$ โดยที่ $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{3}|\overrightarrow{PR}|$ ถ้า $A(x,y)$ เป็นจุดในควอดรันต์ที่ 2 ที่ทำให้ $\overline{OA}$ ตั้งฉากกับ $\overline{OQ}$ และ $|\overline{OA}| = 5$ หน่วยแล้ว $x+y$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{-6}{\sqrt{10}}$
2. $\frac{-6}{\sqrt{2}}$
3. $\frac{6}{\sqrt{10}}$
4. $\frac{6}{\sqrt{2}}$

17. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีสมบัติว่า $5|\overline{AB}| = |\overline{BC}| + |\overline{CA}|$ ถ้า M และ N เป็นจุดแบ่งครึ่งด้าน BC และ AC ตามลำดับแล้ว พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{BC} - \overline{AC})$

ข. $\overline{AM} \cdot \overline{BN} = 0$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

18. กำหนดให้ $\omega = \cos\theta + i\cos\theta$ เมื่อ $\cos\theta < 0$ และ $2\cos^2\theta = 1$

ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนมีสมบัติว่า $|\omega z| = 2$ และอาร์กิวเมนต์ของ $\frac{z}{\omega}$ เท่ากับ $\frac{\pi}{4}$ แล้ว z^2+z+1 มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-3+2i$
2. $-3-2i$
3. $3+2i$
4. $3-2i$

19. กำหนดให้ จำนวนเชิงซ้อน z_1, z_2, z_3 เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปหนึ่ง ถ้า $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$, $z_1z_2 = 1+i$, $z_2z_3 = 2+2i$, $z_3z_1 = 3+4i$ แล้ว พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ ข. $z_1^2+z_2^2+z_3^2 = 6+7i$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

20. ให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)a}{\sqrt{x}-2} & , x > 4 \\ 1 & , x = 4 \\ x^2-b & , x < 4 \end{cases}$ โดยที่ a, b เป็นจำนวนจริง

ถ้า f ต่อเนื่องที่จุด $x = 4$ แล้ว $f\left(a+\frac{b}{16}\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -16
2. -14
3. 14
4. 16

21. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{3x+1}$ ถ้า g เป็นฟังก์ชันซึ่ง $(fog)(x) = x^2+1$ ทุก $x \in R$ แล้ว $f'(1) + g'(1)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{41}{12}$
2. $\frac{35}{12}$
3. $\frac{33}{4}$
4. $\frac{39}{4}$

22. กำหนดให้ $g(x) = x^2 f(x)$ ถ้า $f'(x) = 2x+3$ และ $g''(1) = 0$ แล้ว $f(4)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0
2. 11
3. 13
4. 28

23. กำหนดให้กราฟของ $y = f(x)$ เป็นเส้นโค้งที่อยู่เหนือแกน x และมีความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใดๆ เท่ากับ $6x+2b$ เมื่อ b เป็นจำนวนจริง ถ้าพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งนี้จาก $x = 0$ ถึง $x = 2$ เท่ากับสองเท่าของพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งนี้จาก $x = 0$ ถึง $x = 1$ แล้ว f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุด x ในข้อใดต่อไปนี้

1. $x = 2$
2. $x = 1$
3. $x = 0$
4. $x = -1$

24. ในการใส่จดหมาย 5 ฉบับที่เขียนถึงคน 5 คน คนละ 1 ฉบับ ลงในซองที่จ่าหน้าไว้แล้ว 5 ซอง ซองละหนึ่งฉบับ ความน่าจะเป็นที่จะใส่จดหมายลงในซองได้ตรงกับชื่อหน้าซองไม่เกิน 3 ซอง และไม่น้อยกว่า 1 ซอง เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{75}{120}$
2. $\frac{85}{120}$
3. $\frac{90}{120}$
4. $\frac{96}{120}$

25. กำหนดจุด 10 จุดบนแผ่นกระดาษ มี 4 จุดอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน นอกนั้นไม่มี 3 จุดใดอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่เกิดจากการลากเส้นตรงเชื่อมจุดที่กำหนดให้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 80 2. 106 3. 116 4. 120

26. ถ้าตารางแจกแจงความถี่ของคะแนนวิชาหนึ่งของนักเรียน 20 คน ของโรงเรียนแห่งหนึ่งเป็นดังนี้

คะแนน	31 – 39	40 – 48	49 – 57	58 – 66	67 – 75	76 – 84	85 – 93
จำนวนนักเรียน	2	3	5	4	3	2	1

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต มากกว่าฐานนิยม

ข. ค่าการกระจายของคะแนน ที่วัดโดยส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ เท่ากับ 10.5 คะแนน

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก 2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก 4. ก. ผิด และ ข. ผิด

27. ในการชั่งน้ำหนักกระเป๋าเดินทาง 4 ใบ ปรากฏว่าได้น้ำหนักเป็น 15.5, 14.8, 14.5 และ 15.2 กิโลกรัม ถ้าชั่งน้ำหนักของกระเป๋าเดินทาง 4 ใบนี้รวมกับกระเป๋าเดินทางอีกใบหนึ่งได้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของน้ำหนักของกระเป๋า 5 ใบนี้เป็น 16 กิโลกรัม แล้ว ค่ามัธยฐานและความแปรปรวนของน้ำหนักของกระเป๋าเดินทางทั้งห้าใบนี้ตามลำดับเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 15,4.58 2. 15.2,4.58 3. 15,4.116 4. 15.2,4.116

28. ถ้าความสูงของนักเรียนห้องหนึ่งมีการแจกแจงปกติที่มีมัธยฐานเท่ากับ 160 เซนติเมตร และมีนักเรียนที่สูงน้อยกว่า 158 เซนติเมตรอยู่ 34.46% สัมประสิทธิ์การแปรผันของความสูงของนักเรียนห้องนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ตารางแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ

z	0.3	0.4	0.5
A	0.1179	0.1554	0.1915

1. 1.563% 2. 2.432% 3. 3.125% 4. 4.346%

<u>เฉลย</u>

ตอนที่ 1 (1) 400 (2) 0.5 (3) 13 (4) 6 (5) 7 (6) 0.6 (7) 149.84 (8) 19

ตอนที่ 2 (1) 4 (2) 1 (3) 2 (4) 1 (5) 2 (6) 1 (7) (ตอบ 180) (8) 1 (9) 4 (10) 3 (11) 2 (12) 4 (13) 4 (14) 1 (15) 3 (16) 2 (17) 2 (18) 2 (19) 4 (20) 2 (21) 1 (22) 3 (23) 2 (24) 1 (25) 3 (26) 1 (27) 4 (28) 3

โจทย์เอ็นทรานซ์ : ตุลาคม 2545

<u>ตอนที่ 1</u> ข้อ 1 – 8 เป็นข้อสอบแบบอัตนัย ข้อละ 2 คะแนน

1. กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{36-4x^2}$

ถ้า $A = \{ x \mid x \in [-3,3] \text{ และ } f(x) \in \{0,1,2,3\} \}$

แล้ว จำนวนสมาชิกของเซต A เท่ากับเท่าใด

2. ถ้า a และ b เป็นคำตอบของสมการ $\sin(2\arcsin x) = x$ โดยที่ $a \neq 0$, $b \neq 0$ และ $a \neq b$ แล้ว $\left|\sin(\arctan ab)\right|$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

3. กำหนดให้ $\log_8(\log_4(\log_2 x)) = 2$ ถ้า $x = 4^{(2^n)}$ แล้ว n มีค่าเท่ากับเท่าใด

4. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ c เป็นจำนวนจริงที่น้อยที่สุดที่ทำให้

$\det(A - cI) = 0$ ถ้า $B = \begin{bmatrix} 1 & c & c \\ c & 1 & c \\ c & c & 1 \end{bmatrix}$ แล้ว $\det(\frac{1}{2}B)$ เท่ากับเท่าใด

5. ให้ b เป็นจำนวนจริง และกำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 3x^2+1 & , 0 \le x \le b \\ 1 & , x < 0 \end{cases}$

ถ้า $\int_{-2}^{b} f(x)\,dx = 12$ แล้ว b มีค่าเท่ากับเท่าใด

6. ในการเรียงสับเปลี่ยนตัวเลขทั้ง 7 ตัวในเซต $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ จำนวนวิธีที่เรียงได้เลข 7 หลัก ซึ่งผลบวกของเลขโดดในหลักหน่วยและหลักสิบมีค่าน้อยกว่า 7 เท่ากับเท่าใด

7. ข้อมูลชุดหนึ่งเรียงลำดับจากน้อยไปมากคือ a 4 5 6 b ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยเท่ากับ 6 และ 3 ตามลำดับ สัมประสิทธิ์ของพิสัยของข้อมูลชุดนี้เท่ากับเท่าใด

8. ตัวแทนจำหน่ายโทรทัศน์สียี่ห้อหนึ่ง ขายโทรทัศน์สี 3 ขนาด ในรอบปี 2542, 2543, 2544 ด้วยราคาดังต่อไปนี้

ขนาดของโทรทัศน์สี	ราคา (บาท)		ราคาสัมพัทธ์ในการหาดัชนีราคาปี 2543 เมื่อใช้ปี 2542 เป็นปีฐาน
	2544	2542	
20 นิ้ว	9,639	9,000	1.02
29 นิ้ว	21,218	20,000	1.03
34 นิ้ว	38,885	35,000	1.10

ดัชนีราคาโทรทัศน์สีทั้ง 3 ขนาด อย่างง่ายแบบใช้ค่าเฉลี่ยราคาสัมพัทธ์ของ พ.ศ. 2544 เมื่อใช้ พ.ศ. 2543 เป็นปีฐานเท่ากับเท่าใด

<u>ตอนที่ 2</u> ข้อ 1 – 28 เป็นข้อสอบแบบปรนัย ข้อละ 3 คะแนน

1. สำหรับเซต X ใดๆ ให้ $P(X)$ แทนเพาเวอร์เซตของ X และ $n(X)$ แทนจำนวนสมาชิกของ X ถ้า A และ B เป็นเซตซึ่ง $n(P(A\cap B)) = 4$ และ $n((A\cap B)\times(A\cup B)) = 12$ แล้ว $n(P(A\cup B) - P((A-B)\cup(B-A)))$ เท่ากับข้อใด

1. 16 2. 32 3. 48 4. 56

2. ให้ S เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\frac{3x-2}{|x|-1} \geq 2$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $S = (-1, 0] \cup (1, \infty)$ ข. $\exists x\,[x \in S \ \wedge \ (x+2) \notin S]$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก 2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก 4. ก. ผิด และ ข. ผิด

3. กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง a เป็น ห.ร.ม. ของ b และ 216 ให้ q_1, q_2 เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $216 = bq_1 + 106$, $b = 106q_2 + 4$ ถ้า $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 36$ แล้ว เมื่อหาร $f(x)$ ด้วย $x - a$ ได้เศษเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 192 2. 200 3. 236 4. 272

4. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า p, q เป็นประพจน์ โดยที่ p มีค่าความจริงเป็นจริง และ $\sim q \rightarrow (\sim p \vee q)$ เป็นสัจนิรันดร์ แล้ว q มีค่าความจริงเป็นจริง

ข. นิเสธของข้อความ $\exists x\,[(\sim P(x)) \wedge Q(x) \wedge (\sim R(x))]$ คือข้อความ $\forall x\,[Q(x) \rightarrow (P(x) \vee R(x))]$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก 2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก 4. ก. ผิด และ ข. ผิด

5. กำหนดให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นประโยคเปิด โดยที่ $\forall x\,[P(x)] \rightarrow \exists x\,[\sim Q(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์คือเซตของจำนวนจริง ข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริง

1. $\exists x\,[P(x) \wedge \sim Q(x)]$ 2. $\exists x\,[\sim P(x) \vee \sim Q(x)]$
3. $\forall x\,[P(x) \rightarrow \sim Q(x)]$ 4. $\forall x\,[P(x) \rightarrow Q(x)]$

6. กำหนดให้ k เป็นค่าคงตัว และ $r = \{(x, y) \in R^+ \times R^+ \mid x + k\sqrt{x} = y + k\sqrt{y}\}$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า $k = 1$ แล้ว r เป็นฟังก์ชัน ข. ถ้า $k = -1$ แล้ว r เป็นฟังก์ชัน

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก 2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก 4. ก. ผิด และ ข. ผิด

7. กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases}2 & ,x\le -1\\ (x-1)^2 & ,-1<x<2\\ x+1 & ,x\ge 2\end{cases}$ และ $g(x)=f(x)+2$

ถ้า k เป็นจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $g(k)>5$ แล้ว $(gof)(k)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 5 2. 6 3. 7 4. 8

8. กำหนดให้ $f(x)=\sqrt{x}$ เมื่อ $x\ge 0$ และ $g(x)=\begin{cases}x & ,0\le x<1\\ x+1 & ,1\le x\end{cases}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. gof^{-1} เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน R_f ข. fog^{-1} เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน R_g

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก 2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก 4. ก. ผิด และ ข. ผิด

9. นายดำยืนอยู่บนสนามแห่งหนึ่ง มองเห็นยอดเสาธงเป็นมุมเงย $60°$ แต่เมื่อเขาเดินตรงเข้าไปหาเสาธงอีก 20 เมตร เขามองเห็นยอดเสาธงเป็นมุมเงย $75°$ ในขณะที่เขามองเห็นยอดเสาธงเป็นมุมเงย $60°$ นั้น เขายืนอยู่ห่างจากเสาธงเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $10(2+\frac{3}{2}\sqrt{3})$ เมตร 2. $10(2+\frac{1}{2}\sqrt{3})$ เมตร
3. $10(2+2\sqrt{3})$ เมตร 4. $10(2+\sqrt{3})$ เมตร

10. ถ้าไฮเพอร์โบลา H มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงรี $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$ จุดยอดอยู่ที่จุดโฟกัสทั้งสองของวงรีนี้ และผ่านจุด $(5,5)$ แล้ว จุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลา H คือจุดในข้อใดต่อไปนี้

1. $(1-\frac{7}{\sqrt{11}},2)$ และ $(1+\frac{7}{\sqrt{11}},2)$ 2. $(1-\frac{8}{\sqrt{11}},2)$ และ $(1+\frac{8}{\sqrt{11}},2)$
3. $(1-\frac{9}{\sqrt{11}},2)$ และ $(1+\frac{9}{\sqrt{11}},2)$ 4. $(1-\frac{10}{\sqrt{11}},2)$ และ $(1+\frac{10}{\sqrt{11}},2)$

11. กำหนดให้ $f_1(x)=-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}$ เมื่อ $x\le 1$ และ $f_2(x)=3x-2$ เมื่อ $x\ge 1$

ถ้า $P(a,b)$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่มีรัศมียาว $7/\sqrt{5}$ หน่วย และสัมผัสกราฟของ f_1 และ f_2 แล้ว $a+b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-2\sqrt{2}$ 2. $2\sqrt{2}$ 3. $6-\sqrt{2}$ 4. $6+\sqrt{2}$

12. ให้ A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x<7$ และ B เป็นเซตคำตอบของอสมการ $3^{4x-3}-26(3^{2x-3})\ge 1$ แล้ว $A-B$ คือช่วงในข้อใดต่อไปนี้

1. $(0,\frac{3}{2})$ 2. $[\frac{3}{2},16)$ 3. $(0,3]$ 4. $[3,16)$

13. ถ้า A เป็นเมตริกซ์ซึ่ง $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ x & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $x > 0$
และ $\det(2\,\text{adj}\,A) = 1/18$ แล้ว x เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

1. $x < 5$ 2. $5 \le x < 9$ 3. $9 \le x < 13$ 4. $x \ge 13$

14. กำหนดให้สมการจุดประสงค์คือ $P = 2ax + 3ay$ โดยที่ $a > 0$
อสมการข้อจำกัดคือ $2x + y \le 1000$, $x + 3y \le 900$, $x \ge 0$ และ $y \ge 0$
ถ้าค่าสูงสุดของ P คือ $33,000$ แล้ว a เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

1. $10 < a \le 20$ 2. $20 < a \le 30$ 3. $30 < a \le 40$ 4. $40 < a \le 50$

15. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยที่ $|\overrightarrow{BC}| = 1$, $|\overrightarrow{CA}| = 2$
ถ้า $\bar{u} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB})$, θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\overrightarrow{CB}$
และ $\cos B\hat{C}A = \frac{1}{4}$ แล้ว $\cos\theta$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{\sqrt{5}}{4}$ 2. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 3. $\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}$ 4. $\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$

16. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยที่ $|\overrightarrow{AB}| = c$, $|\overrightarrow{BC}| = a$, $|\overrightarrow{CA}| = b$
ถ้า $a^2 + b^2 + c^2 = \sqrt{13}$ แล้ว $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{\sqrt{13}}{2}$ 2. $-\frac{\sqrt{13}}{2}$ 3. $\frac{\sqrt{13}}{3}$ 4. $-\frac{\sqrt{13}}{3}$

17. กำหนดให้ z_1, z_2, z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งมีสมบัติว่า $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ และ $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ และให้ $\text{Re}(z)$ แทนส่วนจริงของจำนวนเชิงซ้อน z
พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\text{Re}(z_1\bar{z}_2) = \frac{1}{2}$ ข. $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก 2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก 4. ก. ผิด และ ข. ผิด

18. กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน ถ้า $-1 + \sqrt{3}\,i$ เป็นรากที่ 5 ของ z แล้ว รากที่ 2 ของ z คือจำนวนในข้อใดต่อไปนี้

1. $2\sqrt{2}(-\sqrt{3} - i)$, $2\sqrt{2}(\sqrt{3} + i)$ 2. $2\sqrt{2}(-1 - \sqrt{3}\,i)$, $2\sqrt{2}(1 + \sqrt{3}\,i)$
3. $2\sqrt{2}(-\sqrt{3} + i)$, $2\sqrt{2}(\sqrt{3} - i)$ 4. $2\sqrt{2}(-1 + \sqrt{3}\,i)$, $2\sqrt{2}(1 - \sqrt{3}\,i)$

19. กำหนดให้ $\log x$, $\log (x+2)$, $\log (x+16)$ เป็นสามพจน์แรกที่เรียงกันของลำดับเลขคณิต ถ้า a_{10} เป็นพจน์ที่ 10 และ S_{10} เป็นผลบวก 10 พจน์แรกของลำดับนี้แล้ว ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $a_{10} = 9\log 5 - 8\log 3$, $S_{10} = 5[9\log 5 - 7\log 3]$
2. $a_{10} = 9\log 5 - 8\log 3$, $S_{10} = 5[9\log 7 - 2\log 3]$
3. $a_{10} = 9\log 7 - \log 3$, $S_{10} = 5[9\log 5 - 7\log 3]$
4. $a_{10} = 9\log 7 - \log 3$, $S_{10} = 5[9\log 7 - 2\log 3]$

20. กำหนดให้ $a > 0$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+2} & , x < a \\ \dfrac{x+1}{x} & , x \geq a \end{cases}$ และ $g(x) = x^2$

ถ้า $\lim\limits_{x \to a^+} (fog)(\sqrt{x}) - \sqrt{\lim\limits_{x \to a^-} (gof)(x)} = \dfrac{11}{a(a+2)}$ แล้ว a มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 2. 3 3. 5 4. 9

21. กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 6x + c$ โดยที่ c เป็นจำนวนจริง ถ้า a และ b เป็นรากของสมการ $f(x) = 0$ และ $3a + 2b = 20$ แล้ว $f'(c)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -38 2. -26 3. 26 4. 38

22. กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 2|x|$ และ $g(x) = x^2 + 1$

$(gof)'(-3) + (fog)'(3)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -132 2. -84 3. 84 4. 132

23. กำหนดให้ $f''(x) = ax$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว ถ้าเส้นตรง $2x + y - 6 = 0$ สัมผัสกับกราฟของ f ที่จุด $(1, 4)$ และ $f(0) = 8$ แล้ว $\int_0^1 f(x)\,dx$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\dfrac{22}{4}$ 2. $\dfrac{23}{4}$ 3. $\dfrac{42}{4}$ 4. $\dfrac{43}{4}$

24. ถุงใบหนึ่งมีลูกกวาดขนาดเดียวกัน เป็นสีแดง 24 เม็ด ที่เหลือเป็นลูกกวาดสีขาวและลูกกวาดสีเขียว ถ้าสุ่มหยิบลูกกวาดขึ้นมา 1 เม็ด ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกกวาดสีขาวหรือสีเขียวเท่ากับ 5/6 และความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกกวาดสีเขียวหรือสีแดงเท่ากับ 3/4 แล้ว จำนวนลูกกวาดสีเขียวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 36 2. 60 3. 72 4. 84

25. ชมรมกีฬาของโรงเรียนแห่งหนึ่งมีสมาชิกทั้งหมด 80 คน สมาชิกทุกคนต้องเล่นกีฬาอย่างน้อยหนึ่งอย่าง และมีสมาชิกเป็นนักฟุตบอล 49 คน นักบาสเกตบอล 40 คน นักเทนนิส 33 คน นักกีฬาทั้งสามอย่าง 5 คน นักเทนนิสอย่างเดียว 10 คน นักบาสเกตบอลอย่างเดียว 13 คน นักบาสเกตบอลและนักเทนนิส 13 คน ความน่าจะเป็นในการเลือกประธาน รองประธาน และเลขานุการของชมรมตำแหน่งละ 1 คน จากสมาชิกทั้งหมด โดยที่ประธานต้องเป็นนักกีฬาทั้งสามอย่าง และรองประธานจะต้องเป็นนักกีฬาอย่างน้อย 2 อย่าง เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{9}{316}$ 2. $\frac{11}{316}$ 3. $\frac{15}{632}$ 4. $\frac{23}{632}$

26. ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างต้นทุนการผลิตสินค้าต่อหน่วย (Y) (หน่วยเป็นบาท) กับจำนวนสินค้าที่ผลิตได้ในแต่ละวัน (X) (หน่วยเป็นชิ้น) ของโรงงานแห่งหนึ่งที่ได้จากการเก็บข้อมูลตั้งแต่วันที่ 1 – 30 กันยายน 2545 อยู่ในรูปสมการ $Y = 8 - 0.5X$ ถ้าจำนวนสินค้าที่โรงงานแห่งนี้ผลิตได้ในวันที่ 1 – 4 ตุลาคม 2545 เป็น $4, 2, 8, 10$ ชิ้น ตามลำดับ แล้ว ความแปรปรวนของต้นทุนการผลิตสินค้าต่อหน่วยที่ทำนายได้ในช่วงเวลาดังกล่าว เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2.5 2. 10 3. 17.5 4. 22.5

27. ถ้าน้ำหนักของนักเรียนชั้นอนุบาลในโรงเรียนแห่งหนึ่งมีการแจกแจงปกติ โดยมีค่ามัธยฐานเป็นสามเท่าของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และ 55.57 เปอร์เซ็นต์ของนักเรียนกลุ่มนี้มีน้ำหนักน้อยกว่า 15.7 กิโลกรัม แล้ว เปอร์เซ็นต์ของนักเรียนกลุ่มนี้ที่มีน้ำหนักอยู่ระหว่าง 13 กิโลกรัม ถึง 18 กิโลกรัม เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

กำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐาน ที่อยู่ระหว่าง 0 ถึง z

z	0.13	0.14	0.2	0.4	0.6	0.7
พื้นที่	0.0517	0.0557	0.0793	0.1554	0.2258	0.2580

1. 30.51% 2. 33.73% 3. 38.12% 4. 41.34%

28. ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่ง ซึ่งมีคะแนนเต็ม 70 คะแนน มีสัมประสิทธิ์ของการแปรผันของคะแนนเท่ากับ $2/7$ ถ้านายบัณฑิตสอบได้ 65 คะแนน ซึ่งคิดเป็นคะแนนมาตรฐานเท่ากับ 3 และนางสาวบังอรสอบได้คะแนนซึ่งคิดเป็นค่ามาตรฐานเท่ากับ 1.9 แล้ว นางสาวบังอรสอบได้คะแนนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 50 คะแนน 2. 52 คะแนน 3. 54 คะแนน 4. 56 คะแนน

เฉลย

ตอนที่ 1 (1) 5 (2) 0.6 (3) 127 (4) 0.625 (5) 2 (6) 1440 (7) 0.8 (8) 102.14

ตอนที่ 2 (1) 3 (2) 2 (3) 2 (4) 1 (5) 4 (6) 2 (7) 3 (8) 1 (9) 4 (10) 4 (11) 3 (12) 1 (13) 3 (14) 2 (15) 4 (16) 1 (17) 3 (18) 4 (19) 4 (20) 2 (21) 1 (22) 3 (23) 2 (24) 4 (25) 1 (26) 1 (27) 3 (28) 3

โจทย์เอ็นทรานซ์ : มีนาคม 2546

<u>ตอนที่ 1</u> ข้อ 1 – 8 เป็นข้อสอบแบบอัตนัย ข้อละ 2 คะแนน

1. กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $x > |x-1|$
และ B เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\frac{x-5}{(x+1)(x+3)} \geq 0$
ถ้า $A - B$ คือช่วง (a,b) แล้ว $a+b$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

2. ในรูปสามเหลี่ยม ABC ถ้า $A = 30°$ ด้าน BC ยาว 2 เซนติเมตร และด้าน AC ยาว 3 เซนติเมตร แล้ว $4\sin 3B$ มีค่าเท่าใด

3. ถ้า $\log_9 3,\ \log_9(3^x-2),\ \log_9(3^x+16)$ เป็นสามพจน์แรกที่เรียงกันในอนุกรมเลขคณิต และ S เป็นผลบวกของสี่พจน์แรกของอนุกรมนี้ แล้ว 3^S มีค่าเท่ากับเท่าใด

4. กำหนดให้ A และ B เป็นเมตริกซ์ขนาด 2×2
ถ้า $A+2B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}$ และ $A-B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$ แล้ว $\det(2A^{-1}B)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

5. กำหนดสมการจุดประสงค์คือ $P = 3x+2y$ โดยมีอสมการข้อจำกัดคือ $0 \leq x \leq 4$ และ $6 \leq x+y \leq 7$ แล้ว ค่าสูงสุดของ P เท่ากับเท่าใด

6. ถ้า $\bar{u} = 4\bar{i}+3\bar{j}$, $|\bar{v}| = |\bar{u}|$ และ $|\bar{u}+\bar{v}| = 8$ แล้ว $\bar{u}\cdot\bar{v}$ มีค่าเท่าใด

7. สลาก 11 ใบ มีหมายเลข 1 ถึง 11 กำกับอยู่ใบละ 1 หมายเลข สุ่มหยิบสลากมา 4 ใบ ความน่าจะเป็นที่สลากที่หยิบมา มีผลคูณของหมายเลขเป็นจำนวนคู่ แต่ผลบวกของหมายเลขเป็นจำนวนคี่ มีค่าเท่าใด (ตอบทศนิยม 2 ตำแหน่ง)

8. กำหนดตารางแจกแจงความถี่ของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่งดังนี้

คะแนน	ความถี่
16 – 18	a
19 – 21	2
22 – 24	3
25 – 27	6
28 – 30	4

ถ้าควอร์ไทล์ที่หนึ่ง (Q_1) เท่ากับ 18.5 คะแนน แล้ว มัธยฐานของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องนี้เท่ากับเท่าใด

<u>ตอนที่ 2</u> ข้อ 1 – 28 เป็นข้อสอบแบบปรนัย ข้อละ 3 คะแนน

1. กำหนดให้ $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3,\ldots,10\}$

เซต $\{f \mid f : A \xrightarrow{1\text{-}1} B$ และมี $x \in A$ ซึ่ง $f(x) = x\}$ มีจำนวนสมาชิกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 16 2. 17 3. 18 4. 19

2. ให้ p, q และ r เป็นประพจน์ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า $[(p \wedge \sim r) \wedge q] \rightarrow \sim(p \wedge q)$ เป็นเท็จ แล้ว $(p \vee q) \rightarrow r$ เป็นจริง

ข. ถ้า $q \vee \sim r$ เป็นเท็จ แล้ว $[p \vee (q \rightarrow r)] \rightarrow \sim q$ เป็นเท็จ

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

3. กำหนดให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์ ในการอ้างเหตุผล

ถ้า “เหตุ” คือ 1. $(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$

2. $r \rightarrow \sim s$

แล้ว ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้เป็น “ผล” ที่ทำให้การอ้างเหตุผลมีความสมเหตุสมผล

1. p 2. q 3. $\sim p \wedge \sim q$ 4. $\sim p \wedge q$

4. ให้ A, B และ C เป็นเซตซึ่ง $n(A \cup B) = 16$, $n(A) = 8$, $n(B) = 14$, $n(C) = 5$ และ $n(A \cap B \cap C) = 2$ ค่าสูงสุดของ $n[(A \cap B) \times (C - A)]$ ที่เป็นไปได้ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 6 2. 12 3. 18 4. 24

5. กำหนดให้ I คือเซตของจำนวนเต็ม และ $S = \{x \mid ||x-1|-1| \cdot ||x-1|+1| < 50\}$

จำนวนสมาชิกของเซต $S \cap I$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 13 2. 14 3. 15 4. 16

6. กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $f(x) < 0$ ทุก x

ถ้า $(gof)(x) = 2[f(x)]^2 + 2f(x) - 4$ และ $g^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{3}$ แล้ว

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. gof เป็นฟังก์ชันคงตัว ข. $f(100) + g(100) = 300$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

7. กำหนดให้ $f(x) = -(x-1)^2$ ทุก $x \leq 1$ และ $g(x) = \sqrt{1-x}$ ทุก $x \leq 1$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{|x|}$ ทุก $x \leq 0$ ข. $(g^{-1}of^{-1})(-\dfrac{1}{4}) = \dfrac{3}{4}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

8. กำหนดให้ $r = \{ (x, y) \mid 0 \le x,\ 0 \le y \le 5 \text{ และ } x^2 - y^2 - 2x + 6y \le 8 \}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $D_r = [0, 3]$

ข. ถ้า $0 < c$ และ $(3, c) \in r$ แล้ว $c = 5$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

9. ถ้า $\arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{6}$ แล้ว $\arccos x - \arctan 2x$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{\pi}{12}$
2. $\frac{5\pi}{12}$
3. $\frac{7\pi}{12}$
4. $\frac{11\pi}{12}$

10. ให้ E เป็นวงรีซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใดๆ บนวงรี E ไปยังจุด $(-3, 2)$ และ $(5, 2)$ เท่ากับ 12 หน่วย ถ้า A และ B เป็นจุดยอดของวงรี E และวงรี E ตัดแกน y ที่จุด C และ D แล้ว พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $10\sqrt{5}$ ตารางหน่วย
2. $20\sqrt{5}$ ตารางหน่วย
3. $10\sqrt{7}$ ตารางหน่วย
4. $20\sqrt{7}$ ตารางหน่วย

11. กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง และ $A(a, 1)$, $B(-5, -4)$, $C(1, -2)$, $D(2, 3)$ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD ถ้า L เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากกับ AC และผ่านจุดกึ่งกลางของด้าน AC แล้ว สมการของเส้นตรง L คือสมการในข้อใดต่อไปนี้

1. $5x - 3y + 6 = 0$
2. $5x - 3y - 6 = 0$
3. $5x + 3y + 9 = 0$
4. $5x + 3y - 9 = 0$

12. เซตคำตอบของอสมการ $(4^x - 2)\log(1 - x^2) > 0$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-2, 1/2)$
2. $(-1/2, 2)$
3. $(0, 10)$
4. $(1/2, 20)$

13. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} x+2 & x & x+1 \\ 0 & x & x+1 \\ x+1 & -1 & x \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} x & x+1 \\ 2x & 3 \end{bmatrix}$

ถ้า x เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $\det(A) = 0$ แล้ว $\text{adj}\, B$ คือเมตริกซ์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

14. ให้ A, B เป็นจุดสองจุดบนเส้นตรง $y = 2x$ ถ้าจุด $C\ (-2,1)$ ทำให้ $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ และ $\left|\overrightarrow{CA}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right|$ แล้ว รูปสามเหลี่ยม ABC มีพื้นที่เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $2\sqrt{5}$ ตารางหน่วย
2. $\sqrt{10}$ ตารางหน่วย
3. 5 ตารางหน่วย
4. 10 ตารางหน่วย

15. กำหนดให้ z_1, z_2, z_3 เป็นรากของสมการ $(1-i)\,z^3 = \sqrt{2}$ โดยที่ z_1, z_2, z_3 อยู่ในควอดรันต์ที่ 1, 2, 3 ตามลำดับ $z_1z_3 + z_2^2$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-2i$
2. $2i$
3. -2
4. 2

16. กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริง และ $f(x) = x^4 - 6x^3 + 15x^2 + ax + b$ ถ้าจำนวนเชิงซ้อน $1+i$ และ $2+i$ เป็นรากของ $f(x)$ แล้ว $a+b$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -10
2. -8
3. 8
4. 10

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^3}\left[\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - \sqrt{(1+x)(1-x^2)} + \sqrt{(1-x)(1-x^2)}\right]$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0
2. $\dfrac{1}{4}$
3. $\dfrac{1}{2}$
4. 1

18. กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = 4$ และ

$$g(x) = \begin{cases} f(x)\left(\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}\right) & , x \neq 4 \\ 4 - kx^2 & , x = 4 \end{cases}$$ โดยที่ k เป็นค่าคงตัว

ถ้ากราฟของ f ตัดเส้นตรง $y = x+1$ ที่จุดซึ่ง $x = 4$ แล้ว k มีค่าอยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. $(-3, -1)$
2. $(-2, 0)$
3. $(-1, 1)$
4. $(0, 2)$

19. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f''(x) = 2x+1$ ถ้าค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f เท่ากับ $\dfrac{1}{2}$ ที่ $x = -1$ แล้ว ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1
2. $-\dfrac{1}{3}$
3. 0
4. $\dfrac{1}{3}$

20. ในการจัดไปทัศนศึกษาครั้งหนึ่ง ผู้จัดคิดค่าบริการเป็นเงื่อนไขดังนี้
ถ้ามีผู้ร่วมเดินทาง 50 คน ผู้จัดจะคิดค่าบริการอัตราหนึ่ง
ถ้ามีผู้ร่วมเดินทาง 51 คน ค่าบริการจะลดลงคนละ 2 บาท
ถ้ามีผู้ร่วมเดินทาง 52 คน ค่าบริการจะลดลงคนละ 4 บาท
ถ้ามีผู้ร่วมเดินทาง 53 คน ค่าบริการจะลดลงคนละ 6 บาท เป็นเช่นนี้เรื่อยไป
ปรากฏว่า ถ้ามีผู้ร่วมเดินทาง 90 คน แล้วจะเก็บค่าบริการได้มากที่สุด
ถ้ามีผู้ร่วมเดินทาง 100 คน จะเก็บค่าบริการได้ทั้งหมดเป็นเงินเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 16,000 บาท
2. 16,200 บาท
3. 16,400 บาท
4. 16,600 บาท

21. ถ้าความชันของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด (x, y) ใดๆ เท่ากับ $x^2 - 3x + 2$ และ $\int_0^2 f(x)\,dx = 4$ แล้ว จุด (x, y) ในข้อใดต่อไปนี้อยู่บนเส้นโค้ง $y = f(x)$

1. $(0, \frac{4}{3})$ 2. $(0, -\frac{4}{3})$ 3. $(1, \frac{13}{4})$ 4. $(1, -\frac{13}{4})$

22. กำหนดให้ A เป็นบริเวณในระนาบ xy ซึ่งปิดล้อมด้วยพาราโบลา $y = x^2 - 7$ และแกน x จาก $x = 0$ ถึง $x = a$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว ถ้าพื้นที่ของบริเวณ A ส่วนที่อยู่เหนือแกน x มากกว่าพื้นที่ของบริเวณ A ส่วนที่อยู่ใต้แกน x เท่ากับ 2a ตารางหน่วย แล้ว a คือจำนวนในข้อใดต่อไปนี้

1. $2\sqrt{3}$ 2. $3\sqrt{3}$ 3. 5 4. 7

23. มีคนงานหญิง 6 คน และคนงานชาย 8 คน ซึ่งมีนายดำรวมอยู่ด้วย ถ้าจะเลือกคนงาน 4 คน ไปทำงานที่ต่างกัน 4 ประเภท โดยให้เป็นหญิง 2 คน เป็นชาย 2 คน และให้มีนายดำรวมอยู่ใน 4 คนนี้ด้วย จำนวนวิธีการเลือกคนงานดังกล่าวจะเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1920 วิธี 2. 2400 วิธี 3. 2520 วิธี 4. 2880 วิธี

24. นายกวีและนายขจรได้รับเชิญไปงานเลี้ยง ซึ่งมีผู้ได้รับเชิญทั้งหมด 20 คน เจ้าภาพจัด (โดยสุ่ม) ให้ผู้ร่วมงานนั่งโต๊ะกลม 2 โต๊ะ ๆ ละ 10 ที่นั่ง ความน่าจะเป็นที่นายกวีและนายขจรจะได้นั่งติดกันในโต๊ะตัวเดียวกันเท่ากับข้อใด

1. $\frac{1}{19}$ 2. $\frac{2}{19}$ 3. $\frac{2}{9}$ 4. $\frac{4}{9}$

25. จากการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างยอดขาย (Y) (หน่วยเป็นหมื่นบาท) ของพนักงานขายประกันในบริษัทประกันภัยแห่งหนึ่งกับประสบการณ์การขาย (X) (หน่วยเป็นปี) ของพนักงานขาย โดยเก็บข้อมูลจากพนักงานขายประกัน 8 คน ได้ข้อมูลดังนี้

$\sum_{i=1}^{8} X_i = 48,\ \sum_{i=1}^{8} Y_i = 41,\ \sum_{i=1}^{8} X_i Y_i = 286,\ \sum_{i=1}^{8} X_i^2 = 348$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้าพนักงานขายประกันคนหนึ่งมีประสบการณ์การขาย 6 ปี ยอดขายโดยประมาณของพนักงานคนนี้เท่ากับ 51,250 บาท

ข. ประสบการณ์การขายเพิ่มขึ้น 1 ปี ทำให้ยอดขายประกันเพิ่มขึ้น 11,250 บาท

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

26. ในการสอบครั้งหนึ่ง มีผู้เข้าสอบจำนวนหนึ่งซึ่งมีนายคณิตและนายวิทยารวมอยู่ด้วย โดยที่ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของผลการสอบเท่ากับ 60 คะแนน และสัมประสิทธิ์ของการแปรผันเท่ากับ 0.25 นายคณิตสอบได้มากกว่านายวิทยา 9 คะแนน และผลบวกของค่ามาตรฐานของคะแนนของคนทั้งสองเท่ากับ 1.5

ถ้าให้ A = ค่ามาตรฐานของคะแนนของนายคณิต และ B = คะแนนของนายวิทยา แล้ว A และ B เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

1. $A=0.45, B=65.75$ คะแนน
2. $A=0.45, B=66$ คะแนน
3. $A=1.05, B=66.75$ คะแนน
4. $A=1.05, B=68$ คะแนน

27. การแจกแจงความสูงของนักเรียนกลุ่มหนึ่งเป็นการแจกแจงปกติ ถ้านักเรียนที่มีความสูงมากกว่า 149.4 เซนติเมตร มีอยู่ 3% และนักเรียนที่มีความสูงน้อยกว่าฐานนิยมแต่มากกว่า 136.5 เซนติเมตร มีอยู่ 25.8% แล้ว ข้อใดต่อไปนี้คือฐานนิยม และความแปรปรวนของความสูงของนักเรียนกลุ่มนี้ตามลำดับ

กำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐานที่อยู่ระหว่าง 0 ถึง z

z	0.3	0.7	1.49	1.88
พื้นที่	0.1179	0.2580	0.4139	0.4700

1. 144.4, 5
2. 144.4, 25
3. 140, 5
4. 140, 25

28. ร้านสุขสวัสดิ์จำหน่ายเสื้อนักเรียนยี่ห้อหนึ่ง โดยที่ราคาของเสื้อนักเรียนในปี 2544 และ 2545 เป็นดังนี้

ขนาดเสื้อนักเรียน	**ราคา (บาท)**	
	2544	**2545**
เล็ก	100	105
กลาง	115	125
ใหญ่	125	130

ถ้าดัชนีราคาอย่างง่ายแบบใช้ราคารวมของ พ.ศ. 2544 เทียบกับ พ.ศ. 2543 เท่ากับ 1.19 แล้ว ดัชนีราคาอย่างง่ายแบบใช้ราคารวมของ พ.ศ. 2545 เทียบกับ พ.ศ. 2543 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1.06
2. 1.12
3. 1.16
4. 1.26

เฉลย

ตอนที่ 1 (1) 5.5 (2) 2.25 (3) 243 (4) 8 (5) 18 (6) 7 (7) 0.48 (8) 24.5

ตอนที่ 2 (1) 2 (2) 4 (3) 3 (4) 3 (5) 3 (6) 2 (7) 1 (8) 4 (9) 1 (10) 4 (11) 1 (12) 1 (13) 4 (14) 3 (15) 1 (16) 2 (17) 3 (18) 2 (19) 4 (20) 1 (21) 1 (22) 2 (23) 3 (24) 2 (25) 2 (26) 3 (27) 4 (28) 4

โจทย์เอ็นทรานซ์ : ตุลาคม 2546

<u>ตอนที่ 1</u> ข้อ 1 – 8 เป็นข้อสอบแบบอัตนัย ข้อละ 2 คะแนน

1. กำหนดให้ A, B เป็นเซต ซึ่ง $n(A)=a, n(B)=b$ ถ้า $n[(A-B)\cup(B-A)]=7$ และ $n(A\times B)=40$ แล้ว $n(\{C \mid C\subseteq A\cup B \text{ และ } n(C)\le 2\})$ เท่ากับเท่าใด

2. กำหนดให้ $a>0$ และ $f(x)=ax^2, x\ge 0$ และ $g(x)=x^3$
ถ้า $(f^{-1}og)(4)=2$ แล้ว $\dfrac{f^{-1}(64)}{g^{-1}(64)}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

3. กำหนดให้ $f(x)=x^3+kx^2+mx+4$ เมื่อ k และ m เป็นค่าคงตัว
ถ้า $x-2$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $f(x)$ และเมื่อนำ $x+1$ ไปหาร $f(x)$ เหลือเศษ 3 แล้ว ค่าสัมบูรณ์ของ $k+m$ เท่ากับเท่าใด

4. $1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\left(\arccos\dfrac{4}{5}-\arctan\dfrac{4}{3}\right)\right)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

5. กำหนดเวกเตอร์ $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ ดังนี้ $\bar{a}=4\bar{i}-2\bar{j}$, $\bar{a}+\bar{b}=6\bar{i}+4\bar{j}$ และ
$\bar{c}=c_1\bar{i}+c_2\bar{j}$ โดยที่ $c_1>0$, $c_2>0$ และ $|\bar{c}|=2\sqrt{17}$
ถ้า $\bar{c}$ ตั้งฉากกับ $(\bar{a}-\bar{b})$ แล้ว c_1+c_2 มีค่าเท่ากับเท่าใด

6. กำหนดให้เส้นตรง $y=-6x-5$ สัมผัสเส้นโค้ง $y=f(x)$ ที่จุด $x=-1$ ถ้า
$f(x)=ax^3+bx^2-3$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงแล้ว ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f เท่ากับเท่าใด

7. ในการศึกษาความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของปริมาณนมโดยเฉลี่ย (ลิตร) ที่เด็กแต่ละคนในตำบลหนึ่งบริโภคต่อปี (Y) ระหว่างปี พ.ศ. 2538 – 2545 พบว่า เมื่อเปลี่ยนช่วงเวลาให้อยู่ในรูปของค่า X ดังนี้

พ.ศ.	2538	2539	2540	2541	2542	2543	2544	2545
X	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7

จะได้สมการแสดงความสัมพันธ์ (ทศนิยม 2 ตำแหน่ง) เป็น $Y=0.54X+38.85$
ถ้าใช้ความสัมพันธ์นี้ทำนายปริมาณนมโดยเฉลี่ยที่เด็กแต่ละคนในตำบลนี้บริโภคใน พ.ศ. 2547 แล้ว จะได้ว่าปริมาณนมโดยเฉลี่ยที่เด็กแต่ละคนบริโภคโดยประมาณ เท่ากับเท่าใด

8. ข้อสอบชุดหนึ่งมี 2 ตอน ตอนละ 4 ข้อ มีคำสั่งให้ผู้สอบทำข้อสอบตอนที่หนึ่งอย่างน้อย 1 ข้อ และทำข้อสอบตอนที่สอง 2 ข้อ จำนวนวิธีที่ผู้สอบจะทำข้อสอบชุดนี้ เท่ากับเท่าใด

<u>ตอนที่ 2</u> ข้อ 1 – 28 เป็นข้อสอบแบบปรนัย ข้อละ 3 คะแนน

1. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $a \mid (2b-c)$ และ $a^2 \mid (b+c)$ แล้ว $a \mid 3c$

ข. ถ้า $A = \{ x \in R \mid \frac{x^2-2x+2}{x-2} < 1 \}$ และ $B = \{ x \in R \mid x^3-2x^2 < 0 \}$ แล้ว $A = B$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

2. พิจารณาการอ้างเหตุผลต่อไปนี้

ก. *เหตุ* 1) $p \wedge q$
2) $(q \vee r) \rightarrow (s \wedge p)$
3) $p \rightarrow \sim r$
ผล $s \wedge \sim r$

ข. *เหตุ* 1) $P(x) \rightarrow \sim Q(x)$
2) $Q(x) \vee R(x)$
ผล $P(x) \rightarrow R(x)$

ข้อความใดต่อไปนี้ถูก

1. ก และ ข สมเหตุสมผลทั้งคู่
2. ก สมเหตุสมผล แต่ ข ไม่สมเหตุสมผล
3. ก ไม่สมเหตุสมผล แต่ ข สมเหตุสมผล
4. ก และ ข ไม่สมเหตุสมผลทั้งคู่

3. ให้เอกภพสัมพัทธ์คือเซตของจำนวนจริง

ถ้า $P(x)$ แทนข้อความ $x^2-3x<0$ และ $Q(x)$ แทนข้อความ $-2 < \log_{1/3} x < -1$ แล้ว ประโยคในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริง

1. $\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)]$
2. $\forall x [Q(x) \rightarrow P(x)]$
3. $\forall x [\sim P(x) \rightarrow Q(x)]$
4. $\forall x [P(x) \rightarrow \sim Q(x)]$

4. กำหนดให้ f, g เป็นฟังก์ชันซึ่ง $D_f = [0, \infty)$ โดยที่ $f^{-1}(x) = x^2,\ x \geq 0$ และ $g^{-1}(x) = (f(x))^2+1,\ x \geq 0$ ถ้า $a > 0$ และ $f(a)+g(a)=19$ แล้ว $f^{-1}(a) + g^{-1}(a)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 273
2. 274
3. 513
4. 514

5. กำหนดให้ $a > 0$ และ $g(x) = \begin{cases} -a(10^x) & , x < 1 \\ x^3-1 & , x \geq 1 \end{cases}$

ถ้า $R_g = (-2.5, \infty)$ แล้ว พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $g^{-1}(a-1) = \log 2$

ข. $g^{-1}(x) = \begin{cases} \log(4|x|) & , x < 0 \\ \sqrt[3]{x+1} & , x \geq 0 \end{cases}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

6. ให้ $r = \{(x,y) \mid y = \frac{x^2-4}{\sqrt{x}-2}\}$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $4 \in R_r$ ข. $R_{r^{-1}} = [0,4) \cup (4,\infty)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

7. ให้ H เป็นไฮเพอร์โบลา $12y^2-4x^2+72y+16x+44=0$ ซึ่งมีจุดโฟกัสคือ F_1 และ F_2 ให้ E เป็นวงรีซึ่งมีจุดศูนย์กลางร่วมกับ H โดยมี F_1 และ F_2 เป็นจุดยอด และสัมผัสแกน y ถ้า E ตัดแกน x ที่จุด A และ B แล้ว AB ยาวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\sqrt{8}$ หน่วย
2. $\sqrt{7}$ หน่วย
3. $\sqrt{6}$ หน่วย
4. $\sqrt{5}$ หน่วย

8. กำหนดให้วงกลม C มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดโฟกัสของพาราโบลา $y = 1-(8-x)^2$ ถ้าเส้นตรง $3x-4y+5=0$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลม C แล้ว จุดในข้อใดต่อไปนี้อยู่บนวงกลม C

1. $(0, 1+\sqrt{5})$
2. $(1-2\sqrt{2}, 0)$
3. $(-1, -1)$
4. $(2, -2)$

9. ถ้า $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ และ $\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ แล้ว $\tan^2 B$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 4
2. 3/2
3. 1
4. 2/3

10. ถ้า a, b เป็นคำตอบของสมการ $6^x-3^{x+1}-2^{x+2}+12=0$ แล้ว คำตอบของสมการ $(ab)^{2x+1} = (ab+3)^x$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{\log 3}{\log 2 - \log 3}$
2. $\frac{\log 4}{\log 7 - \log 16}$
3. $\frac{1}{\log_3 8 - 2}$
4. $\frac{1}{\log_2 5 - 2}$

11. กำหนดให้ S เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\log_x\left(\frac{x+3}{x-1}\right) \geq 1$ และ $T = \{\log_{\sqrt{3}} x \mid x \in S\}$ แล้ว T เป็นสับเซตของช่วงใดต่อไปนี้

1. $[0,2]$
2. $[1,3]$
3. $[1/2, 5/2]$
4. $[1/3, 7/3]$

12. กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง และ $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 2a+\sqrt{6} \\ 6 & a & 3 \\ a & 2 & a \end{bmatrix}$

ถ้า $M_{11}(A) = 18$ และ $M_{22}(A) = -12$ แล้ว $C_{31}(A)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -57
2. -33
3. -15
4. -3

13. กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง และ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & a \end{bmatrix}$

ถ้า $a > 10$ และ $\det(\text{adj } A) = 225$ แล้ว a มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 11 2. 12 3. 13 4. 14

14. กำหนดสมการจุดประสงค์คือ $P(x,y) = (a^2-1)x + ay$ โดยที่ a เป็นจำนวนจริงบวก ซึ่ง $a^2-a-2 \geq 0$ และมีอสมการข้อจำกัดคือ $2 \leq x \leq 4$, $y \geq 1$ และ $x + y \leq 7$ ถ้าค่าสูงสุดของ $P(x,y)$ เท่ากับ 41 แล้ว a มีค่าอยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. $[2, 2.5)$ 2. $[2.5, 3)$ 3. $[3, 3.5)$ 4. $[3.5, 4)$

15. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า และ D เป็นจุดบนด้าน BC ซึ่งทำให้ $|\overrightarrow{BD}| : |\overrightarrow{BC}| = 1 : 3$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ ข. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{6}|\overrightarrow{BC}|^2$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก 2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก 4. ก. ผิด และ ข. ผิด

16. กำหนดจำนวนเชิงซ้อน $z_1 = a$, $z_2 = b(\cos\theta + i\sin\theta)$ โดยที่ $a > 0$, $b > 0$ และ $0 < \theta < \pi/2$ ถ้า $2i|z_1 z_2|\sin\theta = c\bar{z}_1 z_2 + d z_1 \bar{z}_2$ โดยที่ c, d เป็นจำนวนจริง แล้ว $5c + 2d$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 4 2. 3 3. 2 4. 1

17. ให้ $z = a + bi$ ซึ่ง $b > 0$ ถ้า z สอดคล้องกับ $\left|\frac{z^2+4z-32}{z^2-64}\right| = 1$ และ $z\bar{z} = 61$ แล้ว $a + b$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 9 2. 10 3. 11 4. 12

18. กำหนดให้ $f(x) = |x^2+4x|$ และ $g(x) = |x^2-16|$

ถ้า a, b เป็นคำตอบทั้งสองของสมการ $f(x) = g(x)$ แล้ว

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} + \lim\limits_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{2}$ 2. $\frac{5}{6}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4. $\frac{1}{3}$

19. ให้ x เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $|x| < 1$ ถ้าอนุกรม

$1 + (1+x)(\frac{1}{2}) + (1+x+x^2)(\frac{1}{2})^2 + (1+x+x^2+x^3)(\frac{1}{2})^3 + \ldots$ มีผลบวกเท่ากับ $\frac{16}{7}$ แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{1}{3}$ 2. $-\frac{1}{4}$ 3. $\frac{1}{3}$ 4. $\frac{1}{4}$

20. กำหนดให้ g เป็นฟังก์ชันพหุนาม และ $f(x) = x\,g(x)$ ถ้า $f'(x) = 4x^3 + 9x^2$ และ $f(0) = 0$ แล้ว $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)}{g(x+1)}\right]$ ที่จุด $x = -2$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -4 2. -2 3. 2 4. 4

21. กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 1$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \dfrac{4}{3}$

ข. พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยโค้ง $y = f(x)$ จาก $x = -1$ ถึง $x = 1$ เท่ากับ $\dfrac{4}{3}$ ตารางหน่วย

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

22. กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริง และ $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ ถ้า $f'(1) = 15$ และ $\int_{0}^{1} f(x)\,dx = \dfrac{55}{12}$ แล้ว $f(1)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 9 2. 10 3. 11 4. 12

23. กล่องใบหนึ่งมีลูกแก้วขนาดเดียวกัน 3 สี เป็นสีขาว 4 ลูก สีแดงและสีเขียวมีจำนวนเท่ากัน เมื่อสุ่มหยิบลูกแก้วมา 2 ลูก ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกแก้วสีขาวทั้ง 2 ลูกเท่ากับ $2/15$ ถ้าสุ่มหยิบลูกแก้วมา 4 ลูก ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกแก้วเป็นสีเขียว 1 ลูก และสีแดงอย่างน้อย 1 ลูก เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\dfrac{30}{70}$ 2. $\dfrac{31}{70}$ 3. $\dfrac{29}{35}$ 4. $\dfrac{33}{35}$

24. ในการยืนเรียงเป็นแถวตรงของนักเรียนชาย 6 คน และนักเรียนหญิง 4 คน ถ้าความน่าจะเป็นที่ไม่มีนักเรียนหญิงสองคนใดยืนติดกันเลย เท่ากับ a และความน่าจะเป็นที่นักเรียนหญิงทั้งหมดต้องยืนติดกันเท่ากับ b แล้ว $a + b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0.20 2. 0.25 3. 0.30 4. 0.35

25. ในการสำรวจน้ำหนักตัวของนักเรียน 200 คน มีการแจกแจงความถี่ดังนี้

น้ำหนักตัว (ก.ก.)	**ความถี่**
19 – 22	20
23 – 26	60
27 – 30	30
31 – 34	40
35 – 38	50

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. น้ำหนักตัวของนักเรียน 200 คนนี้ มีฐานนิยมมากกว่ามัธยฐาน

ข. สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ของน้ำหนักตัวนักเรียน 200 คนนี้เท่ากับ 0.15

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

26. โรงงานแห่งหนึ่งคัดเลือกคนงานจากผู้สมัครเข้าทำงานทั้งหมด โดยมีเงื่อนไขว่าผู้ที่จะได้รับการพิจารณาคัดเลือกเข้าทำงานต้องมีค่ามาตรฐานของอายุไม่น้อยกว่า 1.5 และไม่เกิน 3.5 ถ้าค่าเฉลี่ยเลขคณิตและความแปรปรวนของอายุของผู้สมัครทั้งหมดเป็น 23 ปี และ a ปี^{2} ตามลำดับ และถ้านำค่ามาตรฐานของอายุของผู้สมัครทั้งหมดมาหาความแปรปรวนได้ความแปรปรวนเท่ากับ $a/4$ แล้ว ผู้สมัครที่อยู่ในข่ายที่จะได้รับการคัดเลือกเข้าทำงานจะต้องมีอายุตามข้อใดต่อไปนี้

1. ไม่น้อยกว่า 26 ปี และไม่เกิน 37 ปี
2. ไม่น้อยกว่า 29 ปี และไม่เกิน 37 ปี
3. ไม่น้อยกว่า 26 ปี และไม่เกิน 30 ปี
4. ไม่น้อยกว่า 29 ปี และไม่เกิน 30 ปี

27. ในการสอบวิชาหนึ่งมีนักเรียนสอบสองห้อง เป็นห้อง ก และห้อง ข พบว่าคะแนนสอบของทั้งสองห้องมีการแจกแจงปกติ โดยมีมัธยฐานเท่ากันและเท่ากับ a สัมประสิทธิ์ของการแปรผันของคะแนนของนักเรียนห้อง ก และห้อง ข เท่ากับ c และ $c+5/a$ ตามลำดับ ถ้าในการสอบครั้งนี้เด็กหญิงสดซึ่งอยู่ห้อง ก และเด็กหญิงใสซึ่งอยู่ห้อง ข ทำคะแนนได้ในตำแหน่งเปอร์เซนไทล์ที่ 78.81 ทั้งคู่ แล้วเด็กหญิงใสได้คะแนนมากกว่าเด็กหญิงสดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

กำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้โค้งปกติดังนี้

z	0.70	0.80	0.90
A	0.2580	0.2881	0.3159

1. 5
2. 4
3. 3.5
4. 2

28. ให้ปี พ.ศ. 2539 เป็นปีฐาน ในการหาดัชนีราคาผู้บริโภคตั้งแต่ พ.ศ. 2540 เป็นต้นไป สมมติว่าดัชนีราคาผู้บริโภคใน พ.ศ. 2540 เท่ากับ 104 และค่าครองชีพใน พ.ศ. 2543 สูงกว่าค่าครองชีพใน พ.ศ. 2540 เท่ากับ 25 เปอร์เซ็นต์ ถ้านายสุจริตมีรายได้ต่อเดือนที่แท้จริงใน พ.ศ. 2543 เท่ากับ 20,000 บาท แล้ว เขามีรายได้ต่อเดือนเป็นตัวเงินเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 23,000 บาท
2. 24,000 บาท
3. 25,000 บาท
4. 26,000 บาท

เฉลย

ตอนที่ 1 (1) 56 (2) 0.5 (3) 4 (4) 1.28 (5) 10 (6) 5 (7) 44.79 (8) 90

ตอนที่ 2 (1) 2 (2) 1 (3) 4 (4) 1 (5) 4 (6) 3 (7) 2 (8) ไม่มีข้อถูก (9) 2 (10) 4 (11) 1 (12) 2 (13) 3 (14) 3 (15) 3 (16) 2 (17) 3 (18) 1 (19) 4 (20) 1 (21) 3 (22) 2 (23) 2 (24) 1 (25) 4 (26) 3 (27) 2 (28) 4

เตรียมเอ็นทรานซ์ : มีนาคม 2547 ชุดที่ 1

<u>ตอนที่ 1</u> ข้อ 1 – 8 เป็นข้อสอบแบบอัตนัย ข้อละ 2 คะแนน

1. ถ้า a เป็นจำนวนจริงที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $|x^2-4x+3| \le a$ ทุกค่า x ซึ่ง $|4x-11| \le 5$ แล้ว a มีค่าเท่ากับเท่าใด

2. กำหนดให้ $4\sin^2 x + 11\cos x - 1 = 0$ แล้ว $\cot^2(x+\frac{\pi}{2}) + \sec(x-3\pi)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

3. ถ้า $\log_a(ax) + 2\log_a(a^2x) + 3\log_a(a^3x) + \ldots + 10\log_a(a^{10}x) = 110$ เมื่อ $a = \sqrt[5]{0.5}$ แล้ว จะได้ว่า x มีค่าเท่ากับเท่าใด

4. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ถ้า $A^4 + I = \underline{0}$ แล้ว ค่าของ $\sin 8\theta$ เท่ากับเท่าใด

5. กำหนด $f(x) = \begin{cases} x^{2k} & ,x \le 2 \\ (\sqrt{8}-1)\,x^k + \sqrt{8} & ,x > 2 \end{cases}$
ถ้า k เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=2$
แล้วค่าของ $\int_0^2 f(x)\,dx$ เท่ากับเท่าใด

6. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง 7 ลูก และสีขาว 3 ลูก สุ่มลูกบอลจากกล่องจำนวน 3 ลูกพร้อมกัน ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลสีขาว 2 ลูก หรือสีแดง 2 ลูก มีค่าเท่ากับเท่าใด

7. ในจำนวนเด็ก 4 คน มีสองคนที่น้ำหนักเท่ากัน และน้ำหนักน้อยกว่าอีกสองคนที่เหลือ ถ้าฐานนิยม มัธยฐาน และพิสัยของน้ำหนักของเด็กทั้ง 4 คนนี้ได้แก่ 40, 41 และ 6 กิโลกรัม ตามลำดับ แล้วค่าความแปรปรวนของน้ำหนักของเด็ก 4 คนนี้เท่ากับเท่าใด

8. ตารางแสดงราคาสินค้า 3 ชนิดใน พ.ศ. 2534 ถึง พ.ศ. 2536 เป็นดังนี้ ถ้าดัชนีราคาของสินค้าทั้ง 3 ชนิดใน พ.ศ. 2535 และ 2536 เมื่อคิดโดยใช้ดัชนีราคาอย่างง่ายแบบค่าเฉลี่ยราคาสัมพัทธ์ เพิ่มจาก พ.ศ. 2534 ร้อยละ $10/3$ และ $5/3$ ตามลำดับแล้ว $y-x$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

รายการสินค้า	ราคา (บาท)		
	2534	2535	2536
เข็มขัดหนัง	800	800	600
กระเป๋าหนัง	x	y	1,200
รองเท้าหนัง	1,000	1,000	1,100

<u>ตอนที่ 2</u> ข้อ 1 – 28 เป็นข้อสอบแบบปรนัย ข้อละ 3 คะแนน

1. จำนวนสมาชิกของเซต

$\{ f : (B-A) \xrightarrow{1-1} (A-B) \mid n(A)=8 \text{ และ } n(B)=6 \text{ และ } n(A \cap B)=3 \}$

มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 6 2. 15 3. 60 4. 125

2. กำหนด $A \subset B$ และ $C=\{A,B\}$ ถ้า $P(C)$ แทนเพาเวอร์เซตของ C

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $A \in P(C)$ และ $B \in P(C)$ ข. $A \cup B \in C$ และ $A \cap B \in C$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก 2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก 4. ก. ผิด และ ข. ผิด

3. กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\frac{x-1}{x+2} > 2$

$f(x) = \sqrt{(3+x)(2-x)}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$

และ c เป็นขอบเขตบนค่าน้อยที่สุดของ $A \cap D_{f \cdot g}$ แล้ว c มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -4 2. -2 3. 0 4. 2

4. ให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนเต็ม ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริง

1. $\forall x [(x>0) \vee (x \le 0)] \rightarrow (\forall x [x>0] \vee \forall x [x \le 0])$
2. $(\exists x [x>0] \wedge \exists x [x \le 0]) \rightarrow \exists x [(x>0) \wedge (x \le 0)]$
3. $\forall x [(x>0) \rightarrow (x>0)] \rightarrow (\exists x [x>0] \rightarrow \forall x [x>0])$
4. $\forall x [(x \le 0) \rightarrow (x \le 0)] \rightarrow (\forall x [x \le 0] \rightarrow \forall x [x \le 0])$

5. พิจารณาการอ้างเหตุผลต่อไปนี้

ก. *เหตุ*	1) $p \rightarrow \sim q$	ข. *เหตุ*	1) $P(x) \wedge Q(x)$
	2) $q \vee r$		2) $Q(x) \rightarrow R(x)$
	3) $\sim r$		3) $\sim R(x) \vee S(x)$
ผล	p	*ผล*	$S(x)$

ข้อความใดต่อไปนี้ถูก

1. ก และ ข สมเหตุสมผลทั้งคู่ 2. ก สมเหตุสมผล แต่ ข ไม่สมเหตุสมผล
3. ก ไม่สมเหตุสมผล แต่ ข สมเหตุสมผล 4. ก และ ข ไม่สมเหตุสมผลทั้งคู่

6. ให้ $r = \{(x,y) \mid 9x^2+4y^2-18x+16y-11=0\}$

แล้ว $D_{r^{-1}} \cap R_{r^{-1}}$ เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้

1. $[-5,-1]$ 2. $[-1,1]$ 3. $[1,3]$ 4. $[3,5]$

7. กำหนดให้ $f(x) = x^2+2x-1$ และ $g(x) = x^3+3x^2+3x+9$
แล้ว ค่าของ $(fog^{-1})(7)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1 2. 0 3. 1 4. 2

8. กำหนดฟังก์ชัน f และ g ภายในเซตของจำนวนจริง $\mathbb{R}$
โดย $f(x) = 1+x$ และ $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $D_{(gof)^{-1}} = \mathbb{R} - \{0\}$ ข. $R_{(gof)^{-1}} = \mathbb{R} - \{-1\}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก 2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก 4. ก. ผิด และ ข. ผิด

9. ถ้า $2\arcsin x + \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) = \arctan\sqrt{3}$
แล้ว $\dfrac{\pi}{5}+\arcsin x$ มีค่าอยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. $(-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{4})$ 2. $(-\dfrac{\pi}{4},0)$ 3. $(0,\dfrac{\pi}{4})$ 4. $(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$

10. ถ้า O เป็นจุดกำเนิด และ C เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2+y^2+4x-8y+11=0$
แล้ว สมการของเส้นตรง OC และสมการของวงกลมที่มี OC เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางเส้นหนึ่ง
ตรงกับสมการในข้อใดต่อไปนี้

1. $y=-2x$ และ $x^2+y^2+2x-4y=0$
2. $y=-2x$ และ $x^2+y^2+2x-4y=15$
3. $y=2x$ และ $x^2+y^2+2x-4y=0$
4. $y=2x$ และ $x^2+y^2+2x-4y=15$

11. กำหนดให้ E เป็นวงรีซึ่งมีสมการเป็น $6x^2+5y^2+12x-20y-4=0$ และ H เป็น
ไฮเพอร์โบลาซึ่งมีจุดศูนย์กลางร่วมกับ E, มีจุดยอดทับจุดโฟกัสของ E และมีความยาวแกน
สังยุคเท่ากับความยาวแกนโทของ E ข้อใดต่อไปนี้เป็นสมการของไฮเพอร์โบลา H

1. $x^2-5y^2+2x+20y-14=0$ 2. $x^2-5y^2-2x-20y+14=0$
3. $x^2-5y^2+2x+20y-18=0$ 4. $x^2-5y^2-2x-20y+18=0$

12. ถ้า $A = \{x\in R \mid (\dfrac{2}{3})^{x(1-x)} > \dfrac{9}{4}\}$ แล้ว
เซต B เป็นช่วงในข้อใดต่อไปนี้ที่ทำให้ $B\cap A' = \varnothing$

1. $(-2,-1)$ 2. $(-1,0)$ 3. $(0,1)$ 4. $(1,2)$

13. ถ้า $AB = BA = I$ และ $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 0 & -2 \end{bmatrix}$ โดยที่ $\det(3I-A) = 8$ แล้ว
$\det(B\ adj\ A)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. -40 2. -8 3. 8 4. 40

14. กำหนดสมการจุดประสงค์คือ $P(x,y) = (a/2)x + 25y$ โดยที่ a เป็นจำนวนจริงบวก และมีสมการข้อจำกัดคือ $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 5$ และ $x+2y \leq 8$ ถ้าค่าสูงสุดของ $P(x,y)$ เท่ากับ 150 แล้ว a มีค่าอยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. $[40,50)$ 2. $[50,60)$ 3. $[60,70)$ 4. $[70,80)$

15. ถ้า $|\bar{u}| = |\bar{v}|$ แล้วมุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ ที่ทำให้ $|\bar{u}+\bar{v}| = 2|\bar{u}-\bar{v}|$ อยู่ในช่วงในข้อใดต่อไปนี้

1. $[0,\frac{\pi}{4})$ 2. $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ 3. $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$ 4. $[\frac{3\pi}{4},\pi)$

16. ให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน มีพื้นที่ 24 ตารางหน่วย และ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 3$ ถ้า θ คือมุมระหว่าง $\overrightarrow{AB}$ กับ $\overrightarrow{AD}$ แล้ว $\tan\theta$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $1/8$ 2. $1/4$ 3. 4 4. 8

17. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $z \neq 0$ และ $(5-12i)z^3(-3+4i) = 130\bar{z}$ แล้ว $\text{Re}(\bar{z}\cdot z)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\sqrt{2}$ 2. 2 3. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 4. $\frac{1}{2}$

18. ให้ $P(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามกำลังสาม ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง และสัมประสิทธิ์ของ x^3 เป็น 1 ถ้า $x-2$ หาร $P(x)$ เหลือเศษ 5 และ $(1+\sqrt{3}i)$ เป็นรากหนึ่งของ $P(x)$ แล้วรากที่เป็นจำนวนจริงของ $P(x)$ คือค่าในข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{4}$ 2. $\frac{4}{3}$ 3. $\frac{5}{4}$ 4. $\frac{4}{5}$

19. ให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|-1}{\sqrt{1-x}}, & x < 1 \\ \frac{|1-x|}{1-\sqrt{x}}, & x > 1 \end{cases}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ หาค่าไม่ได้
2. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) > 0$ และ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) < 0$
3. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) + \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$
4. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) + \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -2$

20. กำหนดให้ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม และ $f(x) = (x-1)^2 g(x)$ ถ้า $x-2$ หาร $f(x)$ และ $f'(x)$ เหลือเศษ 3 และ 4 ตามลำดับ แล้ว ค่าของ $\left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=2}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 4 2. 1 3. -2 4. -3

21. กำหนด f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ และ $F(x) = \sqrt{(f(x))^3 + 15}$
ถ้า $F(1) = f'(1) = 4$ แล้ว $F'(1)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{2}$ 2. $\frac{3}{2}$ 3. 8 4. 24

22. ข้อใดเป็นขนาดของพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$, แกน x, แกน y และเส้นตรง $x - 2 = 0$

1. $\int_0^2 f(x)\,dx$ เมื่อ $f(x) = 4x - x^3$
2. $\int_0^2 f(x)\,dx$ เมื่อ $f(x) = \frac{x}{2} - \sqrt{x}$
3. $\int_0^2 f(x)\,dx$ เมื่อ $f(x) = \frac{3}{x-3} + 1$
4. ถูกทุกข้อที่กล่าวมา

23. ถ้าเส้นโค้งเส้นหนึ่งมีสมการเป็น $f(x) = \frac{x^4}{4} - x$
และ a เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $\int_{-a}^{a^2} f''(x)\,dx = -\frac{1}{4}$ แล้ว
ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งนี้ ณ จุดซึ่ง $x = a$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{2}$ 2. $-\frac{1}{2}$ 3. $\frac{3}{2}$ 4. $-\frac{3}{2}$

24. จำนวนวิธีจัดพนักงาน 6 คนเป็น 3 กลุ่ม เพื่อทำงาน 3 อย่างที่แตกต่างกัน โดยแบ่งกลุ่มละกี่คนก็ได้ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 90 2. 180 3. 540 4. 1080

25. ในการลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด 2 จุดใดๆ ของรูปสิบเหลี่ยมด้านเท่าที่แนบในวงกลม โดยที่เส้นนั้นไม่ใช่ด้านของรูปสิบเหลี่ยม ความน่าจะเป็นที่เส้นที่ลากขึ้นนี้ไม่ใช่เส้นรอบรูปและไม่ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมด้วย เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{5}{7}$ 2. $\frac{5}{9}$ 3. $\frac{6}{7}$ 4. $\frac{6}{9}$

26. สมการแสดงความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน ระหว่างต้นทุน (Y : พันบาท) กับจำนวนสินค้าที่ผลิต (X : ร้อยชิ้น) คือ $Y = 2X + 5$
พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้าจะผลิตสินค้าเพิ่ม 200 ชิ้น คาดว่าต้นทุนจะเพิ่ม $9,000$ บาท

ข. ถ้าต้นทุนเป็น $7,000$ บาท คาดว่าจะผลิตสินค้าได้ 100 ชิ้น

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

27. ในการสอบย่อยครั้งหนึ่งคะแนนเต็มคือ 100 คะแนน มีนักเรียนเข้าสอบ 9 คนในวิชาคณิตศาสตร์และเคมี ได้คะแนนดังนี้

คณิตศาสตร์ : 70 70 70 78 79 80 90 91 92

เคมี : 50 60 72 78 80 85 90 92 95

ปรากฏว่า ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ เท่ากับ 8.6 คะแนน และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบวิชาเคมีเท่ากับ 14.2 คะแนน ถ้านายปัญญาสอบวิชาคณิตศาสตร์และเคมีได้ 90 คะแนนเท่ากันทั้งสองวิชา แล้วข้อสรุปข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. เขาเรียนวิชาคณิตศาสตร์ได้ดีกว่าเคมี
2. เขาเรียนวิชาเคมีได้ดีกว่าคณิตศาสตร์
3. เขาเรียนทั้งสองวิชาได้ดีเท่ากัน เพราะคะแนนเท่ากัน
4. เขาเรียนทั้งสองวิชาได้ดีเท่ากัน เพราะได้ตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์เดียวกัน

28. คะแนนสอบของนักเรียนกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงปกติ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 40 คะแนน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบเท่ากับ 10 คะแนน และมีนักเรียนที่สอบได้คะแนนที่คิดเป็นค่ามาตรฐานระหว่าง -1 และ 1 อยู่ 75% ของนักเรียนทั้งหมด ถ้านาย ก สอบได้ 50 คะแนน แล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ของนาย ก

1. 37.5 2. 50.0 3. 75.0 4. 87.5

<u>เฉลย</u>

ตอนที่ 1 (1) 3 (2) 19 (3) 2 (4) 0 (5) 4 (6) 0.7 (7) 6 (8) 100

ตอนที่ 2 (1) 3 (2) 3 (3) 2 (4) 4 (5) 3 (6) 2 (7) 1 (8) 2 (9) 4 (10) 1 (11) 1 (12) 1 (13) 2 (14) 3 (15) 2 (16) 4 (17) 2 (18) 1 (19) 4 (20) 3 (21) 2 (22) 1 (23) 4 (24) 3 (25) 3 (26) 4 (27) 1 (28) 4

เตรียมเอ็นทรานซ์ : มีนาคม 2547 ชุดที่ 2

<u>ตอนที่ 1</u> ข้อ 1 – 8 เป็นข้อสอบแบบอัตนัย ข้อละ 2 คะแนน

1. ให้ N เป็นเซตของจำนวนนับ และกำหนด $A = \{-2, -1, 0, 1\}$
จะได้ว่า จำนวนฟังก์ชันจาก A ไป A โดยที่ ถ้า $x \in N$ แล้ว $f(x) \geq 0$
แต่ถ้า $x \notin N$ แล้ว $f(x) < 0$ เป็นเท่าใด

2. จำนวนเต็ม k ที่น้อยที่สุดที่ทำให้อสมการ $\left| x^3 - 6x^2 + 9x + 1 \right| \leq k$ เป็นจริง
สำหรับทุกๆ ค่า $x \in [0, 3]$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

3. กำหนดให้ $\arctan x = \arctan(1/3) + \arctan(1/2)$
และ $\arcsin y = \arcsin(1/\sqrt{10}) + \arcsin(1/\sqrt{5})$
แล้ว $(x-y)(x+y)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

4. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} x & y & 4 \\ -3 & 8 & 0 \\ x & -y & -1 \end{bmatrix}$ โดยที่โคแฟกเตอร์ของ $a_{21} = -6$ และ
โคแฟกเตอร์ของ $a_{23} = 4$ แล้ว โคแฟกเตอร์ของ a_{33} มีค่าเท่ากับเท่าใด

5. ถ้าจำนวนเชิงซ้อน $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ แล้ว ค่าสัมบูรณ์ของ $\left(\frac{z - \bar{z}}{z^{18} + i} \right)^2$ เท่ากับเท่าใด

6. สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n ถ้า z_n เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่งกำหนดโดย
$z_n = 1 - 2^{-n} - 3i$ แล้วลิมิตของลำดับ $a_n = z_n \bar{z}_n$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

7. ในการแบ่งนักเรียนซึ่งมีผู้ชาย 3 คนและผู้หญิง 5 คน ออกเป็นกลุ่ม A และ B กลุ่มละ 4 คน
ความน่าจะเป็นที่ในแต่ละกลุ่มนั้นมีผู้ชายอยู่ด้วยเป็นเท่าใด (ตอบทศนิยม 2 ตำแหน่ง)

8. ผลการสอบวิชาคณิตศาสตร์ซึ่งคะแนนเต็มเท่ากับ 100 คะแนน ของนักเรียนห้องหนึ่งเป็นดังตาราง สุดาและสุรชัยเป็นนักเรียนในห้องดังกล่าว ถ้าสุดาได้คะแนนในตำแหน่งควอร์ไทล์ที่ 3 และสุรชัยได้คะแนนในตำแหน่งมัธยฐาน ดังนั้นสุดาได้คะแนนมากกว่าสุรชัยอยู่กี่คะแนน

คะแนน	จำนวนนักเรียน
90 – 99	10
80 – 89	25
70 – 79	30
60 – 69	20
50 – 59	10
40 – 49	4
30 – 39	1

<u>ตอนที่ 2</u> ข้อ 1 – 28 เป็นข้อสอบแบบปรนัย ข้อละ 3 คะแนน

1. กำหนดให้ $A = \{\varnothing, 0, 1, \{0\}\}$ และ $B = \{1, \{0\}, \{0,1\}\}$
ถ้า $P(X)$ แทนเพาเวอร์เซตของ X แล้ว $n(P(A)-B) + n(P(B)-A)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 17 2. 20 3. 21 4. 22

2. สมาชิกที่เป็นจำนวนเต็มของ $\{x \geq 0 \mid x$ หาร 720 ลงตัว และ x หาร 5000 ไม่ลงตัว$\}$
มีจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 10 ตัว 2. 12 ตัว 3. 20 ตัว 4. 22 ตัว

3. ให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $|x-4| + |x-3| = 1$
และ B เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\frac{4}{x-2} \geq \frac{2}{\sqrt{x+1}}$
แล้วข้อใดเป็นสับเซตของ $B-A$

1. $(1.5, 2.5)$ 2. $(2.5, 3.5)$ 3. $(3.5, 4.5)$ 4. $(4.5, 5.5)$

4. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า $(p \to q) \wedge (r \vee s)$ เป็นจริง และ $q \vee s$ เป็นเท็จ แล้ว $(q \vee p) \to (r \wedge s)$ เป็นจริง

ข. $[(p \wedge q) \to (p \vee q)] \leftrightarrow [(\sim p \wedge \sim q) \to (\sim p \vee \sim q)]$ เป็นสัจนิรันดร์

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก 2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก 4. ก. ผิด และ ข. ผิด

5. หากกำหนดเอกภพสัมพัทธ์เป็น $U = \{-1, 0, 1\}$ แล้ว
ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงต่างจากข้ออื่น

1. $\forall x (x^2 > 0 \vee x = 0)$ 2. $\forall x (x^2 > 0) \vee \forall x (x = 0)$
3. $\exists x (x+1 > 0 \wedge x^2 \neq 1)$ 4. $\exists x (x+1 > 0) \wedge \exists x (x^2 \neq 1)$

6. กำหนดให้ $r_1 = \{(x, y) \in R \times R \mid y < x^2 - 3\}$
และ $r_2 = \{(x, y) \in R \times R \mid 2y + 3(x+1) > 4x\}$
แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $(-1, -2)$ เป็นจุดสูงสุดในเซต $r'_1 \cap r_2$
2. $(3/2, -3/4)$ เป็นจุดต่ำสุดในเซต $r'_1 \cap r_2$
3. $(3/2, -3/4)$ เป็นจุดสูงสุดในเซต $r'_1 - r_2$
4. $(-1, -2)$ เป็นจุดสูงสุดในเซต $r'_1 - r_2$

7. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x} + 1$ และ $g(x) = (x-1)^2$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $D_{gof} = D_{fog}$ และ $R_{gof} = R_{fog}$ ข. $D_{gof} \neq R_{gof}$ และ $D_{fog} \neq R_{fog}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก 2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก 4. ก. ผิด และ ข. ผิด

8. กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 1$ และ $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $f + g^{-1}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[0, \infty)$

ข. fog^{-1} เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[0, \infty)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

9. ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ถ้า $\cos x = -1/\sqrt{5}$ แล้ว $\tan x = -2$
2. ถ้า $\tan x = 2$ แล้ว $\cos x = 1/\sqrt{5}$
3. $\tan(\arccos(-1/\sqrt{5})) = -2$
4. $\arccos(-1/\sqrt{5}) = \arctan(-2)$

10. ถ้า A เป็นจุดบนแกน y ซึ่งอยู่ห่างจากจุด $(2,2)$ และ $(1,-1)$ เป็นระยะทางเท่ากัน และจุด B มีพิกัดเป็น $(4,5)$ แล้ว สมการของวงกลมที่มี AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางเส้นหนึ่ง ตรงกับสมการในข้อใดต่อไปนี้

1. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$
2. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$
3. $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 15 = 0$
4. $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 12 = 0$

11. วงรีและไฮเพอร์โบลามีจุดโฟกัสอยู่ที่ตำแหน่งเดียวกัน คือ $(0,2)$ และ $(0,-2)$ ถ้าอัตราส่วนของระยะทางจากจุดศูนย์กลางไปยังจุดโฟกัส ต่อระยะทางจากจุดศูนย์กลางไปยังจุดยอด $(c:a)$ ของวงรีและไฮเพอร์โบลา เป็น $1/2$ และ 2 ตามลำดับ แล้วข้อใดเป็นจุดที่วงรีและไฮเพอร์โบลานี้ตัดกัน

1. $(\pm 3, \pm 1)$
2. $(\pm 3, \pm 2)$
3. $(\pm 1, \pm 3)$
4. $(\pm 2, \pm 3)$

12. ให้ $A = \{ x \in R \mid \sqrt[3]{(x+1)^2 - 5(2x-3)} + 2\sqrt[3]{x-4} + 1 = 0 \}$

และ $B = \{ x \in R \mid \log_{3x} 9 + (\log_3 x)^2 = 2 \}$

แล้ว $C = \{ \log_3 \frac{a}{b} \mid a \in A \text{ และ } b \in B \}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\{0, 1, 3\}$
2. $\{0, 1, 9\}$
3. $\{1, 3, 1/9\}$
4. $\{1, 3, 27\}$

13. ถ้าจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับอสมการ

$(\log_3 x - \log_{3^2} x + \log_{3^4} x - \log_{3^8} x + \ldots) < 1$

คือช่วง (a, b) แล้วค่าของ $a + b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\sqrt{3}$
2. $2\sqrt{3}$
3. $3\sqrt{3}$
4. $4\sqrt{3}$

14. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos 4\theta \\ -\sin 2\theta & \sin 3\theta \end{bmatrix}$ เมื่อ $\theta = \frac{\pi}{12}$

แล้ว $\det(2A^t)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\sqrt{3}$
2. 2
3. 3
4. $2 + \sqrt{3}$

15. กำหนดสมการจุดประสงค์ $C(x,y)=5x+2y$ โดยมีเงื่อนไขดังนี้ $x+2y\geq 5$, $3x+y\geq 10$, $3x-8y\leq 8$, $x\geq 0$ และ $y\geq 0$ จะได้ว่าค่าต่ำสุดของ C เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 15 2. 17 3. 20 4. 21

16. ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีสมบัติ $|\bar{u}|=|\bar{v}|$, $\bar{u}\cdot\bar{v}=\sqrt{3}$ โดยที่ $\bar{v}=\bar{i}+\bar{j}$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นขนาดของมุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{u}$ กับแกน x ที่เป็นไปได้

1. 15° 2. 30° 3. 45° 4. 60°

17. ให้ $\bar{u}=2\bar{i}+4\bar{j}$ และ $\overrightarrow{AB}$ เป็นเวกเตอร์ที่ขนานกับ $\bar{u}$ โดยจุด A อยู่ที่ $(1,-2)$ และจุด B อยู่บนเส้นตรง $y=3x-2$ ดังนั้น $|\overrightarrow{AB}|:|\bar{u}|$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1.5 2. 2 3. 2.25 4. 4

18. ถ้า z_1,z_2,z_3 เป็นรากของสมการ $z^3+5=\sqrt{2}\,i$ แล้ว $|z_1^2|+|z_2^2|+|z_3^2|$ คือค่าในข้อใดต่อไปนี้

1. $\sqrt{3}$ 2. $3\sqrt{3}$ 3. 9 4. $9\sqrt{3}$

19. กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามกำลังสามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง และสัมประสิทธิ์ของ x^3 เท่ากับ 1 ถ้า $f(x)$ มี $x-1$ เป็นตัวประกอบหนึ่ง, $x-2$ หาร $f'(x)$ และ $f''(x)$ เหลือเศษ 2 เท่ากัน แล้วข้อใดต่อไปนี้เป็นสมการเส้นสัมผัสโค้ง $y=f(x)$ ณ จุดซึ่ง $x=2$

1. $y=2x+2$ 2. $y=2x$
3. $y=2x-2$ 4. $y=2x-4$

20. กำหนด $f(x)=10^{-\log(x-4)}+\dfrac{x}{25}$

ถ้าความชันของเส้นสัมผัสโค้ง $y=f(x)$ ที่จุด $(a,f(a))$ เท่ากับ $-\dfrac{24}{25}$ แล้วจำนวนจริง a ที่เป็นไปได้ มีทั้งหมดกี่จำนวน

1. 0 2. 1 3. 2 4. 3

21. ค่าของ $\int_1^2\left(\dfrac{x^4+1}{x^2}\right)dx+\int_0^1(4-\sqrt{x})^2\,dx$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 10 2. 14 3. 20 4. 24

22. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\int_{-1}^{3}(x^3-4x)\,dx=4$ ข. ขนาดพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยโค้ง $y=x^3-4x$ กับแกน x ในช่วง $x=-1$ ถึง 3 เท่ากับ 12 ตารางหน่วย

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก 2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก 4. ก. ผิด และ ข. ผิด

23. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. จำนวนวิธีร้อยมาลัยวงกลมด้วยดอกไม้ 5 ชนิด โดยดอกมะลิและดอกดาวเรืองต้องอยู่ติดกัน เท่ากับ 12 วิธี

ข. จำนวนวิธีจัดนักเรียน 5 คนเป็นวงกลม โดยเด็กหญิงมะลิและเด็กหญิงดาวเรืองต้องอยู่ติดกัน เท่ากับ 12 วิธี

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

24. ถ้านาย ก พูดความจริง 3 ใน 4 ครั้ง และนาย ข พูดความจริง 5 ใน 6 ครั้ง แล้วคำกล่าวในข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ความน่าจะเป็นที่ทั้งสองคนจะพูดความจริงพร้อมกัน เท่ากับ 4 ใน 5 ครั้ง
2. ความน่าจะเป็นที่ทั้งสองคนจะพูดความจริงพร้อมกัน เท่ากับ 1 ใน 3 ครั้ง
3. ความน่าจะเป็นที่ทั้งสองคนจะพูดขัดแย้งในเรื่องเดียวกัน เท่ากับ 4 ใน 5 ครั้ง
4. ความน่าจะเป็นที่ทั้งสองคนจะพูดขัดแย้งในเรื่องเดียวกัน เท่ากับ 1 ใน 3 ครั้ง

25. การจ่ายโบนัสให้กับพนักงานของบริษัทหนึ่งเท่ากับ 1,000 บาทบวกกับ 2 เท่าของเงินเดือน พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของโบนัส เป็น 2 เท่าของค่าเฉลี่ยเลขคณิตของเงินเดือน

ข. ความแปรปรวนของโบนัส เป็น 2 เท่าของความแปรปรวนของเงินเดือน

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

26. จากตารางต่อไปนี้ซึ่งข้อมูลชุด x และ y มีความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันกันแบบเส้นตรง

x	-2	-1	1	2
y	-2	1	3	4

ถ้าการทำนายค่า x และ y ใช้ระเบียบวิธีกำลังสองน้อยที่สุด พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า $y=3$ ทำนายได้ว่า $x=1$ ข. ถ้า $x=1$ ทำนายได้ว่า $y=3$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

27. ข้อมูลชุดหนึ่งมีการแจกแจงแบบปกติ โดยที่ค่าสูงสุดของข้อมูลอยู่ในตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ที่ 97.5 และค่าต่ำสุดของข้อมูลอยู่ในตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ที่ 33 ถ้าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลเป็น 10 คะแนน แล้วพิสัยของข้อมูลชุดนี้มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

กำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้โค้งปกติมาตรฐาน ดังนี้

z	0.170	0.440	0.475	1.960
A	0.0675	0.1700	0.1826	0.4750

1. 14.0 2. 15.2 3. 19.6 4. 24.0

28. ตารางต่อไปนี้แสดงปริมาณและราคาของสินค้า ในปี พ.ศ. 2542 และ พ.ศ. 2546

รายการสินค้า	ราคา (พันบาท)		ปริมาณ (ร้อยเครื่อง)	
	2542	2546	2542	2546
เครื่องจักร A	3	5	100	150
เครื่องจักร B	4	6	a	2a

ถ้าดัชนีราคาสินค้าในปี พ.ศ. 2546 โดยใช้ปี พ.ศ. 2542 เป็นปีฐาน แบบใช้ราคารวมโดยถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีของลาสไพเยอเรส มีค่าเท่ากับ 160 แล้ว a จะมีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 50.0 2. 37.5 3. 25.0 4. 12.5

<u>เฉลย</u>

ตอนที่ 1 (1) 16 (2) 5 (3) 0.5 (4) 14 (5) 1.5 (6) 10 (7) 0.86 (8) 9

ตอนที่ 2 (1) 3 (2) 4 (3) 4 (4) 1 (5) 2 (6) 3 (7) 4 (8) 1 (9) 3 (10) 2 (11) 2 (12) 1 (13) 3 (14) 4 (15) 2 (16) 1 (17) 1 (18) 3 (19) 3 (20) 2 (21) 2 (22) 1 (23) 3 (24) 4 (25) 4 (26) 2 (27) 4 (28) 1

สถิติคะแนนสอบเอ็นทรานซ์ : 2541 – 2546

- ที่มา : http://entrance.mis.mua.go.th/

และ http://www.entrance.co.th/newentinfo/stat/stat.asp

คะแนน	0-10 (ต่ำสุด)	11-20	21-30 (เฉลี่ย)	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80	81-90	91-100 (สูงสุด)	รวม (SD)
ต.ค.41	4,495	40,972	61,452	25,434	6,044	1,867	621	243	74	30	141,232
	(0.00)		(25.28)							(100.00)	(9.74)
มี.ค.42	1,141	21,383	52,528	31,526	8,711	2,684	1,015	368	105	15	119,476
	(3.00)		(28.77)							(100.00)	(10.20)
ต.ค.42	5,884	46,996	65,383	25,631	5,766	1,611	582	211	62	13	152,139
	(0.00)		(24.58)							(97.00)	(9.51)
มี.ค.43	2,464	25,754	50,432	29,863	10,149	3,720	1,481	628	181	46	124,718
	(0.00)		(28.73)							(100.00)	(11.49)
ต.ค.43	6,958	53,464	71,551	22,916	6,543	2,445	1,138	570	255	57	165,897
	(2.00)		(24.46)							(98.00)	(10.64)
มี.ค.44	1,866	24,474	53,865	25,366	9,860	4,107	2,045	1,010	541	177	123,311
	(3.00)		(29.23)							(100.00)	(12.64)
ต.ค.44	5,341	47,058	77,649	21,070	6,007	2,271	1,011	412	128	43	160,990
	(2.00)		(24.66)							(100.00)	(10.01)
มี.ค.45	3,733	34,141	58,352	18,501	6,493	2,472	858	203	50	1	124,804
	(3.00)		(25.48)							(92.00)	(10.31)
ต.ค.45	3,805	43,527	85,139	25,799	5,564	1,370	384	96	14	3	165,701
	(2.00)		(24.91)							(95.00)	(8.61)
มี.ค.46	2,589	32,096	59,202	22,551	6,324	2,199	836	310	70	13	126,190
	(0.00)		(26.20)							(97.00)	(10.05)
ต.ค.46	1,508	31,938	86,787	34,843	8,895	2,443	858	287	79	9	167,647
	(3.00)		(27.26)							(97.00)	(9.23)